Universidade de São Paulo
Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"
Departamento de Ciências Exatas
LCE 0220 - Cálculo II
Professoras: Renata Alcarde Sermarini e Cristiane Mariana Rodrigues da Silva
Lista de Exercício - Derivadas Parciais

Sabendo-se que $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = f_y$, resolva os exercícios a seguir.

1. Considere a função $f(x,y) = x^2 + 3y^2$. Usando a definição de derivada parcial, calcule $f_x(3,2)$ e $f_y(3,2)$.

2. Considere a função $f(x,y) = 4xy^2$. Usando a definição de derivada parcial, calcule $f_x(-1,2)$ e $f_y(-1,2)$.

3. Usando as técnicas de derivação, calcule f_x e f_y para as seguintes funções:

(1) $f(x,y) = 7x + 10y$
(2) $f(x,y) = x^2 + 3y^2$
(3) $f(x,y) = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{y}$
(4) $f(x,y) = \frac{2}{x^3} - \frac{6}{y^2}$
(5) $f(x,y) = x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}$
(6) $f(x,y) = \sqrt[3]{x} + \sqrt{y}$
(7) $f(x,y) = 4xy^2$
(8) $f(x,y) = 10xy^2 + 5x^2y$
(9) $f(x,y) = e^x + 2x^2 + 6y + 10$
(10) $f(x,y) = \ln(x) + 4y^3 + 9$
(11) $f(x,y) = 3^x + \sin(y)$
(12) $f(x,y) = \cos(x) + \ln(x) - e^y - 10$
(13) $f(x,y) = x^3e^x + 10y$
(14) $f(x,y) = 2y^2\ln(x)$
(15) $f(x,y) = 3y^2\cos(x)$
(16) $f(x,y) = 4y^2e^y + 6x^2$
(17) $f(x,y) = 20x^2y^2\sin(x)$
(18) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$
(19) $f(x,y) = \frac{e^x}{2x+3y}$
(20) $f(x,y) = \frac{\ln(y)}{x-2y}$
(21) $f(x,y) = x^{0,3}.y^{0,7}$
(22) $f(x,y) = 2x^{0,6}.y^{0,4}$
(23) $f(x,y) = 10x^{\alpha}.y^{1-\alpha} \quad (0 < \alpha < 1)$
(24) $f(x,y) = \ln(2x + 3y)$
(25) $f(x,y) = e^{2x+5y}$
(26) $f(x,y) = 2^{x+y}$
(27) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$
(28) $f(x,y) = e^{xy}$
(29) $f(x,y) = 3^{xy}$
(30) $f(x,y) = \cos(2x + 3y)$
(31) $f(x,y) = 5^{x^2+y}$
(32) $f(x,y) = (x^2 + 2xy)^3$
(33) $f(x,y) = (3x^2y + 2xy)^4$
(34) $f(x,y) = \frac{1}{(x^2+2y)^3}$
(35) $f(x,y) = \sqrt{xy}$
(36) $f(x,y) = \sqrt{xy + x^2}$
(37) $f(x,y) = \sqrt[3]{2x^2 - 3xy}$
(38) $f(x,y) = \sqrt{e^x + e^y}$
(39) $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$
(40) $f(x,y) = \ln(e^{xy} - x^2y^3)$

4. Considere a função $f(x,y) = 3x^2y$

(a) Calcule $f_x(10,15)$
(b) Calcule $f(11,15) - f(10,15)$ e compare com o resultado obtido em (a)
(c) Calcule $f_y(10,15)$
(d) Calcule $f(10,16) - f(10,15)$ e compare com o resultado obtido em (c)

5. Obtenha $\frac{dF}{dt}$, sendo F a função composta de f, com x e y nos seguintes casos:

(a) $f(x,y) = 3x + 6y - 9, \quad x(t) = 3t$ e $y(t) = t^2 - 1$

(b) $f(x,y) = 3x + y^2, \quad x(t) = \sin(t)$ e $y(t) = \cos(t)$

(c) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2), \quad x(t) = 3t$ e $y(t) = t - 1$

(d) $f(x,y) = e^{x+y}, \quad x(t) = t^2$ e $y(t) = 2t^3 - 1$

(e) $f(x,y) = x^2y^3 + x^3y^2, \quad x(t) = \frac{1}{t}$ e $y(t) = \frac{1}{t^2}$

6. Calcule as derivadas parciais de sugunda ordem para as funções:

(a) $f(x,y) = 2x + 6y$

(b) $f(x,y) = xy$

(c) $f(x,y) = 2x^2 + y^2$

(d) $f(x,y) = \frac{x}{y}$

(e) $f(x,y) = 6x^{0,5}y^{0,5}$

(f) $f(x,y) = \sin(x) + 2\cos(y)$

(g) $f(x,y) = e^{x+y}$

7. Calcule as derivadas mistas f_{xy} e f_{yx} da função

$$f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$$

Respostas

1. 6 e 12

2. 16 e -16

3. (1) $f_x = 7$ e $f_y = 10$

(2) $f_x = 2x$ $f_y = 6y$

(3) $f_x = \frac{-2}{x^3}$ $f_y = \frac{-3}{y^2}$

(4) $f_x = \frac{-6}{x^4}$ $f_y = \frac{12}{y^3}$

(5) $f_x = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ $f_y = \frac{1}{2}y^{-1/2}$

(6) $f_x = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ $f_y = \frac{1}{2}y^{-1/2}$

(7) $f_x = 4y^2$ $f_y = 8xy$

(8) $f_x = 10y^2 + 10xy$ $f_y = 20xy + 5x^2$

(9) $f_x = e^x + 4x$ $f_y = 6$

(10) $f_x = \frac{1}{x}$ $f_y = 12y^2$

(11) $f_x = 3^x.\ln 3$ $f_y = \cos(y)$

(12) $f_x = -\sin(x) + \frac{1}{x}$ $f_y = -e^y$

(13) $f_x = e^x(x^3 + 3x^2)$ $f_y = 10$

(14) $f_x = \frac{2y^2}{x}$ $f_y = 4y\ln(x)$

(15) $f_x = -3y^2\sin(x)$ $f_y = 6y\cos(x)$

(16) $f_x = 12x$ $f_y = e^y(4y^2 + 8y)$

(17) $f_x = y^2[20x^2\cos(x) + 40x\sin(x)]$ $f_y = 40x^2y\sin(x)$

(18) $f_x = \frac{-2y}{(x-y)^2}$ $f_y = \frac{2x}{(x-y)^2}$

(19) $f_x = \frac{e^x(2x+3y-2)}{(2x+3y)^2}$ $f_y = \frac{-3e^x}{(2x+3y)^2}$

(20) $f_x = \frac{-\ln(y)}{(x-2y)^2}$ $f_y = \frac{\frac{x}{y}+2\ln(y)-2}{(x-2y)^2}$

(21) $f_x = 0,3x^{-0,7}y^{0,7}$ $f_y = 0,7x^{0,3}y^{-0,3}$

(22) $f_x = 1,2x^{-0,4}y^{0,4}$ $f_y = 0,8x^{0,6}y^{-0,6}$

(23) $f_x = 10\alpha x^{\alpha-1}y^{1-\alpha}$ $f_y = 10(1-\alpha)x^{\alpha}y^{-\alpha}$

(24) $f_x = \frac{2}{2x+3y}$ $f_y = \frac{3}{2x+3y}$

(25) $f_x = 2\,e^{2x+5y}$ $f_y = 5\,e^{2x+5y}$

(26) $f_x = 2^{x+y}\ln 2$ $f_y = 2^{x+y}\ln 2$

(27) $f_x = 2xe^{x^2+y^2}$ $f_y = 2y\,e^{x^2+y^2}$

(28) $f_x = ye^{xy}$ $f_y = x\,e^{xy}$

(29) $f_x = y3^{xy}\ln 3$ $f_y = x3^{xy}\ln 3$

(30) $f_x = -2\sin(2x+3y)$ $f_y = -3\sin(2x+3y)$

(31) $f_x = 2x5^{x^2+y}\ln 5$ $f_y = 5^{x^2+y}\ln 5$

(32) $f_x = 3(x^2+2xy)^2(2x+2y)$ $f_y = 6(x^2+2xy)^2x$

(33) $f_x = 4(3x^2y + 2xy)^3(6xy + 2y)$ $f_y = 4(3x^2y + 2xy)^3(3x^2 + 2x)$

(34) $f_x = -6x(x^2+2y)^{-4}$ $f_y = -6(x^2+2y)^{-4}$

(35) $f_x = \frac{1}{2}x^{-1/2}y^{1/2}$ $f_y = \frac{1}{2}x^{1/2}y^{-1/2}$

(36) $f_x = \frac{1}{2}(xy+x^2)^{-1/2}(y+2x)$ $f_y = \frac{1}{2}(xy+x^2)^{-1/2}x$

(37) $f_x = \frac{1}{3}(2x^2 - 3xy)^{-2/3}(4x - 3y)$ $f_y = -(2x^2 - 3xy)^{-2/3}x$

(38) $f_x = \frac{1}{2}(e^x+e^y)^{-1/2}e^x$ $f_y = \frac{1}{2}(e^x+e^y)^{-1/2}e^y$

(39) $f_x = \frac{x}{x^2+y^2}$ $f_y = \frac{y}{x^2+y^2}$

(40) $f_x = \frac{y(e^{xy}-2xy^2)}{e^{xy}-x^2y^3}$ $f_y = \frac{x(e^{xy}-3xy^2)}{e^{xy}-x^2y^3}$

4. (a) 900
   (b) 945
   (c) 300
   (d) 300

5. (a) $12t+9$
   (b) $3\cos t - 2\sin t\ \cos t$
   (c) $\frac{20t-2}{10t^2-2t+1}$
   (d) $(2t+6t^2).e^{t^2+2t^3-1}$
   (e) $-8.t^{-9}-7.t^{-8}$

6.

	f_{xx}	f_{xy}	f_{yx}	f_{xx}
(a)	0	0	0	0
(b)	0	1	1	0
(c)	4	0	0	2
(d)	0	$-y^{-2}$	$-y^{-2}$	$2xy^{-3}$
(e)	$-1,5x^{-1,5}y^{0,5}$	$1,5(xy)^{-0,5}$	$1,5(xy)^{-0,5}$	$-1,5x^{0,5}y^{-1,5}$
(f)	$-\sin x$	0	0	$-2\cos y$
(g)	e^{x+y}	e^{x+y}	e^{x+y}	e^{x+y}

7.

$$f_{xy} = f_{yx} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

MORETTIN, P.A.; HAZZAN, S.; BUSSAB, W. O. Cálculo: funções de uma e várias variáveis. 2ª ed. São Paulo: Saraiva, 2012, 416p.