Lista de Exercícios. Data de entrega 3 de julho.

Nestor Caticha

18 de junho de 2017

Exercício 1 Responda sim ou não: Você fez a prova sozinha/o? A resposta "sim"multiplica a nota nos exercícios abaixo por 1. A resposta "não"ou a ausência de resposta multiplica por zero. Os exercícios 2,3,4 e 5 valem um ponto cada. Os exercícios 6,7 e 8 valem dois pontos cada.

Excercicio 2 Sejam $\{x_i\} = (X_1, X_2...X_N)$ variáveis aleatórias com médias μ_i e variâncias σ_i^2 conhecidas e finitas.

- (A) Obtenha a variância de $z = Ax_1 + B$
- (B) Suponha que sejam independentes, encontre uma expressão para o valor esperado do produto $I\!E(y)$, $y = \prod_i^N x_i$, e
- (C) a variância da sua soma Var(w) onde $w = \sum_i x_i$

Agora suponha que não sejam independentes, por exemplo $x_1 = \cos\theta$ e $x_2 = \sin\theta$, onde θ esta uniformemente distribuida entre 0 e 2π.

- Mostre que $I\!E(x_1x_2) = I\!E(x_1)I\!E(x_2)$ e Var$(x_1 + x_2)$ =Var(x_1)+Var(x_2)

mas esta propriedade não vale para todas as variáveis dependentes.

A covariância de x_1 e x_2 é definida por $\mathrm{Cov}(x_1, x_2) = I\!E((x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2))$.

- Mostre que se x_1 e x_2 forem independentes sua covariância é zero.
- Construa ao menos um exemplo de variáveis dependentes de covariância nula, o que mostra que covariância nula não equivale a independência

Exercício 3 Em uma experiência o operador tem contrôle de escolha do valor x e pode medir para cada escolha de x o valor de y. Uma corrida da experiência gerou o conjunto de dados $(x_i, y_i)_{i=1...N}$. No que segue teremos informação que os valores de y_i são corrompidos por ruído gaussiano e independente com média nula e variância σ^2.

- Há motivos teóricos para achar que o modelo $\mathcal{M}_1 : y = f_1(x; \theta)$ é adequado. Encontre uma expressão que permita econtrar θ_{ML} o valor de θ de máxima verossimilhança.
- Encontre uma expressão para a incerteza da estimativa de θ. Justifique a escolha dessa estimativa.

Exercício 4 Devemos estimar o parâmetro p de um processo de Bernoulli a partir de informação: n = número de tentativas, m = número de sucessos. Sobre a hipótese de independência das tentativas:

- Encontre a probabilidade de m dado n e p.
- Encontre a probabilidade de p dado n e m. Faça a hipóteses que achar necessárias e deixe-as explícitas.
- Faça uma estimativa do valor esperado de p e de sua variância.
- Substitua por exemplo a informação $n = 23$ e $m = 0$. Qual é $\mathbb{E}(p)$ e $\text{Var}(p)$?

Exercício 5: Mudança de variáveis Suponha que as variáveis y_1 e y_2 tenham distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$ e sejam independentes.

- 5 a) Encontre a distribuição da variável $z = -\ln y_1$.

Dados y_1 e y_2 obtemos x_1e x_2 a partir da transformação:

$$x_1 = \sqrt{-2\ln y_1} \cos 2\pi y_2 \quad (1)$$
$$x_2 = \sqrt{-2\ln y_1} \sin 2\pi y_2 \quad (2)$$

- 5 b) Encontre a distribuição conjunta $P_X(x_1, x_2)$
- 5 c) Suponha que tenhamos informação que nos permite atribuir probabilidades a $P(a|I)$ e $P(m|I)$ as probabilidades de altura e massa respectivamente em membros de uma população. Suponha que a e m sejam independentes e encontre uma expressão para a probabilidade $P(b|I)$ da variável $b = a/m^{1/3}$, que representa uma característica geométrica do corpo. Suponha que a e m não sejam independentes, o que faltaria para encontrar $P(b|I)$?

Excercicio 6: Obtenha a distribuição de probabilidades de $Y_n = \sum_{i=1}^n x_i$ dado por uma soma de n variáveis independentes e igualmente distribuidos no caso que as variáveis aleatórias x são variáveis de Cauchy: $P(x|x_0, a) = \frac{1}{a\pi} \frac{1}{1+\frac{(x-x_0)^2}{a^2}}$. O significado dos parâmetros x_0 e a são de posição e escala das variáveis x_i. Discuta como mudam com n os parâmetros de posição e escala da variável Y_n.

Exercício 7: frequência e probabilidade A familia de distribuições de probabilidades de Bernoulli pode ser escrita como

$$P(S = s|p) = p\delta_{s,1} + q\delta_{s,-1}$$

onde p é um parâmetro que indexa os membros da familia e $q = 1 - p$ e a delta éa de Kronecker. Também podemos usar uma variável x que toma valores nos reais e

$$P(X = x|p) = p\delta(x - 1) + q\delta(x + 1)$$

onde agora a delta é de Dirac.

- **(A)** Usando a segunda forma, calcule a função característica $\Phi_X(k)$. Estamos interessados em somas de variáveis aleatórias de Bernoulli, igualmente distribuidas e independentes: $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Obtenha a distribuição de probabilidades $P(Y_n = y|p, n)$.

Introduzimos m como o número de sucessos em n tentativas, que é o número de vezes que $s_i = +1$ dentre as n amostras $x_i, i = 1...n$. Mostre que a distribuição de m, é a distribuição binomial. Escrita da primeira forma

$$P(m|N = nI') = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} \qquad (3)$$

- **(B)** Calcule $< m >$, $< m^2 >$. [Dica: Use a expansão binomial de (i) $(p+q)^n$, (ii) $p\frac{\partial}{\partial p}p^m = mp^m$ e (iii) a normalização $p+q=1$; resposta: $< m >= np$, $< m^2 >= n^2p^2 + np(1-p)$]
- **(C)** Refaça a dedução da desigualdade de Chebyshev para distribuições de variáveis que tomam valores discretos e mostre que para ϵ fixo, a probabilidade que a frequência f se afaste do *valor esperado* $< f >= p$ por mais que ϵ, cai com $1/n$.
- **(D)** Discuta e pense: Então de que forma a frequência está ligada à probabilidade? A frequência *converge*, quando n cresce, para a probabilidade p. Toda convergência precisa ser definida em termos de uma distância, que vai para zero quando se toma algum limite. É fundamental entender que a distância aqui não é ϵ, mas é a **probabilidade** que f se afaste de p por mais de ϵ. Assim, a frequência f converge **em probabilidade** à probabilidade p.

A conclusão do exercício acima é fundamental. Como poderiamos definir probabilidades em termos de frequência, se para mostrar que a frequência está associada à probabilidade usamos o conceito de convergência em probabilidade? Discuta se é errado ou não definir um conceito usando esse conceito na definição.

Mas o exercício acima mostra porque pode parecer sedutor usar a frequência em lugar da probabilidade. Se tivermos informação I' sobre uma experiência e dados sobre uma sequência de experimentos nas condições I' podemos atribuir valor à probabilidade de forma mais segura. A frequência é informação que pode ser usado para atribuir um número à probabilidade, mas não é o único tipo de informação para fazer isso.

Excercicio 8: Uma sociedade de N agentes tem que escolher um entre dois candidatos A e B.

- (A) Um pesquisa de opiniões feita com n eleitores tem como resultado n_A e n_B a favor de cada um dos candidatos. Supondo que $N >> n$, qual é confiança que se pode ter sobre o uso do resultado da pesquisa como indicador do resultado da eleição caso não hajam mudanças de opiniões. Discuta se é razoável modelar a eleição como uma urna de Bernoulli.

Agora vamos fazer algo mais interessante, mas que só requer o uso das regras de soma e produto, que são bem estabelecidas e algumas suposições sobre o comportamento humano que podem ser muito discutíveis. O objetivo é mostrar ao aluno que tem as ferramentas para modelar situações muito mais interessantes. Mas as pessoas conversam e mudam de opiniões. Suponha que no dia t as probabilidades de voto sejam $p_A(t)$ e $p_B(t)$ respectivamente. A dinâmica de mudanças de opiniões é bem complicada mas podemos fazer um modelo simples: Foquemos a atenção em um eleitor, este se reune com mais dois e passa a ter a opinião da maioria. Ou seja do grupo de três, se dois ou três apoiam A em t, o eleitor em foco passa a apoiar A no dia $t+1$ e a apoiar B se somente 0 ou 1 dos membros do grupo de três apoiavam A. Suponha que as probabilidades de cada um dos membros sejam independentes das dos outros membros do grupo. Para o grupo de três escreva como função de $p_A(t)$ a probabilidade da asserção

- (B1) $A_{01} =$ "0 ou 1 apoiam A"
- (B2) $A_{23} =$ "2 ou 3 apoiam A"

que são respectivamente $p_B(t+1) = f(p_B(t)$ e $p_A(t+1) = f(p_A(t))$ (note que por simetria são a mesma função com argumentos diferentes.) Faça o gráfico de $p_A(t+1) = f(p_A(t))$ contra $p_A(t)$. Inclua no gráfico a identidade (diagonal). O cruzamento de $f(p_A(t))$ com a diagonal indica $p_A(t+1) = p_A(t)$, chamado de ponto fixo.

- (C1) Identifique os pontos fixos
- (C2) Discuta a estabilidade dos pontos fixos. Isto é, se ao perturbar um pouco o ponto fixo este se afasta e se move na direção de outro ponto fixo (instável) ou se aproxima (estável) do ponto fixo.

(Mais interessante ainda) Existem pessoas que ao interagir com o grupo decidem ser do contra. Suponha que a probabilidade de alguém ser do contra seja c. Suponha que a probabilidade de um eleitor ser do contra é independente de qualquer outra coisa. Então com a notação anterior, e usando as regras da soma e do produto mostre que

- (D1) $p_A(t+1) = (1-c)f(p_A(t)) + cf(p_B(t))$
- (D2) Mostre que para $c > 1/6$ o valor $p_A = .5$ é o único ponto fixo estável. Portanto podemos esperar um resultado da eleição em que a sociedade está dividida em frações aproximadamente iguais.