Mecânica dos Fluidos II (PME 2330)
Gabarito Terceira Prova - 2014

1. (**6 pontos**) Considere o escoamento não viscoso em torno de um cilindro sem circulação. Encontre:

a) A posição do ponto sobre a superfície na região frontal frontal ($\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$) onde a aceleração do fluido na direção do escoamento é máxima e seu valor, assim como a pressão nesse ponto. (2 pontos)

b) A componente radial da aceleração na superfície do cilindro. É diferente de zero? Por que? (2 pontos)

c) A posição do ponto sobre a linha de corrente que se aproxima do ponto de estagnação frontal onde a desaceleração do fluido na direção do escoamento é máxima e seu valor, assim como a pressão nesse ponto. (2 pontos)

Formulário:

Função corrente para cilindro de raio a sem circulação mais corrente uniforme, velocidades e Bernoulli:

$$\psi = U_\infty a \,\text{sen}\theta \left(\frac{r}{a} - \frac{a}{r}\right) \quad ; \quad v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad ; \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad ; \quad p + \frac{1}{2}\rho U^2 = \text{cte}$$

Aceleração da partícula: $a_r = v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} \quad ; \quad a_\theta = v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r v_\theta}{r}$

Solução:

a) O campo de velocidade resulta $\boxed{v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U_\infty \cos\theta \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \quad ; \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U_\infty \,\text{sen}\theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)}$

Na superfície do cilindro, $v_r = 0$. A aceleração tangencial resulta: $a_{\theta s} = \left(\frac{v_\theta}{a}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right)_{r=a} = 4\frac{U_\infty^2}{a}\text{sen}\theta \cos\theta$;

como a direção de escoamento é contrária ao versor $\breve{\theta}$, a aceleração na direção do escoamento $a_{\theta e}$ resulta $\boxed{a_{\theta e} = -a_{\theta s} = -4\frac{U_\infty^2}{a}\text{sen}\theta\cos\theta}$. Vemos que, para a superfície frontal $\cos\theta \leq 0$, de maneira que $a_{\theta e} \geq 0$.

Para um extremo local, deve ser $\left(\frac{\partial a_{\theta e}}{\partial \theta}\right)_{\theta=\theta_m} = -4\frac{U_\infty^2}{a}\left(\cos^2\theta_m - \text{sen}^2\theta_m\right) = -4\frac{U_\infty^2}{a}\left(1 - 2\,\text{sen}^2\theta_m\right) = 0$; daqui resulta $\boxed{\text{sen}\theta_m = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta_m = 135^0 = 3\frac{\pi}{4}}$. Vemos que $\left(\frac{\partial^2 a_{\theta s}}{\partial \theta^2}\right)_{\theta=\theta_m} = 16\frac{U_\infty^2}{a}\text{sen}\theta_m \cos\theta_m < 0$, de maneira que o extremo é um máximo local. Substituindo, resulta $\boxed{a_{\theta e} = 2\frac{U_\infty^2}{a}}$.

A velocidade no ponto vale $\boxed{V_m = v_{\theta m} = -2\frac{\sqrt{2}}{2}U_\infty = -\sqrt{2}\,U_\infty}$; por Bernoulli, resulta: $\boxed{p_m - p_\infty = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 (1-2) = -\frac{1}{2}\rho U_\infty^2}$.

b) Embora a componente radial da velocidade é zero na superfície do cilindro, a componente radial da aceleração é diferente de zero, pois a componente tangencial da velocidade está mudando o módulo e também a direção; a componente radial resulta a aceleração centrípeta. Resulta $\boxed{a_{rs} = -\frac{v_{\theta s}^2}{a} = -4\frac{U_\infty^2}{a}\text{sen}^2\theta \leq 0}$; para o ponto anterior, resulta $\boxed{a_{rm} = -2\frac{U_\infty^2}{a}}$.

c) Para a linha de corrente que se aproxima do ponto de estagnação frontal é $\theta = \pi$, $v_{\theta\pi} = 0$ e $\boxed{v_{r\pi} = -U_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)}$. A aceleração é puramente radial, resultando $a_{r\pi} = \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r}\right)_{\theta=\pi} = 2U_\infty^2 \frac{a^2}{r^3}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \geq 0$, pois $\frac{a}{r} \leq 1$; como a direção de escoamento é contrária ao versor $\breve{r}$, a aceleração na direção do escoamento a_{re} resulta $\boxed{a_{re} = -a_{r\pi} = -2\frac{U_\infty^2}{a}\frac{a^3}{r^3}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right) \leq 0}$, isto é, o fluido desacelera.

Para um extremo local, deve ser $\left(\frac{\partial a_{re}}{\partial r}\right)_{r=r_m} = 2\frac{U_\infty^2}{a^2}\left(3\frac{a^4}{r_m^4} - 5\frac{a^6}{r_m^6}\right) = 0$; daqui resulta $\boxed{\frac{a}{r_m} = \left(\frac{3}{5}\right)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad r_m = \left(\frac{5}{3}\right)^{1/2} a}$. Substituindo , resulta $\boxed{a_{re} = -\frac{12}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^{1/2}\frac{U_\infty^2}{a}}$ Vemos que $\left(\frac{\partial^2 a_{re}}{\partial r^2}\right)_{r=r_m} = 2\frac{U_\infty^2}{a\,r_m}\left[-12\left(\frac{a}{r_m}\right)^4 + 30\left(\frac{a}{r_m}\right)^6\right] = \frac{108}{25}\left(\frac{3}{5}\right)^{1/2}\frac{U_\infty^2}{a^2} > 0$, de maneira que a aceleração na direção do escoamento é um mínimo local; desta maneira, a desaceleração é um máximo local.

A velocidade no ponto vale $\boxed{v_{rm} = -U_\infty\left(1-\frac{3}{5}\right) = -\frac{2}{5}U_\infty}$; por Bernoulli, resulta: $\boxed{p_m - p_\infty = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2\left(1-\frac{4}{25}\right) = \frac{21}{25}\rho U_\infty^2}$.

2. (4 pontos) Seja um avião de peso P, área planar de asa A_p, razão de aspecto RA, voando a uma altitude em que a massa específica é ρ. Admita que todo o arrasto a toda a sustentação se devam à asa, que tem um coeficiente de arrasto de envergadura infinita $C_{D\infty}$ aproximadamente constante. Além disso, considere que haja tração (empuxo) suficiente para contrabalançar qualquer arrasto calculado.

a) Encontre uma expressão analítica para a velocidade ótima de cruzeiro V, quando a razão entre arrasto e velocidade $\frac{D}{V}$ é mínima. (2 pontos)

b) Calcule numericamente a velocidade e a mínima razão $\frac{D}{V}$ do item anterior para $P = 45\times10^3\,kgf$, $A_p = 160\,m^2$, $RA = 7$, $C_{D\infty} = 0{,}020$ e $\rho = 0{,}4661\,kg/m^3$. (0,5 pontos)

c) Supondo que P, A_p, RA, ρ e $C_{D\infty}$ permanecem constantes e que é necessário aumentar a velocidade de cruzeiro V' acima do valor ótimo calculado no item anterior de forma que $V' = kV$ ($k > 1$), calcule analítica e numéricamente a nova razão $\frac{D'}{V'}$ para $k = 1{,}3$. O que deve ser feito para aumentar a velocidade? (1,5 pontos)

Formulário: L: Força de sustentação; D:Força de arrasto; $RA = \frac{b^2}{A_p}$; $C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi\,RA}$ (arrasto induzido)

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A_p},\quad C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 A_p},\quad C_D = C_{D\infty} + C_{Di} = C_{D\infty} + \frac{C_L^2}{\pi\,RA},\quad A_p = b\,c,\quad C_L = \frac{2\pi(\alpha+\beta)}{1+2/RA},\quad \beta = 2\frac{h}{c}$$

Solução:

a) O arrasto pode ser escrito, em função da velocidade, como:

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 A_p\left(C_{D\infty} + \frac{C_L^2}{\pi\,RA}\right) = \frac{1}{2}\rho V^2 A_p\left[C_{D\infty} + \frac{1}{\pi\,RA}\left(\frac{P}{\frac{1}{2}\rho V^2 A_p}\right)^2\right] = \frac{1}{2}C_{D\infty}\,\rho\,A_p V^2 + \frac{2\,P^2}{\pi\,RA\,\rho\,A_p}\frac{1}{V^2}$$

A razão entre arrasto e velocidade resulta, então: $\frac{D}{V} = \frac{1}{2} C_{D\infty}\,\rho\, A_p V + \frac{2P^2}{\pi\, RA\,\rho\, A_p} \frac{1}{V^3}$

Na condição de extremo local, deve ser $\frac{\partial \left(D/V \right)}{\partial V} = \frac{1}{2} C_{D\infty}\,\rho\, A_p - \frac{6P^2}{\pi\, RA\,\rho\, A_p} \frac{1}{V^4} = 0$

Daqui, resulta $\boxed{V = \left(\frac{12 P^2}{\pi\, RA\,\rho^2\, A_p^2\, C_{D\infty}} \right)^{1/4}}$. Como $\frac{\partial^2 \left(D/V \right)}{\partial V^2} = \frac{24 P^2}{\pi\, RA\,\rho\, A_p} \frac{1}{V^5} > 0$, o extremo é um mínimo.

b) Para os dados, resultam $\boxed{V = \left(\frac{12 \times \left(45\times 10^3 \times 9{,}8 \right)^2}{\pi \times 7 \times 0{,}4661^2 \times 160^2 \times 0{,}020} \right)^{1/4} m/s = 175{,}75\, m/s}$,

$$\boxed{\frac{D}{V} = \left(\frac{1}{2} \times 0{,}020 \times 0{,}4661 \times 160 \times 175{,}75 + \frac{2 \times \left(45\times 10^3 \times 9{,}8 \right)^2}{\pi \times 7 \times 0{,}4661 \times 160} \times \frac{1}{175{,}75^3} \right) N \left(\frac{m}{s} \right)^{-1} = 174{,}76\, N \left(\frac{m}{s} \right)^{-1}}$$

c) Para a nova velocidade, resulta $\boxed{\frac{D'}{V'} = \frac{1}{2} C_{D\infty}\,\rho\, A_p\, k V + \frac{2P^2}{\pi\, k^3 RA\,\rho\, A_p} \frac{1}{V^3}}$; calculando numericamente, temos

$$\boxed{\frac{D}{V} = \left(\frac{1}{2} \times 0{,}020 \times 0{,}4661 \times 160 \times 1{,}3 \times 175{,}75 + \frac{2 \times \left(45\times 10^3 \times 9{,}8 \right)^2}{\pi \times 1{,}3^3 \times 7 \times 0{,}4661 \times 160} \times \frac{1}{175{,}75^3} \right) N \left(\frac{m}{s} \right)^{-1} = 190{,}27\, N \left(\frac{m}{s} \right)^{-1}}$$

Como $C_L' = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho V'^2 A_p} = \frac{C_L}{k^2}$ diminui devido ao aumento da velocidade, devemos diminuir o ângulo de ataque e/ou a cambagem.