

# Controle $H_\infty$ - PPGEE - EPUSP

## Exemplo 1 - Projeto Ótimo $H_\infty$ SISO

Prof. Diego

Segundo Período 2017

### Exemplo 1

Neste exemplo, iremos resolver com mais detalher o problema 2.17 do livro do Skogestad, segunda edição, versão 2005 (pag. 64). Deseja-se resolver o problema de sensibilidade mista  $S/KS$ , onde se dá um formato adequado para a função sensibilidade  $S$ , assim como na função de transferência  $KS$  do sinal de controle. Será minimizada então a norma  $H_\infty$  da matriz de funções de transferência:

$$N(s) = \begin{bmatrix} W_p S \\ W_u KS \end{bmatrix}$$

onde  $W_p$  é a função peso para a sensibilidade e  $W_u$  é a função peso para  $KS$ . Iremos usar a função `mixsyn` do Matlab Robust Control Toolbox<sup>®</sup>. Esta função retorna um controlador  $H_\infty$  (na verdade sub-ótimo) e um número real  $\gamma$  tal que

$$|S(j\omega)| \leq \frac{\gamma}{|W_p(j\omega)|}$$

e

$$|KS(j\omega)| \leq \frac{\gamma}{|W_u(j\omega)|}$$

As especificações são dadas em termos das desigualdades  $\|W_p S\|_\infty < 1$  e  $\|W_u KS\|_\infty < 1$ . Então, se conseguirmos  $\gamma$  próximo de 1, estaremos atendendo as especificações.

#### 0.1 Descrição da Planta

Seja a planta dada pela função de transferência

$$G(s) = \frac{200}{0.025s^3 + 1.002s^2 + 10.1s + 1}$$

que é uma planta de terceira ordem e de fase mínima. Os correspondentes diagramas de Bode são apresentados na figura 1.

Supondo realimentação unitária e controlador unitário, ou seja  $K(s) = 1$ , nota-se que a frequência de cruzamento de fase é  $\omega_{180} = 20.1$  rad/s, a margem de ganho é  $GM = 6.11$  dB, a frequência de cruzamento de ganho é  $\omega_c = 13.6$  rad/s e a margem de fase é  $PM = 21.8$  graus. Como não estamos considerando modelo de incertezas na planta, vamos usar as especificações clássicas de robustez de estabilidade, que recomendam  $30 < PM < 60$  graus e  $GM > 6$  dB.

As funções de transferência em malha fechada  $S(s)$  (função sensibilidade) e  $T(s)$  (função sensibilidade complementar), são apresentadas na figura 2. Nota-se que  $\|S\|_\infty = 10.2$  dB, o que está acima do valor recomendado classicamente (que deve ser no máximo 6 dB) e  $\|T\|_\infty = 9.02$  dB, (que deve ser no máximo 2 dB).

Diagramas de Bode de  $G(s)$

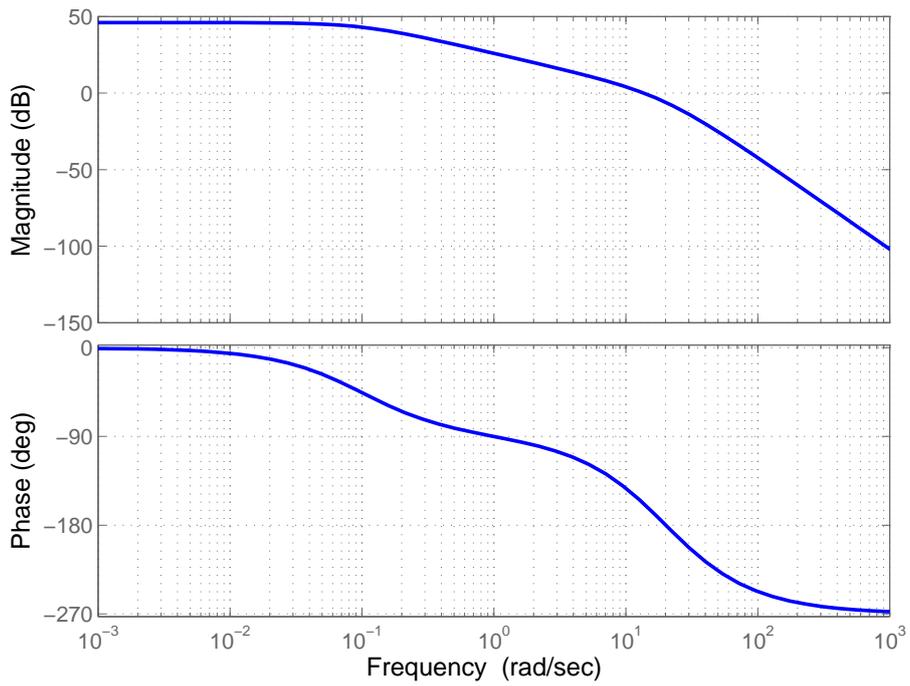


Figura 1: Diagramas de Bode da Planta  $G(s)$

Diagrama de  $S(s)$  e  $T(s)$  com Controlador Unitário

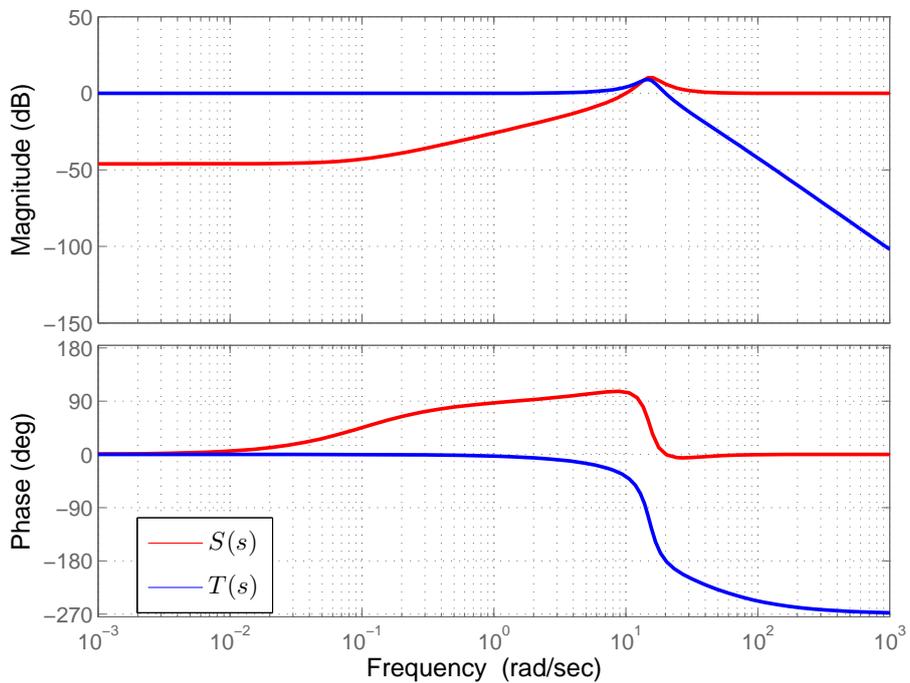


Figura 2: Diagramas de Bode de  $S(s)$  e  $T(s)$

A banda passante retirada de  $S(s)$  é dada por  $\omega_B = 8.65$  rad/s, e a resposta ao degrau é apresentada na figura 3. Espera-se que uma diminuição do valor de  $\|S\|_\infty$  vá diminuir a porcentagem de sobressinal (que está acima de 50%).

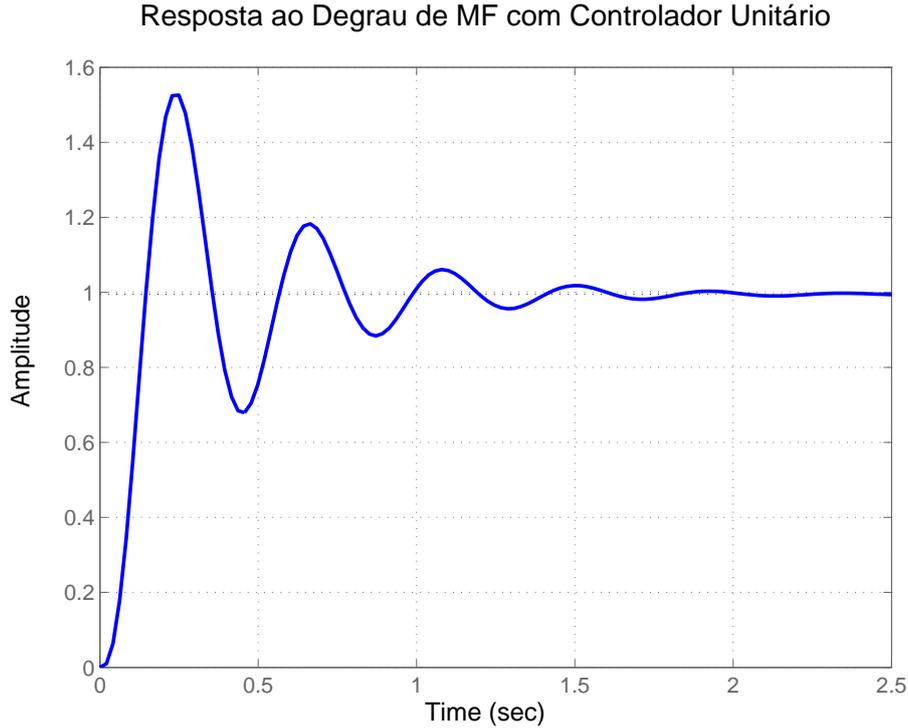


Figura 3: Resposta ao Degrau para o sistema em MF

## 0.2 Primeiro Projeto

Vamos inicialmente propor a função peso  $W_p(s)$  proposta como no exemplo do Skogestad, que é:

$$W_p(s) = \frac{\frac{s}{M} + \omega_B^*}{s + \omega_B^* A}$$

onde  $A = 0.0001$ ,  $M = 1.5$  e  $\omega_B^* = 10$ . Neste caso, o novo valor em baixas frequências de  $|S|$  será  $20 \log A = -80$  dB e o máximo valor será de  $20 \log M = 3.52$  dB. Estas especificações implicam que a banda passante será um pouco maior que a do sistema original (com controle unitário), um erro estacionário menor e  $\|S\|_\infty$  limitado superiormente por 3.52 dB. Além disso, vamos especificar que  $W_u \equiv 1$ , o que vai limitar superiormente a função  $|KS(j\omega)|$  em  $\gamma$ .

Os diagramas de Bode da função sensibilidade original e da função peso com as especificações são apresentados na figura 4.

Após aplicar o algoritmo, o valor atingido de  $\gamma = 1.37$ , de modo que as especificações não vão ser exatamente atingidas, entretanto, veremos que o resultado não ficou tão ruim. O valor  $\|S\|_\infty$  ficou 2.29 dB, como pode ser verificado na figura 5. A banda passante ficou  $\omega_B = 5.74$  rad/s, o que é inferior ao que era anteriormente (o que vem do fato de  $\gamma$  maior que um). A margem de ganho resultou em 27.8 dB, com  $\omega_{180} = 35.4$  rad/s e a margem de fase resultou em 71.1 graus com  $\omega_c = 7.2$  rad/s.

Na figura 6 tem-se os diagramas de Bode para para a função sensibilidade complementar.

Na figura 7 tem-se os diagramas de Bode para a função de transferência em malha aberta  $L(s)$ . Nota-se que para atender a especificação de menor erro em regime estacionário, o ganho nas baixas frequências acabou sendo aumentado. Desta e das figuras anteriores, também se vê que o controlador tem um excesso de pólos igual a um, de modo que não se trata de nenhum controlador clássico.

Na figura 8 tem-se os diagramas de Bode para função de transferência  $KS$ . Nota-se que o limite superior de  $\gamma = 1.37$  (que representa um ganho de 2.73 dB foi respeitado, entretanto as especificações não foram atendidas exatamente.

Diagrama de Bode de  $S(s)$  e Função Peso Inversa

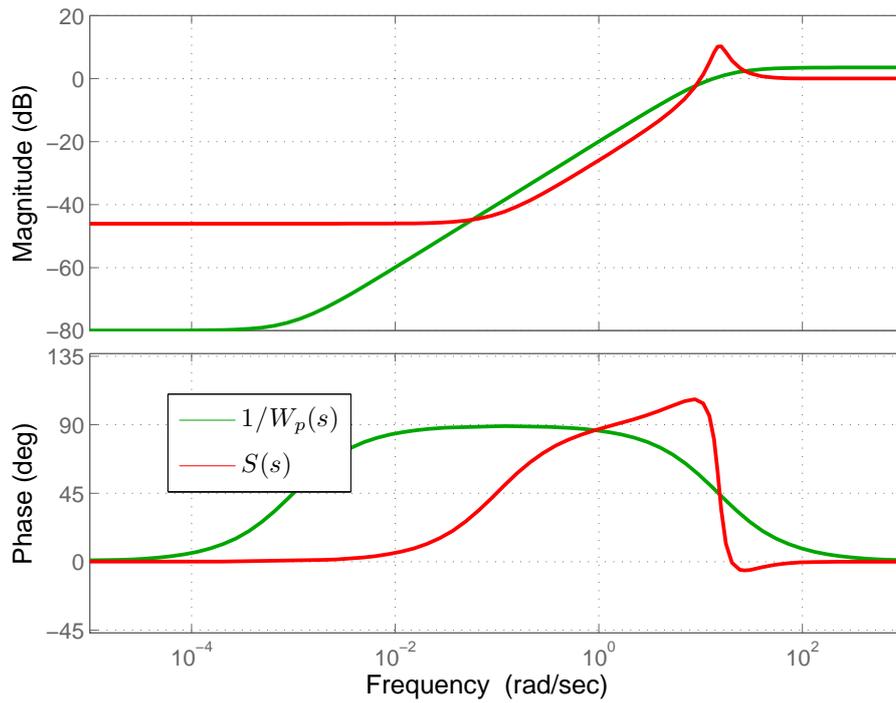


Figura 4: Diagramas de Bode de  $S(s)$  e da função peso.

Função Sensibilidade  $S(s)$

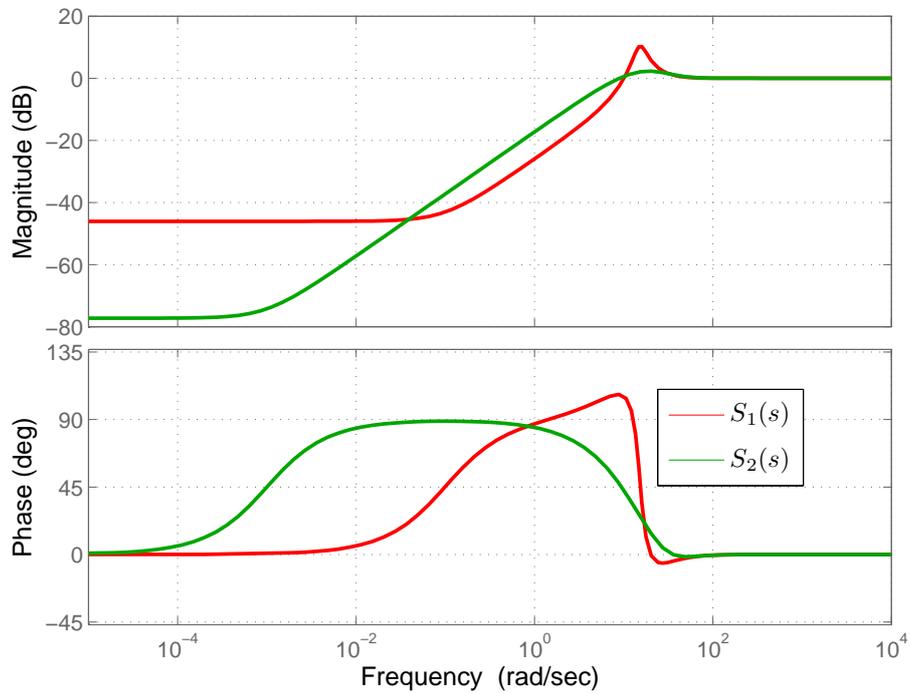


Figura 5: Diagramas de Bode das Funções Sensibilidade antiga e nova.

O Controlador projetado tem a função de transferência na equação 1. Nota-se que o controlador tem ganho alto nas baixas frequências.

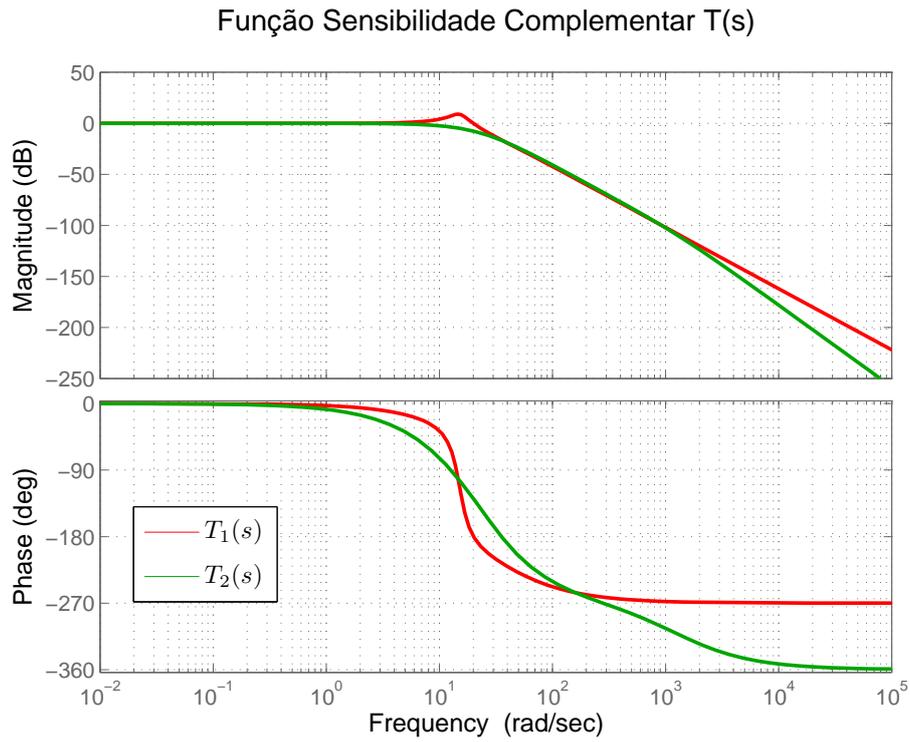


Figura 6: Diagramas de Bode de  $T(s)$  velho e novo.

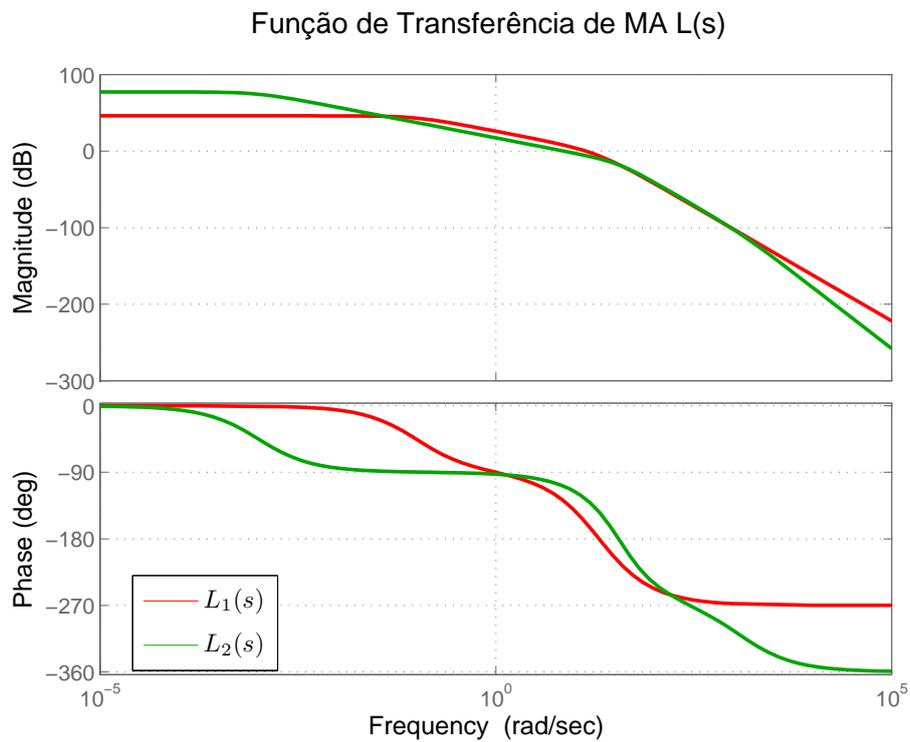


Figura 7: Diagramas de Bode de  $L(s)$  velho e novo.

$$K(s) = \frac{1569.4523(s + 20)^2(s + 0.1)}{(s + 1311)(s + 0.001)(s^2 + 58.96s + 1313)} \quad (1)$$

e os diagramas de Bode são apresentados na figura 9.

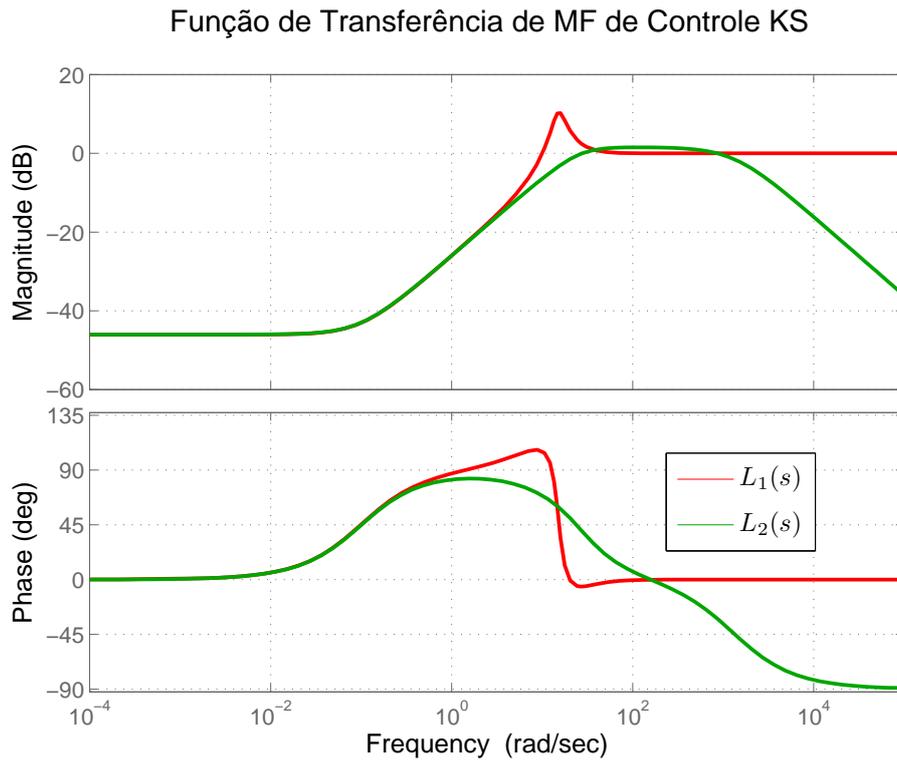


Figura 8: Diagramas de Bode de  $L(s)$  velho e novo.

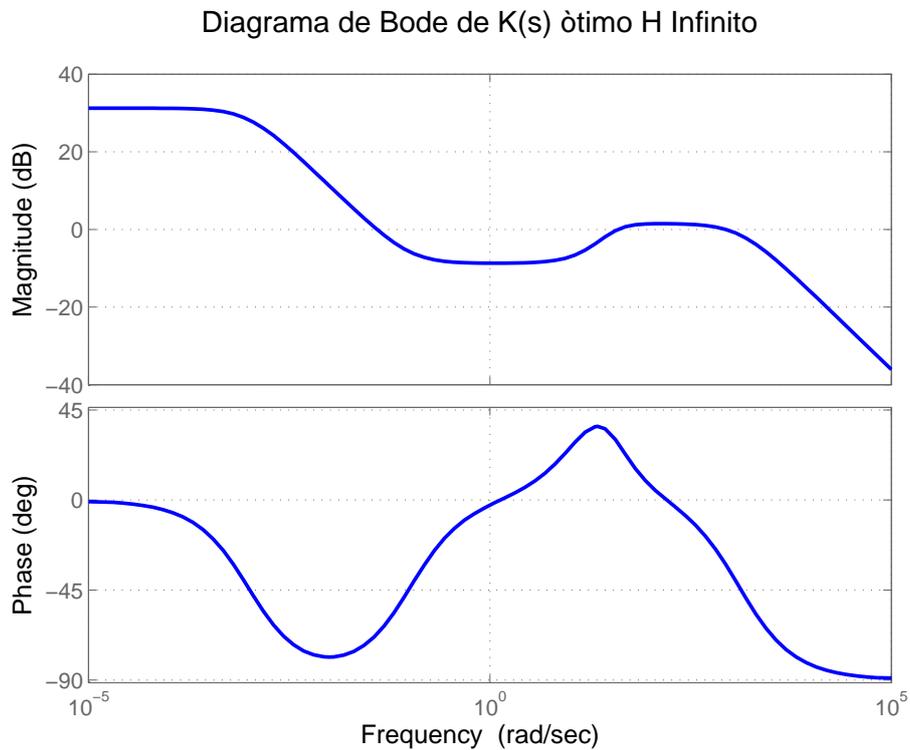


Figura 9: Diagramas de Bode de  $K(s)$ .

Na figura 10 tem-se a resposta ao degrau para o sistema antigo e o sistema novo. Nota-se que o sobressinal foi eliminado. Nota-se que o sistema ficou mais lento. Na figura 11 tem-se a resposta ao degrau de distúrbio na entrada  $d(t)$ . Nota-se que a influência é bastante reduzida,

apesar de não se estar usando integrador no controlador. Porém o ganho deste é bastante alto nas baixas. Na figura 12 tem-se o sinal de controle para a resposta ao degrau de referência.

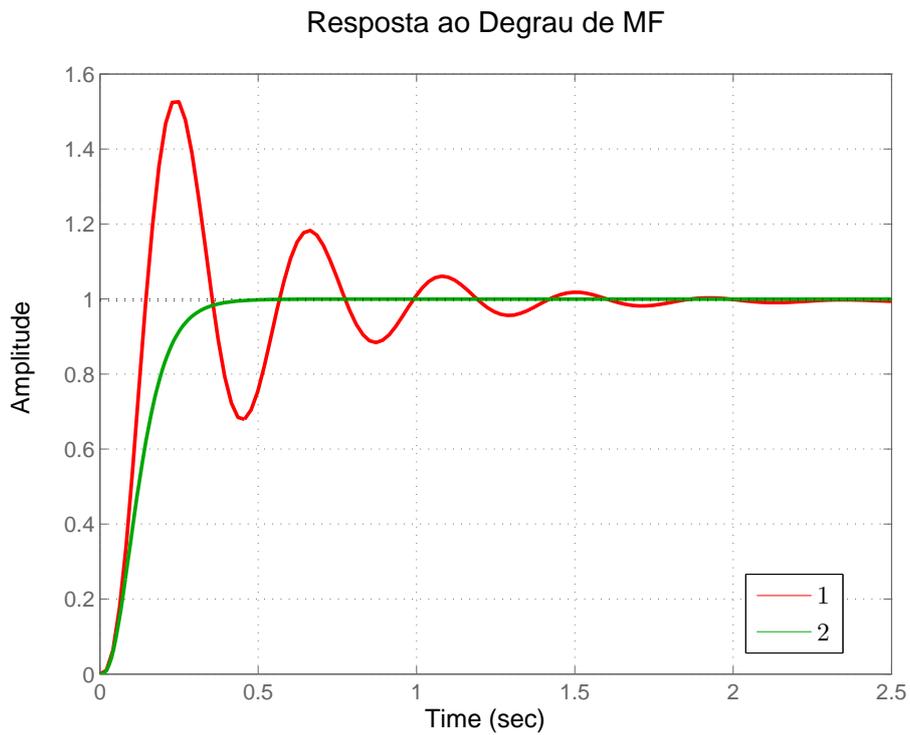


Figura 10: Resposta ao Degrau de Referência.

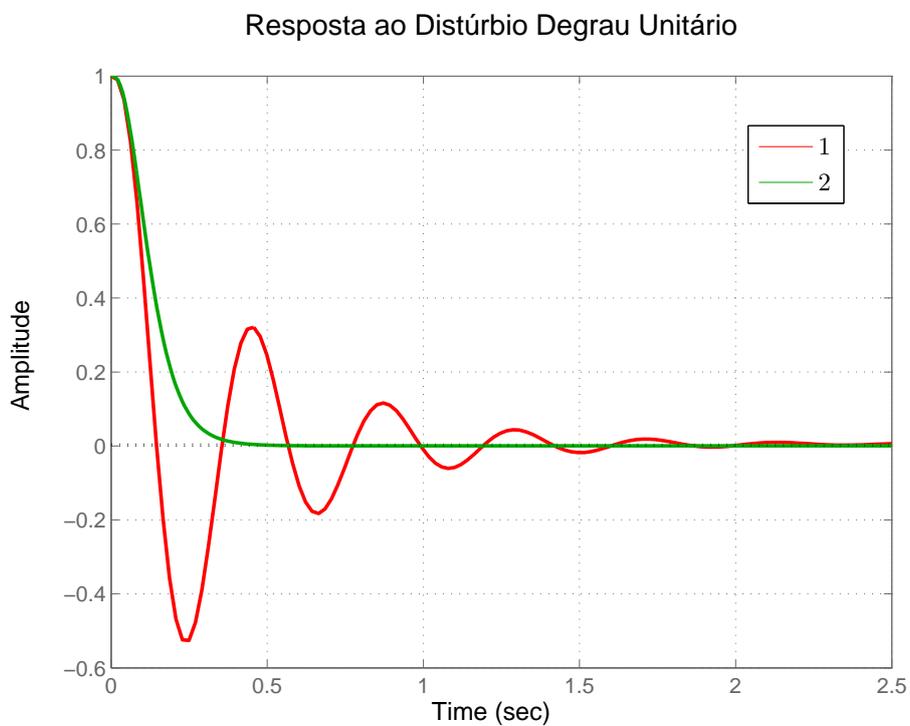


Figura 11: Resposta ao Degrau de Distúrbio.

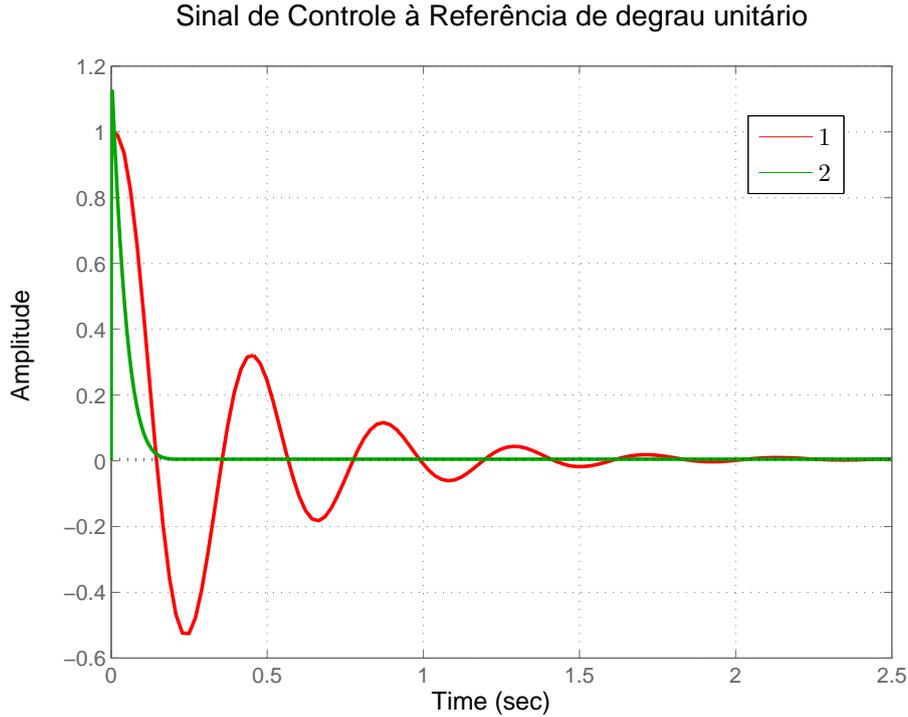


Figura 12: Sinal de Controle para Resposta ao Degrau de Referência.

### 0.3 Segundo Projeto

Queremos agora uma banda passante próxima de  $\omega_B^* = 100$ , o que vai permitir uma resposta muito mais rápida do sistema. Mantendo-se então os outros parâmetros de projeto como estavam, o que se nota é que esta banda passante não é atingida, devido ao peso excessivo que se está dando na função  $KS$  nestas condições. Neste caso, o valor de  $\gamma$  resultou em 6.0730, o que mostra que as especificações ficaram longe de serem atendidas.

Após se reduzir  $W_u$  para 0.001 e aumentar  $M$  para 3, obtivemos um projeto que tem a banda passante próxima do valor desejado. O peso do controle tinha que ser diminuído, já que uma mudança tão drástica na dinâmica do sistema exige um consumo de energia nas altas frequências bem maior do que os sistemas anteriores poderiam fornecer. Neste novo projeto, o valor de  $\gamma$  resultou em 1.0249, de modo que neste caso as especificações são bem próximas de serem atendidas.

Na figura 13, tem-se a função sensibilidade atual e a inversa da função peso  $W_P(s)$ , que guarda as especificações desejadas para o sistema em MF.

O diagrama de Bode do novo controlador é apresentado na figura 14. Nota-se que o controlador tem característica de avanço-atraso, porém há um pólo em excesso.

A expressão do controlador é:

$$K(s) = \frac{25051261.7199(s + 20)^2(s + 0.1)}{(s + 24440)(s + 0.01)(s^2 + 421.5s + 8403)}$$

Os diagramas de Nyquist logarítmicos de  $L_1(s)$  e  $L_2(s)$ , ou seja, das funções de transferência em MA para o controlador unitário e controlador sub-ótimo  $H_\infty$  são exibidos na figura 15. Nota-se que a estabilidade em MF existe em ambos os casos, porém o caso  $L_2(s)$  tem maior robustez de estabilidade, pois a distância  $|1 + L|$  é sempre maior neste caso.

As funções sensibilidade  $S_1(s)$  e  $S_2(s)$  são apresentadas na figura 16. Neste caso, tem-se que  $\|S\|_\infty = 3.52$  dB, o que atende as especificações clássicas. A banda passante fica em torno de  $\omega_B = 70$  rad/s.

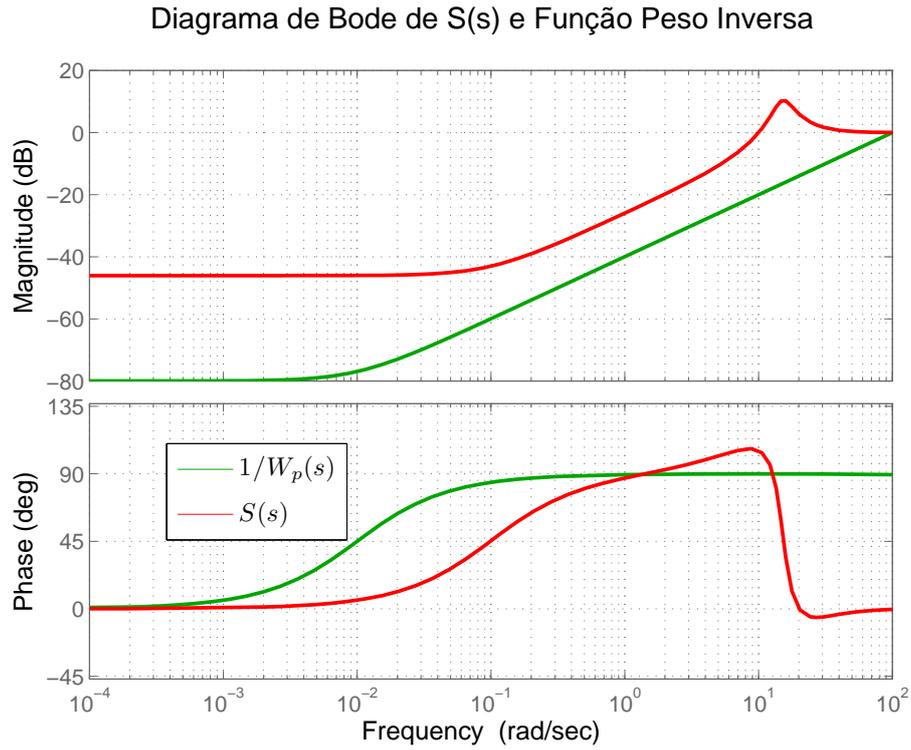


Figura 13: Função  $S_1(s)$  e Inversa da Função Peso

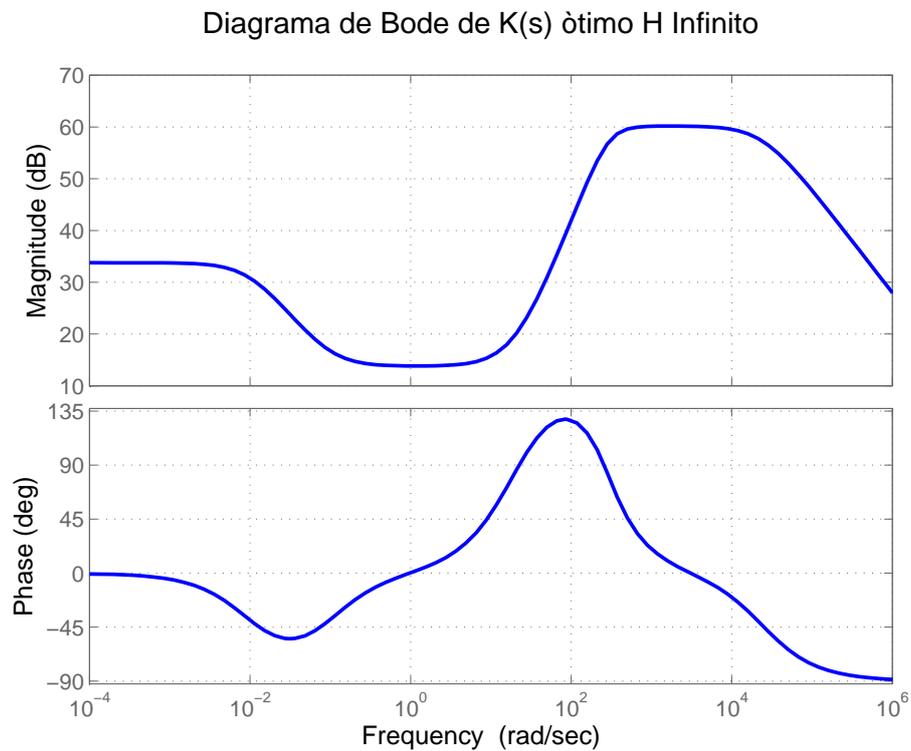


Figura 14: Diagramas de Nyquist Logarítmicos

As funções de transferência em malha aberta são apresentadas na figura 17. Para a função de transferência  $L_2(s)$  tem-se  $\omega_{180} = 287$  rad/s e a correspondente margem de ganho é  $GM = 12.5$  dB. A correspondente margem de fase é  $PM = 60.7$  graus, na frequência de cruzamento de

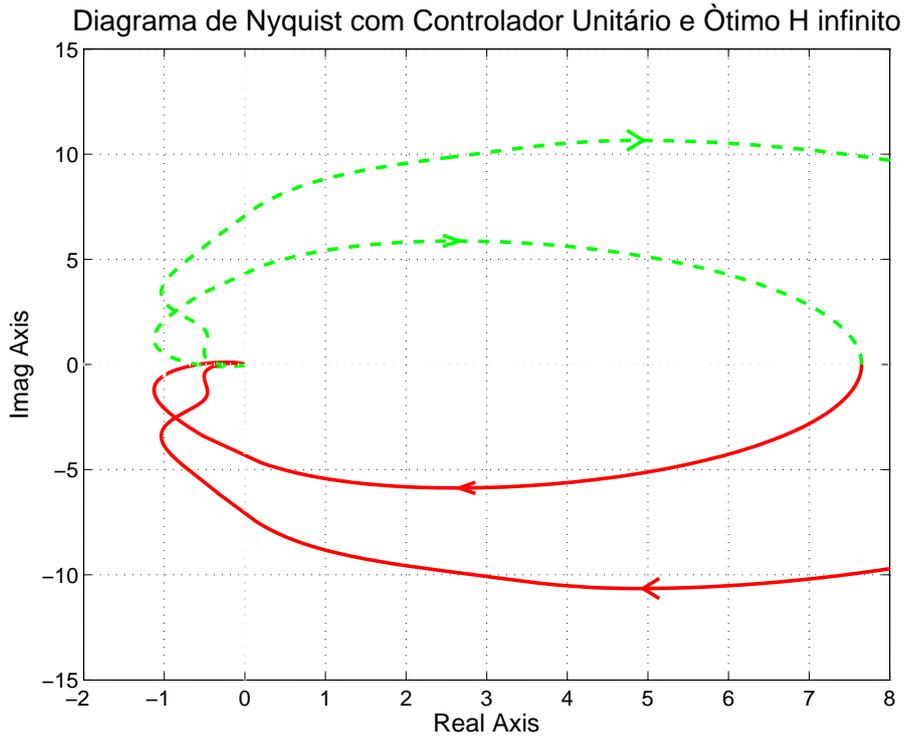


Figura 15: Função  $K(s)$

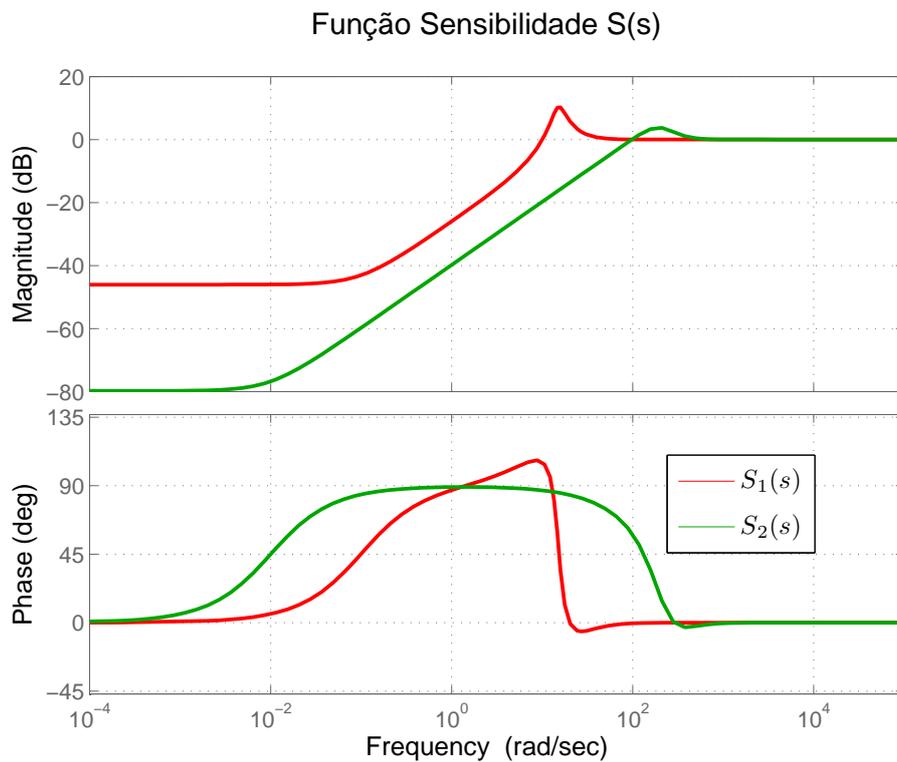


Figura 16: Funções Sensibilidade  $S_1(s)$  e  $S_2(s)$

ganho  $\omega_c = 95.2 \text{ rad/s}$ , o que representa parâmetros clássicos mais interessantes.

As funções sensibilidades complementares  $T_1(s)$  e  $T_2(s)$  são apresentadas na figura 18. No caso do controlador sub-ótimo  $H_\infty$ , tem-se que não há pico de ressonância em  $T_1(s)$ , e  $\|T\|_\infty =$

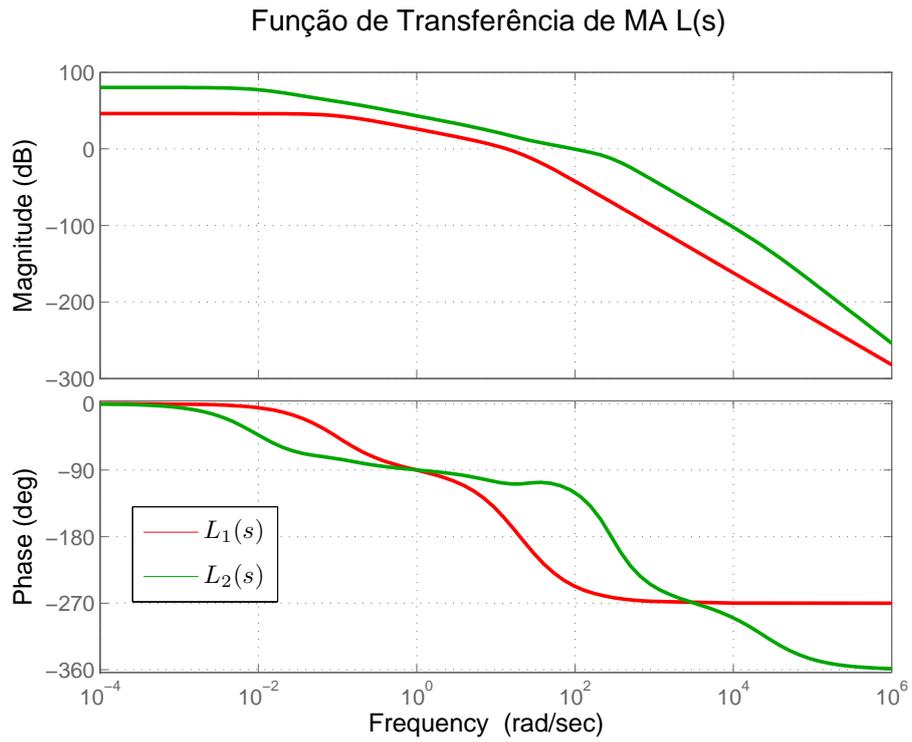


Figura 17: Função de Transferência em Malha Aberta  $L_1(s)$  e  $L_2(s)$

1 dB.

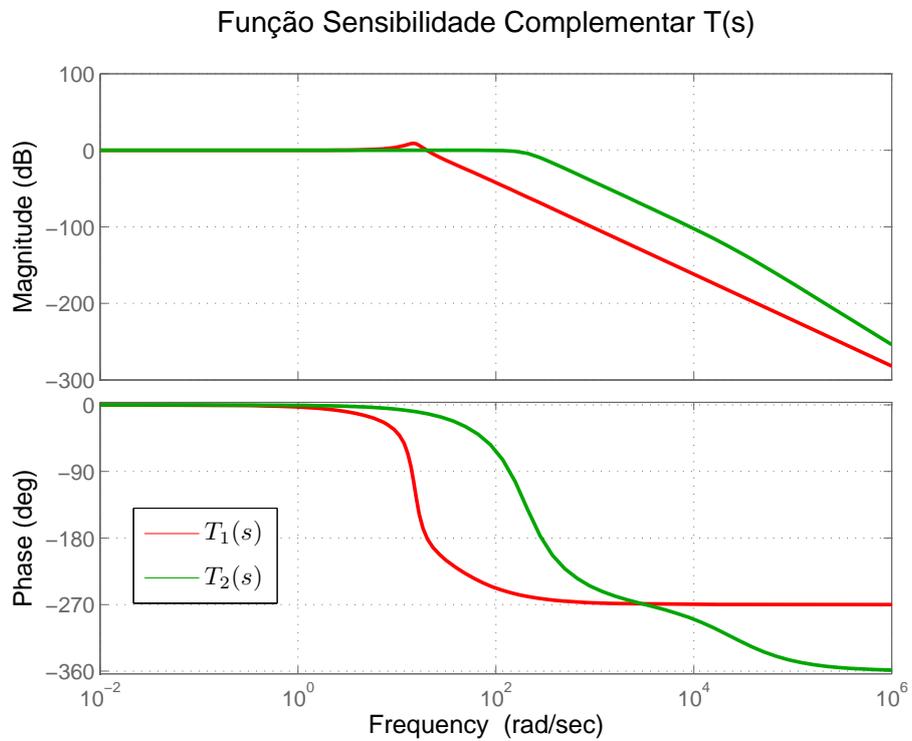


Figura 18: Funções Sensibilidade Complementar  $T_1(s)$  e  $T_2(s)$

A resposta ao degrau em Malha Fechada é apresentada na figura 19. Nota-se que para o sistema sub-ótimo  $H_\infty$  o sobressinal é bem reduzido, e o tempo de subida é bem menor que

no caso de controlador unitário. Na figura 20, tem-se a resposta ao degrau de distúrbio  $d(t)$  (lembre-se que  $G_d(s) \equiv 1$ ). Nota-se que o distúrbio é mais rapidamente atenuado no caso ótimo do que no unitário.

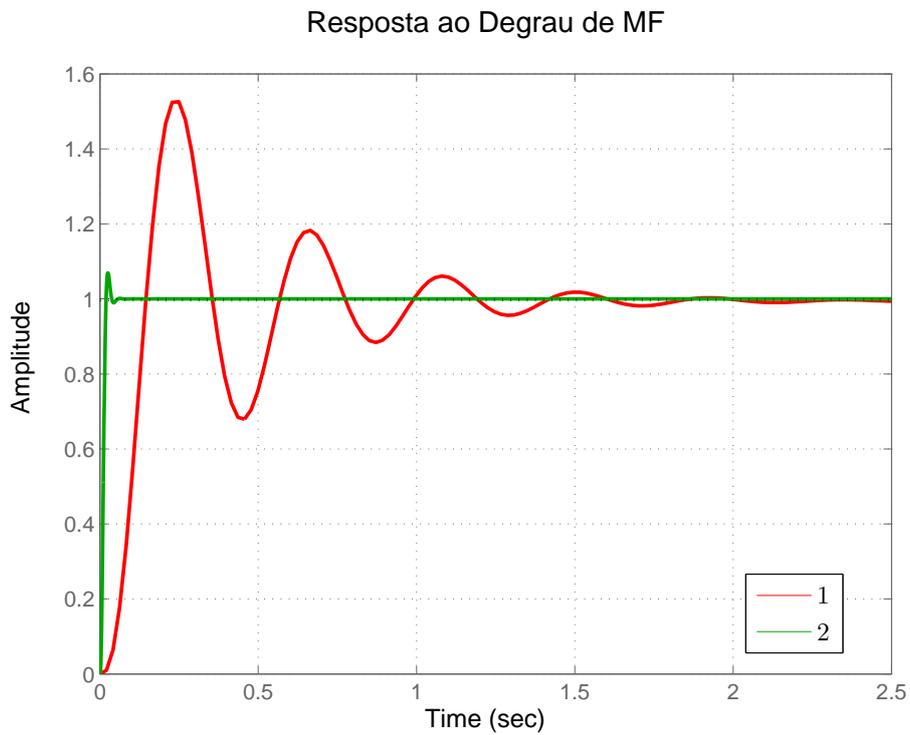


Figura 19: Resposta ao Degrau

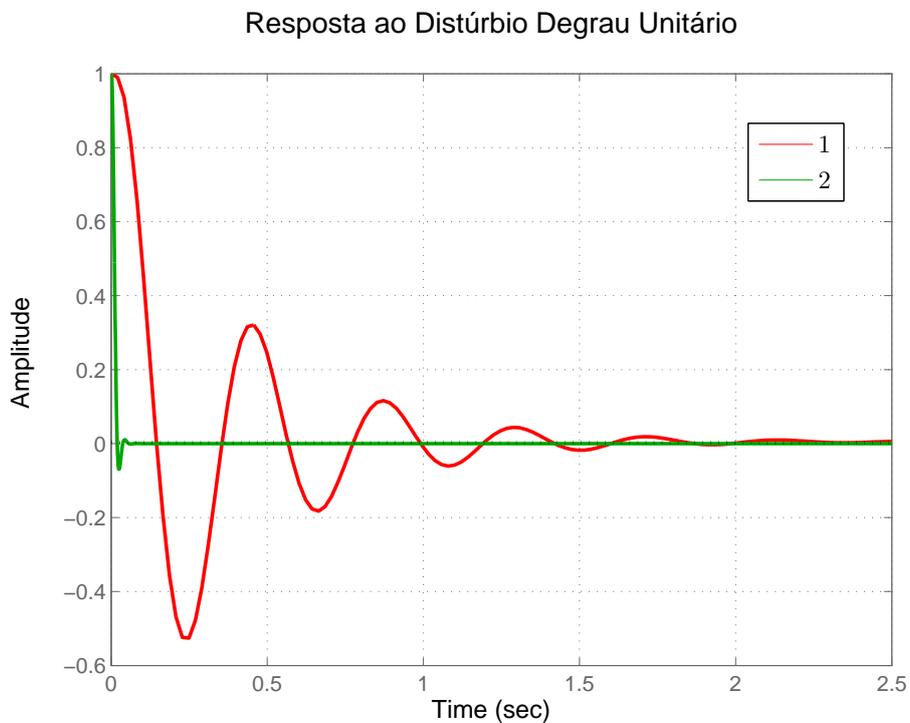


Figura 20: Resposta ao Degrau de Distúrbio

Na figura 21, tem-se o diagrama de Bode da função de transferência  $K(s)S(s)$  na figura

21. Nota-se que o ganho é maior nas faixas de frequência entre 100 rad/s e 500 rad/s, que é necessário para se gerar o sinal de controle mostrado na figura 22, que mostra o sinal de controle para o degrau nos dois casos. Nota-se que a amplitude do sinal de controle ficou muito grande no caso sub-ótimo, o que não é interessante. O valor de  $\gamma = 1.0249$ .

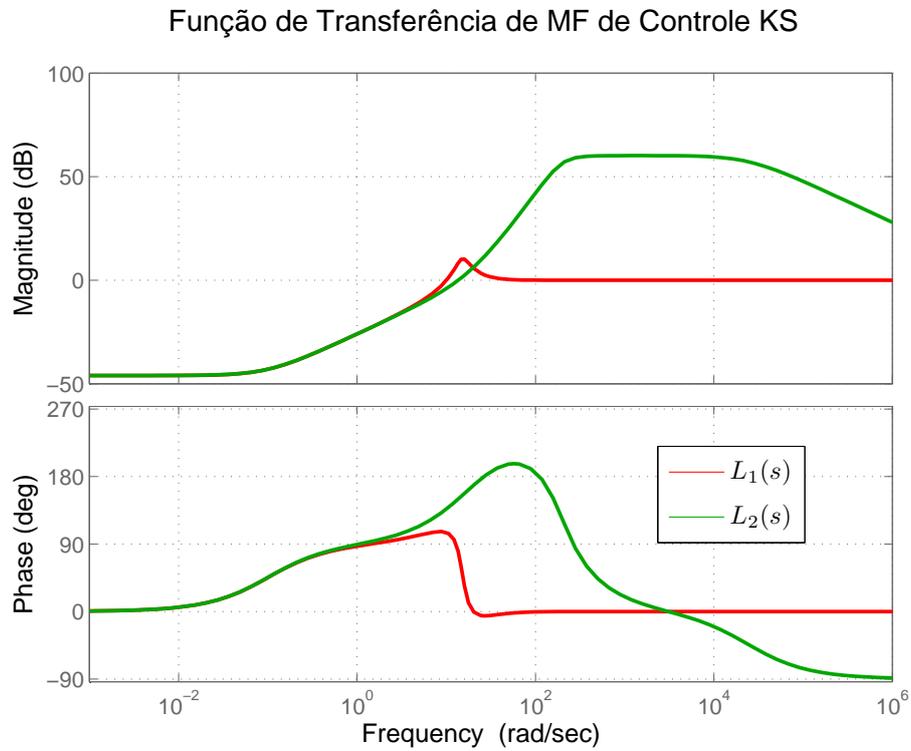


Figura 21: Funções de transferência  $K_1S_1$  e  $K_2S_2$

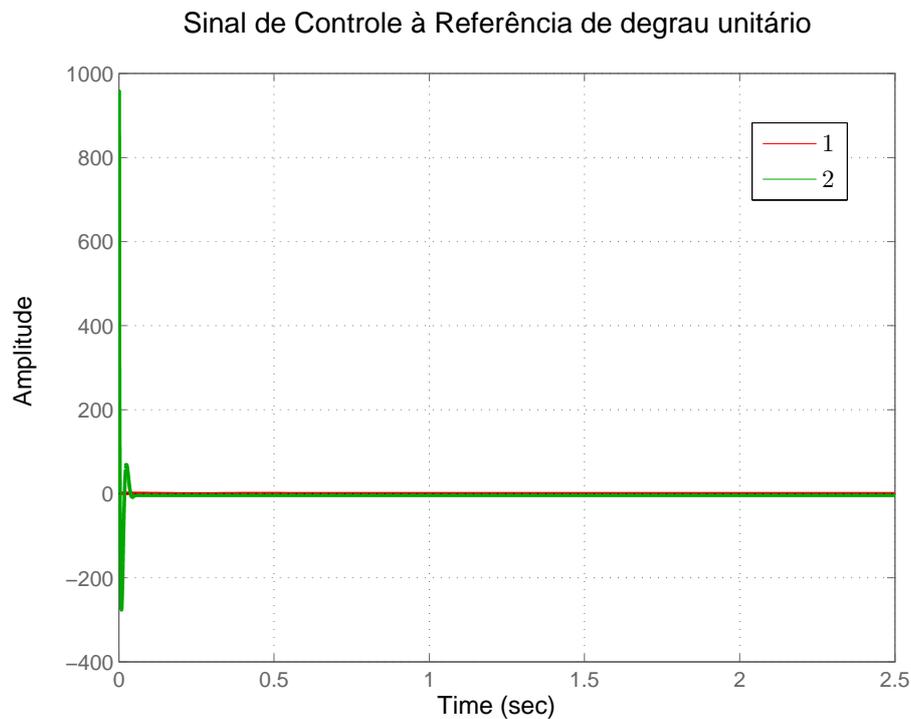


Figura 22: Sinais de Controle  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$