Universidade de São Paulo
Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"
Departamento de Ciências Exatas
LCE 0220 - Cálculo II
Professoras: Renata Alcarde Sermarini e Cristiane Mariana Rodrigues da Silva
Lista de Exercício - Pontos Críticos, Máximo, Mínimo e Sela

1. Ache os pontos críticos de f nos seguintes casos:
   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x - 4y$
   (b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 8y - xy$
   (c) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$
   (d) $f(x,y) = 6x + 4y - 7$
   (e) $f(x,y) = x^3 - y^3$
2. Ache os pontos críticos de cada função abaixo e classifique-os:
   (a) $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 2x - 2y$
   (b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 3x - 4y$
   (c) $f(x,y) = 3 + 4xy$
   (d) $f(x,y) = e^{3x+4y}$
   (e) $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$
   (f) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$
   (g) $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - 2x^2 - 3y^2 + 3x + 5y + 40$
   (h) $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 - y^2 - 3y$
   (i) $f(x,y) = e^{x^2+3y}$
   (j) $f(x,y) = x^3 + 2y^2 - 3x - 4y$
   (k) $f(x,y) = -x^2 - 4xy - 4$
   (l) $f(x,y) = x^2y^2$
3. O lucro que de uma empresa obtém, vendendo dois produtos A e B, é dado por:

   $$L = 600 - 2x^2 - 4y^2 - 3xy + 18x + 18y$$

   em que x e y são as quantidades vendidas. Obtenha os valores de x e y que maximizam o lucro.
4. Quando uma empresa usa x unidades de trabalho e y unidades de capital, sua produção mensal de certo produto é dada por

   $$P = 32x + 20y + 3xy - 2x^2 - 2,5y^2$$

   Obtenha os valores de x e y que maximizam a produção mensal.
5. Ache o ponto de máximo ou de mínimo de cada função a seguir, usando o método da substituição e o dos multiplicadores de Lagrange:
   (a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, sujeita a $x + 2y = 6$
   (b) $f(x,y) = x^2 + y^2$, sujeita a $x + 3y = 12$
   (c) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$, sujeita a $x - y = 1$

(d) $f(x,y) = x^2 - y^2$, sujeita a $x - y = 1$

(e) $f(x,y) = x^2 - y$, sujeita a $x - y = 0$

6. Ache o ponto de máximo ou de mínimo de cada função a seguir, usando o método que julgar conveniente:

   (a) $f(x,y) = x + y$, sujeita a $x^2 + y^2 - 1 = 0$

   (b) $f(x,y) = x - y$, sujeita a $x^2 + y^2 - 2 = 0$

   (c) $f(x,y) = 2x - y$, sujeita a $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$

   (d) $f(x,y) = x + 2y$, sujeita a $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$

   (e) $f(x,y) = x + 3y$, sujeita a $xy = 1$

   (f) $f(x,y) = x - y$, sujeita a $xy = 2$

   (g) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$, sujeita a $2x + 4y - 12 = 0$

   (h) $f(x,y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$, sujeita a $x + y = 5$

   (i) $f(x,y) = x + y$, sujeita a $2x^2 + y^2 - 1 = 0$

Respostas

1. (a) $(3,2)$

   (b) $\left(\frac{16}{3}, \frac{20}{3}\right)$

   (c) $(0,0)$

   (d) não existem

   (e) $(0,0)$

2. (a) $(1,-1)$ ponto de máximo

   (b) $\left(\frac{10}{3}, \frac{11}{3}\right)$ ponto de mínimo

   (c) $(0,0)$ ponto de sela

   (d) não existem pontos críticos

   (e) $(x,-x) \in R$ são pontos de mínimo

   (f) $(0,0)$ ponto de mínimo

   (g) $(1,1)$ ponto de máximo, $(1,5)$ e $(3,1)$ pontos de sela, $(3,5)$ ponto de mínimo

   (h) $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ ponto de máximo e $\left(10, -\frac{3}{2}\right)$ ponto de sela

   (i) não existem pontos críticos

   (j) $(1,1)$ ponto de mínimo, (-1,1) ponto de sela

   (k) $(0,0)$ ponto de sela

   (l) $(x,0)$ ou $(0,y)$, $x \in R$, $y \in R$ são pontos de mínimo

3. $x = \frac{90}{23}$ e $y = \frac{18}{23}$

4. $x = 20$ e $y = 16$

5. (a) $\left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$ ponto de mínimo

   (b) $\left(\frac{6}{5}, \frac{18}{5}\right)$ ponto de mínimo

   (c) $\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ ponto de mínimo

   (d) não existem pontos de máximo nem de mínimo

(e) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ponto de mínimo

6. (a) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ponto de máximo e $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ de mínimo
   (b) $(-1,1)$ ponto de mínimo e $(1,-1)$ de máximo
   (c) $\left(1-\sqrt{\frac{8}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right)$ ponto de mínimo e $\left(1+\sqrt{\frac{8}{5}}, -\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$ é ponto de máximo
   (d) $\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{5-4\sqrt{5}}{5}\right)$ ponto de mínimo e $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{5+4\sqrt{5}}{5}\right)$ é ponto de máximo
   (e) $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ponto de mínimo e $\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ é ponto de máximo
   (f) Não possui
   (g) $\left(\frac{12}{7}, \frac{15}{7}\right)$ ponto de mínimo
   (h) $\left(\frac{45}{13}, \frac{20}{13}\right)$ ponto de mínimo
   (i) $\left(\sqrt{\frac{1}{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ ponto de máximo e $\left(-\sqrt{\frac{1}{6}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ ponto de mínimo

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S.; BUSSAB, W. O. Cálculo: funções de uma e várias variáveis. 2ª ed. São Paulo: Saraiva, 2012, 416p.