

12/06 - Lista de MMA - Como resolver alguns exercícios:

11) $y = b + \ln(1 + ax)$

$$e^y = e^{b + \ln(1 + ax)}$$

$$e^y = e^b \cdot e^{\ln(1 + ax)}$$

$$e^y = e^b + a \cdot e^b x$$

$$1e^b + (ae^b)x = e^y$$

$$\begin{cases} \langle 1, 1 \rangle e^b + \langle 1, x \rangle (ae^b) = \langle 1, e^y \rangle \\ \langle x, 1 \rangle e^b + \langle x, x \rangle (ae^b) = \langle x, e^y \rangle \end{cases}$$

Resolva-se o sistema linear e chega-se em dois números

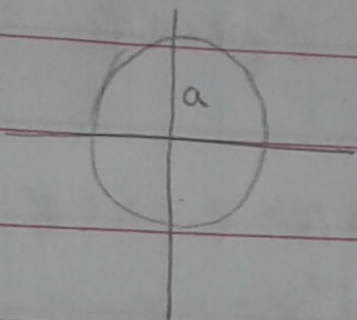
$$e^b = \gamma$$

$$ae^b = w$$

12/06/14

9)

$$x^2 + (y-a)^2 = r^2$$

dois parâmetros a e r

$$(x^2 + y^2) - 2ay + a^2 = r^2$$

$$r^2 - a^2 + 2ay = x^2 + y^2$$

$$1 \cdot (r^2 - a^2) + (2y)a = x^2 + y^2$$

$$\begin{cases} \langle 1, 1 \rangle (r^2 - a^2) + \langle 1, 2y \rangle a = \langle 1, (x^2 + y^2) \rangle \\ \langle 2y, 1 \rangle (r^2 - a^2) + \langle 2y, 2y \rangle a = \langle 2y, (x^2 + y^2) \rangle \end{cases}$$

$$\begin{aligned} r^2 - a^2 &= \gamma \\ a &= w \end{aligned} \quad \text{Números}$$

$$\langle 1, 1 \rangle =$$

10

$$y = \ln(ax + bx^2)$$

$$e^y = e^{\ln(ax + bx^2)}$$

$$ax + bx^2 = e^y$$

$$x \cdot a + x^2 \cdot b = e^y$$

12/06/19

12

$$\frac{y+ax}{1+by^2} = x$$

$$y+ax = x + xy^2 b$$

$$y-x = xy^2 b - ax$$

$$-x(a) + xy^2 b = y-x$$

Sistema:

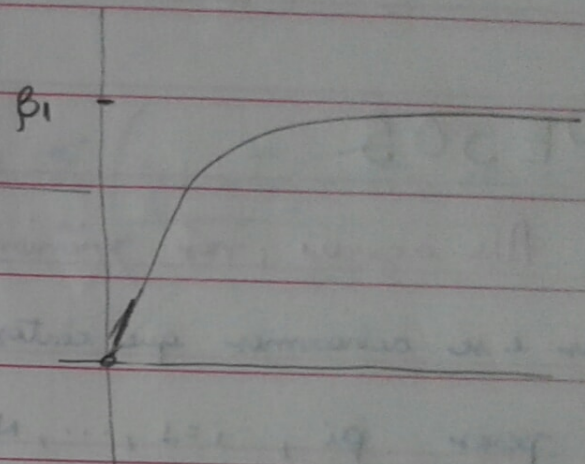
$$\langle -x, -x \rangle a + \langle -x, xy^2 \rangle b = \langle -x, y-x \rangle$$

$$\langle xy^2, -x \rangle a + \langle xy^2, xy^2 \rangle b = \langle xy^2, y-x \rangle$$

13

$$y = \frac{\beta_1 x}{\beta_2 + x}$$

Gráfico:



$$x \approx 0 \Rightarrow y = \left(\frac{\beta_1}{\beta_2 + x} \right) x \approx \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \right) x$$

é uma função crescente.

Linearização:

$$(\beta_2 + x)y = \beta_1 x$$

$$\beta_2 y + xy = \beta_1 x$$

$$x\beta_1 + (-y)\beta_2 = xy$$

OBS: MQ linear $\neq$ MQ não linear!

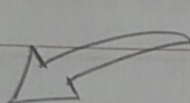
Exemplo: $y = a e^{bx}$

MQ não linear: minimizar

$$\tilde{Q}(a, b) = \sum_i (y_i - a e^{bx_i})^2$$

Mas achar ponto crítico de $\tilde{Q}$ não resulta em um sistema linear!

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

 sistema não-linear

* O que nós fazemos?

$\ln y = \ln a + bx$ e minimizamos:

$$Q(a, b) = \sum_i (\ln y_i - \ln a - bx_i)^2$$

O número de $Q(a, b)$ não é em geral o mínimo de $\tilde{Q}(a, b)$

~"~

* PESOS

↳ Até agora, nós minimizamos $\sum_i (\text{lado esq}_i - \text{lado dir}_i)^2$

Mas e se acharmos que certos dados valem mais do que outros?

pesos p_i , $i=1, \dots, N$ $p_i > 0$

↳ Agora queremos minimizar $\sum_i p_i (\text{lado esq}_i - \text{lado dir}_i)^2$

//

Q

↓ ponto crítico e chegamos em um

sistema linear nos parâmetros, com coeficientes do tipo $\langle u, v \rangle = \sum_i u_i v_i$

$$= \sum_i p_i u_i v_i$$

O produto escalar terá de incluir p_i na soma.

Exemplo:

$$\langle x, \ln y \rangle = \sum_i p_i \cdot x_i \cdot \ln y_i$$

12/06/17

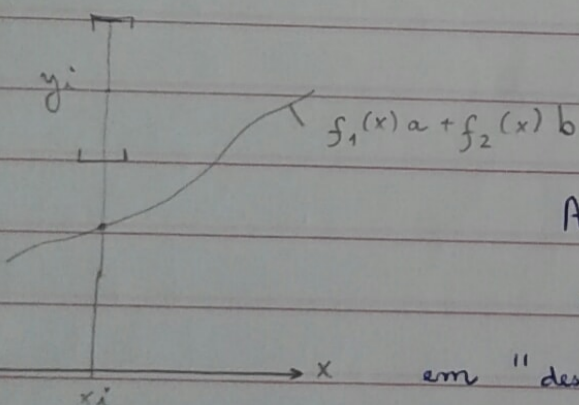
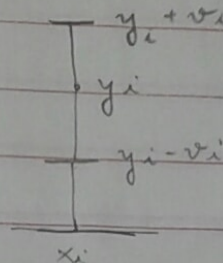
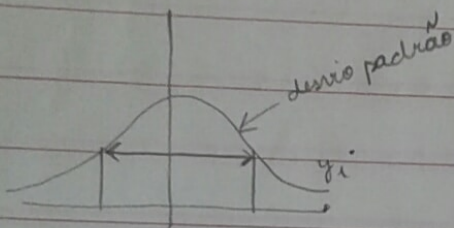
* Situação em que a atribuição de pesos é "natural".

2 parâmetros para facilitar. Suponha y como função de x .

$$y = f_1(x)a + f_2(x)b \quad (\text{exemplo, ajuste de reta}).$$

• E os dados não têm erro nos x_i 's.

• os y_i 's têm uma "barra de erro".



A pergunta é:

quanto é $(y_i - [f_1(x_i)a + f_2(x_i)b])$ medido

em "desvio-padrão" σ_i ?

O que interessa é:
$$\frac{y_i - [f_1(x_i)a + f_2(x_i)b]}{\sigma_i}$$

Agora o resíduo quadrático a ser minimizado é:
$$\sum_i \left(\frac{y_i - [f_1(x_i)a + f_2(x_i)b]}{\sigma_i} \right)^2$$

$$= \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} (y_i - [f_1(x_i)a + f_2(x_i)b])^2$$

Ok, agora, vamos usar
$$p_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$$