Teoria de aerofólios

J. L. Baliño

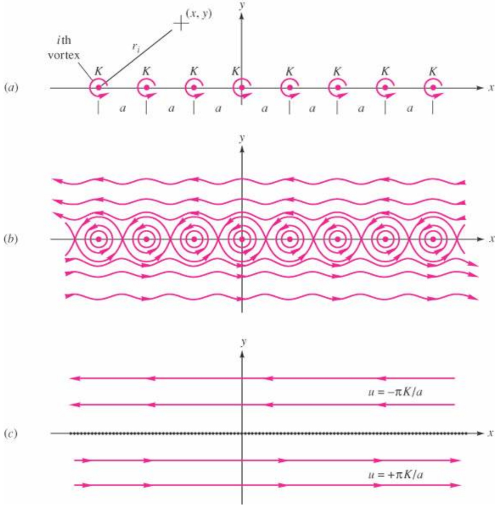
Escola Politécnica - Universidade de São Paulo

Apostila de aula

2017, v.1

Sumário

Linha infinita e lámina de vórtices



Linha infinita e lámina de vórtices

$$F(z) = -i\,K \left\{ \ln z + \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left[(z + k\,a)\,(z - k\,a)\right] \right\}$$

A função corrente resulta na configuração "olho de gato" (*cat´s eye*):

$$\psi = -\pi\,K \ln\left\{ \frac{1}{2} \left[\cosh\left(\frac{2\,\pi\,y}{a}\right) - \cos\left(\frac{2\,\pi\,x}{a}\right) \right] \right\}$$

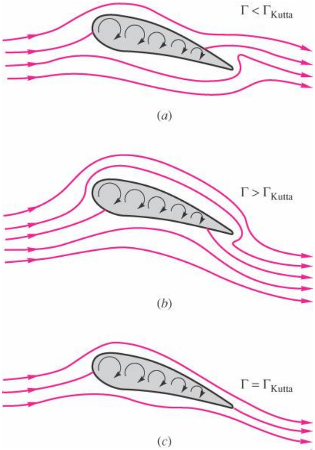
Para $|y| \gg a$, $u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \to \pm \frac{\pi\,K}{a}$.
Uma distribuição contínua pode ser definida fazendo a e K tender a zero mantendo finito $\gamma = \frac{2\,\pi\,K}{a}$; neste caso, a série de vórtices se densifica formando uma lámina de vórtices. O elemento de circulação em uma curva fechada que envolva um comprimento dx resulta:

$$d\Gamma = u_u\,(-dx) + u_l\,dx = (-u_u + u_l)\,dx = \frac{2\,\pi\,K}{a}\,dx = \gamma\,dx \;\Rightarrow\; \gamma = \frac{d\Gamma}{dx}$$

Uma lámina de vórtices $\gamma\,(x)$ pode simular um aerofólio delgado.

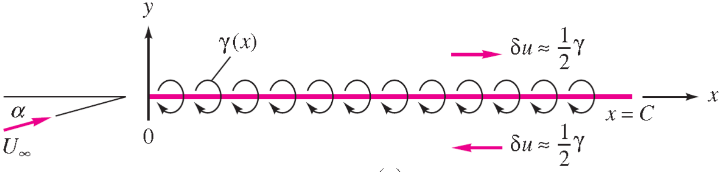
Condição de Kutta

O problema fundamental da teoria de aerofólios é determinar a circulação Γ em função da geometria e do ângulo de ataque α.



Teoria de lámina plana de vórtices

Aproximamos o aerofólio esbelto sem cambagem por uma lámina de vórtices de distribuição $\gamma\,(x)$ $(0 \leq x \leq C)$. A corrente livre U_∞ é acrescentada com um ângulo α. Consideramos circulação horária como positiva.



(a)

O salto na velocidade entre a superfície superior (u, *upper*) e inferior (l, *lower*) resulta $\delta u_u - \delta u_l = 2\,\delta u = \gamma\,(x)$. Para que não exista salto no borde de fuga (escoamento de saída suave) deve ser $\gamma\,(C) = 0$. Uma vez obtida $\gamma\,(x)$, a sustentação resulta:

$$\mathcal{L} = \rho\, U_\infty\, b\, \Gamma \;;\; \Gamma = \int_0^C \gamma\,(x)\, dx$$

Teoria de lámina plana de vórtices

Outra metodologia: através do cálculo da força de pressão.

$$c_{p\,u,\,l} = \frac{p_{u,\,l} - p_\infty}{\frac{1}{2}\,\rho\,U_\infty^2} = 1 - \frac{U_{u,\,l}^2}{U_\infty^2}$$

$$U_{u,\,l}^2 = (U_\infty\,\cos\alpha \pm \delta u)^2 + (U_\infty\,\sin\alpha)^2 \cong U_\infty^2\left(1 \pm 2\,\frac{\delta u}{U_\infty}\right) \quad (\delta u \ll U_\infty)$$

$$c_{p\,u,\,l} \cong \mp 2\,\frac{\delta u}{U_\infty} = \mp\frac{\gamma}{U_\infty} \;\Rightarrow\; c_{p\,l} - c_{p\,u} \cong 2\,\frac{\gamma}{U_\infty}$$

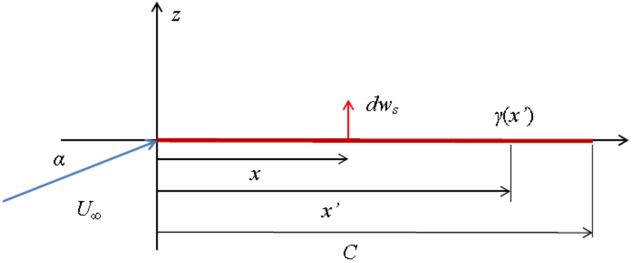
$$\mathcal{L} = \int_0^C (p_l - p_u)\,b\,dx = \frac{1}{2}\,\rho\,U_\infty^2\,b\int_0^C 2\,\frac{\gamma}{U_\infty}\,dx = \rho\,U_\infty\,b\,\Gamma$$

O coeficiente de sustentação resulta:

$$C_L = \frac{\mathcal{L}}{\frac{1}{2}\,\rho\,U_\infty^2\,b\,C} = \int_0^1 2\,\frac{\gamma}{U_\infty}\,d\left(\frac{x}{C}\right)$$

Teoria de lámina plana de vórtices

A distribuição é obtida da condição de que a velocidade resultante normal à placa deve ser nula.



Elemento de velocidade induzida dw_s em x pelo elemento de vórtice em x':

$$dw_s\left(x,\, x'\right) = \frac{d\Gamma\left(x'\right)}{2\,\pi\left(x'-x\right)} = \frac{\gamma\left(x'\right)dx'}{2\,\pi\left(x'-x\right)} \Rightarrow w_s\left(x\right) = \frac{1}{2\,\pi}\int_0^C \frac{\gamma\left(x'\right)}{x'-x}\,dx'$$

Teoria de lámina plana de vórtices

Deve ser:

$$w_s + U_\infty \, \sin\alpha = 0 \;\Rightarrow\; 2\,\pi\,U_\infty \, \sin\alpha = -\int_0^C \frac{\gamma\,(x')}{x'-x}\,dx'$$

A equação integral anterior é satisfeita para

$$\gamma\,(x') = 2\,U_\infty \left(\frac{C}{x'} - 1\right)^{1/2} \sin\alpha$$

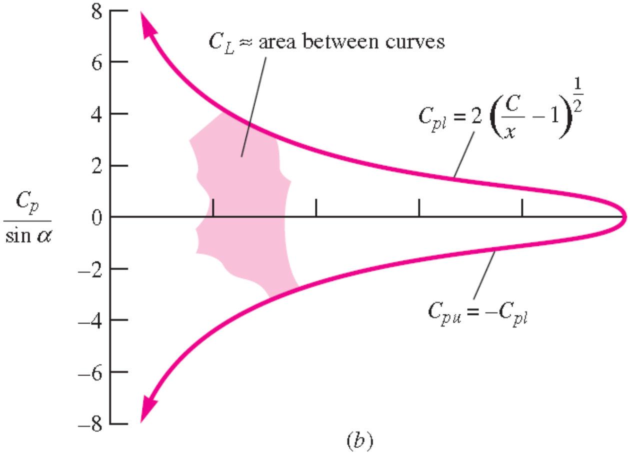
pois $\int_0^C \frac{\left(\frac{C}{x'}-1\right)^{1/2}}{x'-x}\,dx' = -\pi$. Assim, resultam:

$$c_{p\,u,\,l} \cong \mp\frac{\gamma}{U_\infty} = \mp 2\left(\frac{C}{x'} - 1\right)^{1/2} \sin\alpha$$

$$C_L = \int_0^1 2\,\frac{\gamma}{U_\infty}\,d\left(\frac{x}{C}\right) = 4\,\sin\alpha \int_0^1 \left(\frac{1}{x^*} - 1\right)^{1/2} dx^* = 4\,\frac{\pi}{2}\,\sin\alpha = 2\,\pi\,\sin\alpha$$

$$C_L = 2\,\pi\,\sin\alpha$$

Teoria de lámina plana de vórtices



Teoria de lámina plana de vórtices

Momento da força de pressão ao redor do borde de ataque ($x = 0$) M_0 e coeficiente de momento (positivo quando antihorário) C_{M_0}:

$$M_0 = \int_0^C (p_l - p_u)\, b\, x\, dx = \frac{1}{2}\, \rho\, U_\infty^2\, b\, C^2 \int_0^C (c_{p\,l} - c_{p\,u})\, \frac{x}{C}\, d\left(\frac{x}{C}\right)$$

$$C_{M_0} = \frac{M_0}{\frac{1}{2}\, \rho\, U_\infty^2\, b\, C^2} = \int_0^C (c_{p\,l} - c_{p\,u})\, \frac{x}{C}\, d\left(\frac{x}{C}\right)$$

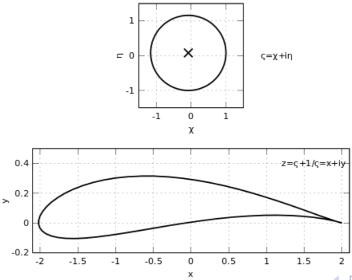
$$= 4\, \sin\alpha \int_0^1 \left(\frac{1}{x^*} - 1\right)^{1/2} x^*\, dx^* = 4\, \frac{\pi}{8} \sin\alpha = \frac{\pi}{2} \sin\alpha = \frac{1}{4}\, C_L$$

Em consequência, o centro de pressão está localizado em $\left(\frac{x}{C}\right)_{CP} = \frac{1}{4}$ e independe do ângulo de ataque.

Aerofólios espessos com cambagem

A teoria está baseada em uma transformação conforme em variável complexa, que leva um cilindro com circulação em uma corrente uniforme no plano ζ ao perfil do aerofólio no plano z. A circulação no cilindro é ajustada de maneira que se satisfaça a condição de Kutta (saída suave). Um exemplo é a transformação de Joukowsky:

$$z = \zeta + \frac{1}{\zeta} \; ; \; z = x + i\,y \; ; \; \zeta = \chi + i\,\eta$$



Aerofólios espessos com cambagem

A circulação para satisfazer a condição de Kutta resulta:

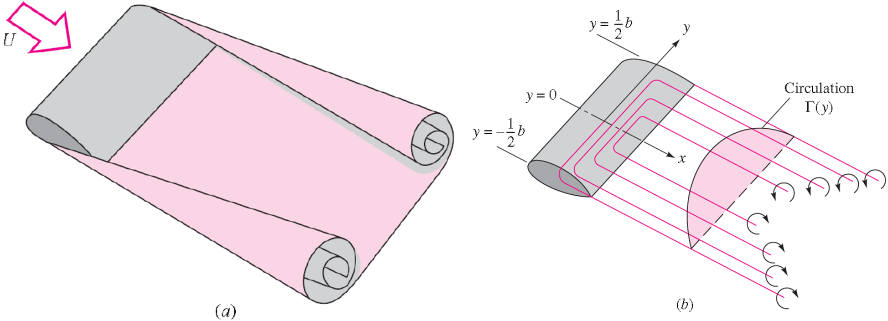
$$\Gamma_{Kutta} = \pi\, C\, U_\infty \left(1 + 0.77\,\frac{t}{C}\right) \sin\left(\alpha + \beta\right) \;;\; \beta = \tan^{-1}\left(2\,\frac{h}{C}\right)$$

$$C_L = \frac{\rho\, U_\infty\, \Gamma_{Kutta}}{\frac{1}{2}\,\rho\, U_\infty^2\, C} = 2\,\pi\,\left(1 + 0.77\,\frac{t}{C}\right) \sin\left(\alpha + \beta\right)$$

C_L é independente da forma exata do aerofólio. O fator $0.77\,\frac{t}{C}$ não se verifica experimentalmente, devido aos efeitos de camada limite, que muda o perfil efetivo do aerofólio. Desta maneira, a expressão aceita é:

$$C_L = 2\,\pi\, \sin\left(\alpha + \beta\right)$$

Introdução



Introdução

Experimentalmente se verifica que C_L e C_D dependem de AR e A_p, mas são pouco sensíveis à forma da asa.

A distribuição de vorticidade muda devido à terminação abrupta do aerofólio, constituindo uma estrutura tridimensional.

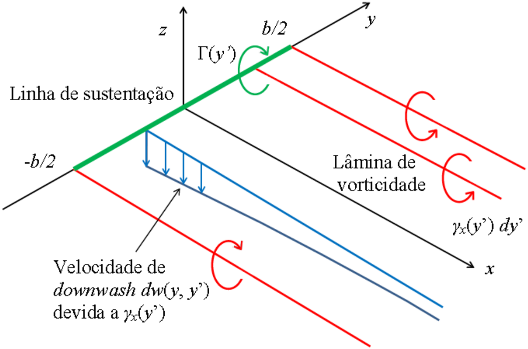
Como o campo de vorticidade é solenoidal ($\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$), as linhas de vorticidade não podem terminar no fluido: extendem-se ate $\pm\infty$ (aerofólios infinitos bidimensionais) ou formam linhas fechadas (em aerofólios de envergadura finita, fecham-se no vórtice de arranque).

Existe uma distribuição de vórtices de saída (*trailing vortex*); os vórtice mais fortes saem dos extremos da asa.

A circulação efetiva $\Gamma(y)$ é máxima para $y = 0$ e nula para $y = \pm\frac{1}{2}b$.

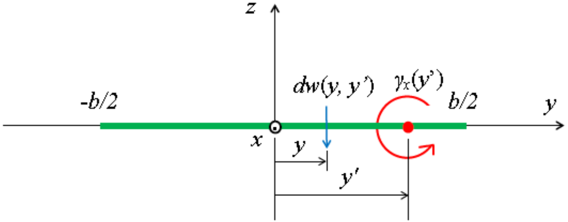
Teoria de linha de sustentação de Lanchester-Prandtl

Frederick W. Lanchester (1907) e Ludwig Prandtl (1918) modelaram o escoamento substituindo o aerofólio finito por uma linha de sustentação (*lifting line*) e uma lâmina de vórtices de distribuição $\gamma_x\,(y)$.



Para manter o fluxo de vorticidade, deve ser $\gamma_x\,(y) = -\dfrac{d\Gamma\,(y)}{dy}$.

Velocidade de *downwash*



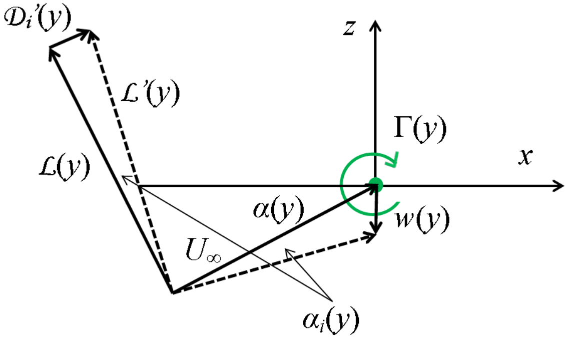
Supondo uma distribuição semi-infinita de $\gamma_x\left(y'\right)$ o elemento de velocidade dw em y induzida pelo elemento de lâmina de vórtice em y' resulta:

$$dw\left(y,\,y'\right)=\frac{\gamma_x\left(y'\right)dy'}{4\,\pi\left(y'-y\right)}\quad (4\,\pi \text{ pois a linha é semi-infinita})$$

$$w\left(y\right)=\frac{1}{4\,\pi}\int_{-b/2}^{b/2}\frac{\gamma_x\left(y'\right)dy'}{y'-y}\,dy'=\frac{1}{4\,\pi}\int_{-b/2}^{b/2}\frac{\Gamma'\left(y'\right)dy'}{y-y'}\,dy'$$

onde $\gamma_x=-\frac{d\Gamma}{dy}=-\Gamma'$.

Arrasto induzido e sustentação locais



A corrente livre U_∞ é defletida para abaixo localmente pela velocidade de *downwash*, reduzindo o ângulo de ataque geométrico a un ângulo de ataque efetivo:

$$\alpha_{eff}(y) = \alpha(y) - \alpha_i(y) \;\; ; \;\; \alpha_i(y) \simeq \tan^{-1}\left[\frac{w(y)}{U_\infty}\right] \simeq \frac{w(y)}{U_\infty}$$

Arrasto induzido e sustentação locais

A sustentação local por unidade de comprimento na direção y resulta, considerando ângulos $\alpha_i\,(y)$ pequenos:

$$\mathcal{L}\,(y) = \mathcal{L}'\,(y) = \rho\, U_\infty\, \Gamma\,(y)$$

Este efeito gera um arrasto na direção da corrente livre (arrasto induzido) por unidade de comprimento na direção y $\mathcal{D}_i'$:

$$\mathcal{D}_i'\,(y) \simeq \rho\, U_\infty\, \Gamma\,(y)\, \alpha_i\,(y) = \rho\, w\,(y)\; \Gamma\,(y)$$

Considerando válida localmente a relação de sustentação de aerofólio infinito para o ângulo de ataque efetivo, resulta:

$$C_L\,(y) = \frac{\mathcal{L}\,(y)}{\frac{1}{2}\,\rho\, U_\infty^2\, C\,(y)} = \frac{\rho\, U_\infty\, \Gamma\,(y)}{\frac{1}{2}\,\rho\, U_\infty^2\, C\,(y)} = \frac{\Gamma\,(y)}{\frac{1}{2}\, U_\infty\, C\,(y)}$$

$$\simeq 2\,\pi\, \left[\alpha_{eff}\,(y) + \beta\,(y)\right] = 2\,\pi\, \left[\alpha\,(y) + \beta\,(y) - \alpha_i\,(y)\right]$$

$$\Rightarrow \Gamma\,(y) = \pi\, U_\infty\, C\,(y) \left[\alpha\,(y) + \beta\,(y) - \frac{1}{4\,\pi\, U_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{\Gamma'\,(y')}{y - y'}\, dy'\right]$$

Arrasto induzido e sustentação locais

Conhecidos $\alpha\,(y)$, $\beta\,(y)$ e $C\,(y)$ de dados de aerofólios bidimensionais, resulta uma equação integro-diferencial para $\Gamma\,(y)$, com as condições de contorno $\Gamma\left(-\frac{b}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{b}{2}\right) = 0$. Uma vez resolvida, a sustentação e o arrasto induzido resultam:

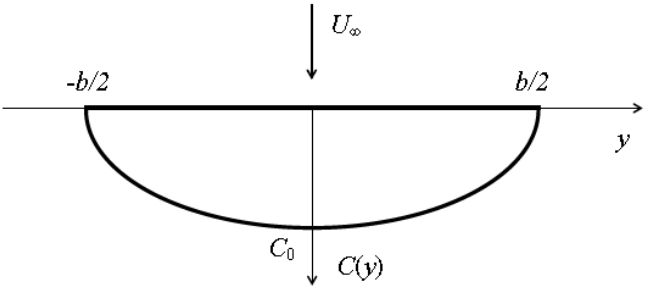
$$\mathcal{L} = \int_{-b/2}^{b/2} \mathcal{L}\,(y)\; dy = \rho\, U_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma\,(y)\; dy$$

$$\mathcal{D}_i = \int_{-b/2}^{b/2} \mathcal{D}_i'\,(y)\; dy = \rho\, U_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma\,(y)\; \alpha_i\,(y)\; dy$$

Solução para perfil elíptico

Uma solução simples pode ser obtida para uma asa plana de forma elíptica, com ângulos constantes $\alpha(y) = \alpha$, $\beta(y) = \beta$ e corda definida por:

$$C(y) = C_0 \left[1 - \left(\frac{y}{b/2} \right)^2 \right]^{1/2} \Rightarrow \left[\frac{C(y)}{C_0} \right]^2 + \left(\frac{y}{b/2} \right)^2 = 1$$



Solução para perfil elíptico

Parâmetros deste perfil são:

$$A_p = \int_{-b/2}^{b/2} C\left(y\right) dy = C_0 \int_{-b/2}^{b/2} \left[1 - \left(\frac{y}{b/2}\right)^2\right]^{1/2} dy$$

$$= C_0 \, \frac{b}{2} \int_{-1}^{1} \left[1 - y^{*2}\right]^{1/2} dy^* = C_0 \, \frac{b}{2} \, \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \, C_0 \, b$$

$$\overline{C} = \frac{A_p}{b} = \frac{\pi}{4} \, C_0 \quad ; \quad AR = \frac{b}{\overline{C}} = \frac{4\,b}{\pi\, C_0}$$

A solução $\Gamma\left(y\right)$ tem a mesma forma funcional que a asa e resulta:

$$\Gamma\left(y\right) = \Gamma_0 \left[1 - \left(\frac{y}{b/2}\right)^2\right]$$

onde o parâmetro Γ_0 deve ser obtido da equação integro-diferencial.

Solução para perfil elíptico

$$\frac{d\Gamma}{dy} = -\frac{\Gamma_0}{b/2}\,\frac{y}{b/2}\left[1-\left(\frac{y}{b/2}\right)^2\right]^{-1/2}$$

$$\int_{-b/2}^{b/2} \frac{\Gamma'\left(y'\right)}{y-y'}dy' = -\frac{\Gamma_0}{b/2}\int_{-b/2}^{b/2} \frac{\frac{y'}{b/2}\left[1-\left(\frac{y'}{b/2}\right)^2\right]^{-1/2}}{y-y'}\,dy'$$

Fazendo $y' = b/2\,\cos\theta$ e $y = b/2\,\cos\theta_0$, resulta:

$$\int_{-b/2}^{b/2} \frac{\Gamma'\left(y'\right)}{y-y'}dy' = -\frac{\Gamma_0}{b/2}\int_{\pi}^{0} \frac{\cos\theta\left(1-\cos^2\theta\right)^{-1/2}}{\cos\theta_0-\cos\theta}\,\left(-\sin\theta\right)d\theta$$

$$= \frac{\Gamma_0}{b/2}\int_{\pi}^{0} \frac{\cos\theta}{\cos\theta_0-\cos\theta}\,d\theta = \frac{\Gamma_0}{b/2}\int_{0}^{\pi} \frac{\cos\theta}{\cos\theta-\cos\theta_0}\,d\theta = \frac{\Gamma_0}{b/2}\,\pi = \frac{2\,\pi\,\Gamma_0}{b}$$

Solução para perfil elíptico

Substituindo na equação integro-diferencial:

$$\Gamma_0 \left[1 - \left(\frac{y}{b/2}\right)^2\right]^{1/2} = \pi\, C_0 \left[1 - \left(\frac{y}{b/2}\right)^2\right]^{1/2} U_\infty \left(\alpha + \beta - \frac{1}{4\,\pi\, U_\infty} \frac{2\,\pi\,\Gamma_0}{b}\right)$$

$$\Gamma_0 = \pi\, C_0\, U_\infty\, (\alpha + \beta) - \frac{\pi\, C_0}{2\, b}\, \Gamma_0$$

$$\Gamma_0 \left(1 + \frac{\pi\, C_0}{2\, b}\right) = \pi\, C_0\, U_\infty\, (\alpha + \beta)$$

Como $\frac{\pi\, C_0}{2\, b} = \frac{2}{AR}$, resulta finalmente:

$$\Gamma_0 = \frac{\pi\, C_0\, U_\infty\, (\alpha + \beta)}{1 + \frac{2}{AR}}$$

Solução para perfil elíptico

Sustentação:

$$\mathcal{L} = \rho\, U_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma\,(y')\, dy' = \rho\, U_\infty\, \Gamma_0 \int_{-b/2}^{b/2} \left[1 - \left(\frac{y'}{b/2}\right)^2\right]^{1/2} dy'$$

$$= \rho\, U_\infty\, \Gamma_0\, \frac{b}{2} \int_{-1}^{1} \left(1 - y^{*2}\right)^{1/2} dy^* = \rho\, U_\infty\, \Gamma_0\, \frac{b}{2}\, \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}\, \pi\, b\, \rho\, U_\infty\, \Gamma_0$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\, \pi\, b\, \rho\, U_\infty\, \frac{\pi\, C_0\, U_\infty\, (\alpha + \beta)}{1 + \frac{2}{AR}} = 2\, \pi\, b \left(\frac{\pi}{4}\, C_0\right) \frac{1}{2}\, \rho\, U_\infty^2\, \frac{\alpha + \beta}{1 + \frac{2}{AR}}$$

$$= 2\, \pi\, b\, \overline{C}\, \frac{1}{2}\, \rho\, U_\infty^2\, \frac{\alpha + \beta}{1 + \frac{2}{AR}}$$

$$C_L = \frac{\mathcal{L}}{\frac{1}{2}\, \rho\, U_\infty^2\, b\, \overline{C}} = 2\, \pi\, \frac{\alpha + \beta}{1 + \frac{2}{AR}}$$

Solução para perfil elíptico

Velocidade de *downwash*:

$$w\left(y\right)=\frac{1}{4\,\pi}\int_{-b/2}^{b/2}\frac{\Gamma'\left(y'\right)}{y-y'}dy'=\frac{1}{4\,\pi}\,\frac{2\,\pi\,\Gamma_0}{b}=\frac{\Gamma_0}{2\,b}=cte$$

$$w=\frac{\pi\,C_0}{2\,b}\,\frac{U_\infty\left(\alpha+\beta\right)}{1+\frac{2}{AR}}=\frac{2}{AR}\,\frac{U_\infty\left(\alpha+\beta\right)}{1+\frac{2}{AR}}=\frac{2\,U_\infty\left(\alpha+\beta\right)}{2+AR}$$

Arrasto induzido:

$$\alpha_i=\frac{w}{U_\infty}=\frac{2\left(\alpha+\beta\right)}{2+AR}=\frac{1}{\pi\,AR}\,\frac{2\,\pi\left(\alpha+\beta\right)}{1+\frac{2}{AR}}=\frac{C_L}{\pi\,AR}$$

$$\mathcal{D}_i=\mathcal{L}\,\alpha_i\;\Rightarrow\;C_{Di}=C_L\,\alpha_i=\frac{C_L^2}{\pi\,AR}$$

Para o arrasto total, deve ser acrescentado o arrasto viscoso para aerofólio bidimensional $C_{D\infty}$ (que é determinado da teoria de camada limite), resultando:

$$C_D=C_{D\infty}+C_{Di}=C_{D\infty}+\frac{C_L^2}{\pi\,AR}$$

Comparação com aerofólios reais