

Aula 15 09/05/2017 - Luca

$$\sqrt[3]{1739}$$

$$10^3 = 1000$$

$$20^3 = 8000$$

$$12,1^3 = 1771,561$$

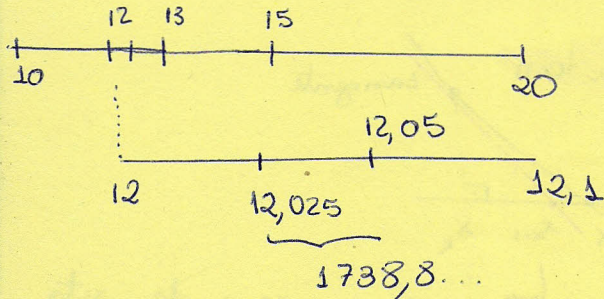
$$15^3 = 3375$$

$$12^3 = 1728$$

$$13^3 = 2197$$

$$12,05^3 = 1749,6...$$

05/05
Prova!



→ Algoritmo - testar a percentagem média e decidir de que lado da Bisseção está a raiz

- Se fosse bisseção:

etapa	precisão
0	10
1	$5 = \frac{10}{2}$
2	$2,5 = \frac{5}{2} = \frac{10}{4}$
3	$1,25 = \frac{10}{8}$
...	...
n	$\frac{10}{2^n}$

→ Digamos que nossa objetivo é chegar na precisão de 10^{-8} . Quantas etapas precisamos

$$\frac{10}{2^n} < 10^{-8} \rightarrow \text{queremos}$$

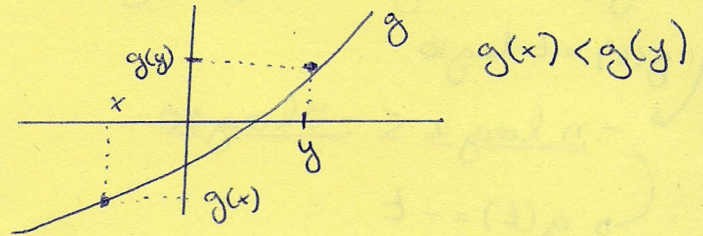
Parênteses - manipulação de desigualdades

$$x < y, x, y \in \mathbb{R}$$

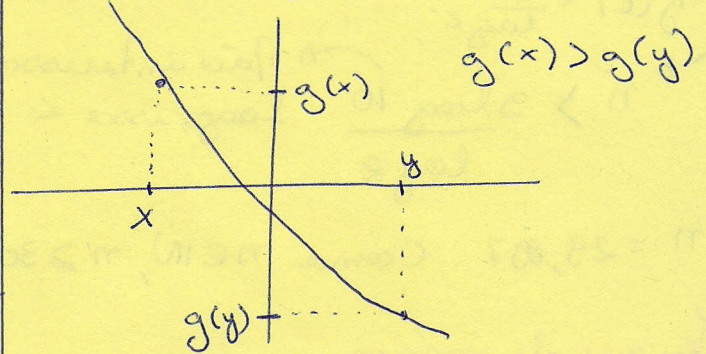
$$g(x) \geq g(y) ?$$

I Depende da função g:

• Case 1 - g crescente



• Case 2 - g decrescente

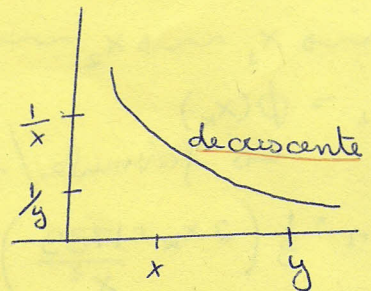


Exemplos:

1) $0 < x < y$

$$g(t) = \frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$$



2) $x < y$

$$-x > -y$$

$$g(t) = -t \text{ (decrescente)}$$

3) $cx < cy, c \neq 0$

$$x \leq \frac{y}{c} \quad g(t) = \frac{t}{c} \text{ decrescente se } c < 0, \text{ crescente se } c > 0$$

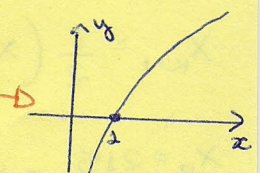
$$c < 0 \Rightarrow g \text{ decresce} \Rightarrow x > \frac{y}{c}$$

$$c > 0 \Rightarrow g \text{ cresce} \Rightarrow x < \frac{y}{c}$$

fim PARênteses

$$\frac{10}{2^n} < 10^{-8}$$

$$\log\left(\frac{10}{2^n}\right) < \log(10^{-8})$$



qq. base > 1

$$\log 10 - n \log 2 < -8 \log 10$$

$$g(t) = t - \log 10$$

$$-n \log 2 < -9 \log 10$$

$$g(t) = -t$$

$$n \log 2 > 9 \log 10$$

$$g(t) = \frac{t}{\log 2}$$

$$n \geq \frac{9 \log 10}{\log 2}$$

↪ Não interessa o log, isso é $\log 2^{10}$

$$n = 29,897... \text{ Como } n \in \mathbb{N}, n \geq 30.$$

Truque de mágica

chute inicial $x_0 = 10$.

$$x_0 \rightsquigarrow x_1 \rightsquigarrow x_2 \rightsquigarrow x_3 \rightarrow \dots$$

$$x_{k+1} = \phi(x_k)$$

↪ fórmula/função.

$$x_{k+1} = \frac{1}{3} \left(2x_k + \frac{1739}{x_k^2} \right)$$

$$(2Am + 1739 : Am^2) : 3$$

$$x_1 = 12,4633333$$

$$x_2 = 12,04061625$$

$$x_3 = 12,02542835$$

$$x_4 = 12,02540912$$

$$x_5 = 12,02540912$$

melhor aprox. de $\sqrt[3]{1739}$ p/ esta calculadora

I $\sqrt{8} (= 2,828427125)$

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{8}{x_k} \right)$$

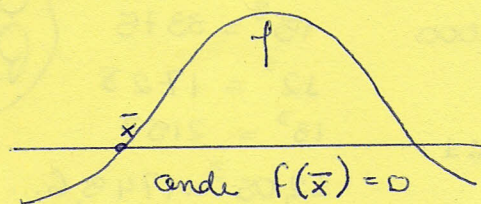
$x_0 = 215$ - aperte 10x a igual

$x_0 = 3$ - aperte 2x a igual

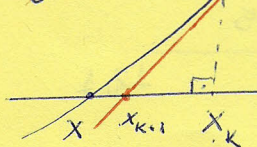
Quanto mais próxima da raiz, menos vezes precisa apertar a [=]

→ Os balilânicos já conheciam

ZEROS DE FUNÇÕES



→ ~~Newton~~ tangente



↪ zero ou raiz da reta tangente

$$x_k - x_{k+1}$$

$$f'(x_k) = \text{inclinação} = \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}}$$

Isolando x_{k+1}

$$f'(x_k)(x_k - x_{k+1}) = f(x_k)$$

$$x_k - x_{k+1} = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

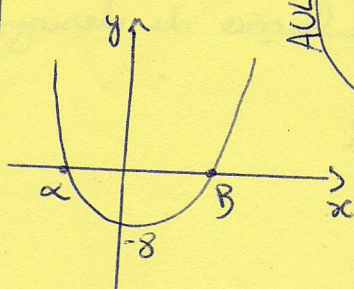
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

↪ Iteração da fórmula de Newton

Aula 18 19/05/2017 - Sexta

I $\sqrt{8}$

$$f(x) = x^2 - 8$$

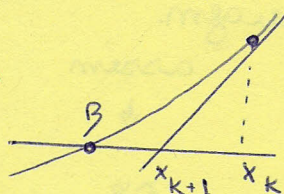


AULA 17
16/05
aula de x

AULA 16
12/05
FALTE!

Dois
raízes
 $\alpha = -\beta$

a) Suponha $\beta < x_k$



Onde estará x_{k+1} ?

$$\beta < x_{k+1} < x_k$$

Logo, $\beta < \dots < x_{k+2} < x_{k+1} < x_k$

Então $x_k \downarrow \beta$? **SIM**

Obs.: O ponto limite $\bar{x}$ é tal que $f(\bar{x}) = \bar{x}$

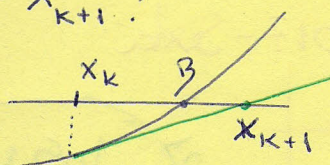
↑ iteração

Aplique a fórmula p/ $\bar{x}$

$$\bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})} = \bar{x}$$

$$\Rightarrow f(\bar{x}) = 0$$

b) Suponha $0 < x_k < \beta$. Onde estará x_{k+1} ?



$$\beta < x_{k+1}$$

(e, assim, recai no item anterior)

CUIDADO: $x_k \sim 0 \Rightarrow x_{k+1}$ é mto grande
(e $x_k = 0$ não dá pois $f'(0) = 0$)

CONCLUSÃO:

↳ Em teoria, escolhendo $x_0 > 0$, sempre teremos $x_k \rightarrow \beta$

c) Lado esquerdo.

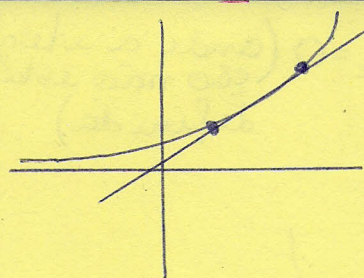
$$\alpha < x_0 < 0 \Rightarrow x_1 < \alpha \Rightarrow x_k \rightarrow \alpha$$

$$x_0 < 0$$

$$\Rightarrow x_0 < \alpha \Rightarrow x_k \rightarrow \alpha$$

$$\therefore x_0 < 0 \Rightarrow x_k \rightarrow \alpha$$

$$2) e^x = 5x$$



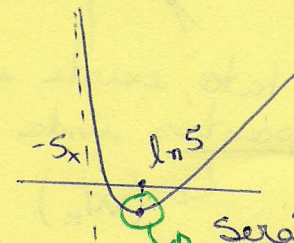
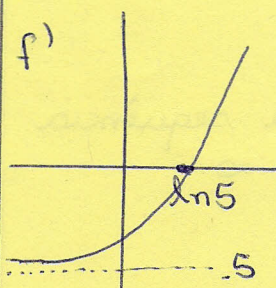
$$f'(x) = e^x - 5$$

$$f''(x) = e^x > 0, \forall x$$

$$f'(x) = 0$$

$$e^x - 5 = 0$$

$$e^x = 5 \Rightarrow x = \ln 5 \approx 1,61$$



Será que o valor crítico é mesmo negativo.

$$f(\ln 5) = e^{\ln 5} - 5 \ln 5 = 5(1 - \ln 5) < 0$$

Obs.: Se fosse $e^x = cx, c > 0$, chegaríamos em: $\ln c$: pt. crítico
 $c(1 - \ln c)$: Valor crítico

$c < e$
0 raízes

$c = e$
1 raiz tang.

$c > e$
2 raízes

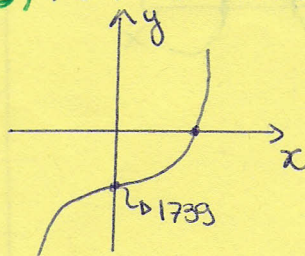
↳ E sobre a escolha de x_0 ?

Indica igual ao caso anterior.

$x_0 < \ln 5 \Rightarrow x_k \rightarrow$ raiz da esquerda

$x_0 > \ln 5 \Rightarrow x_k \rightarrow$ raiz da direita

$$3) f(x) = x^3 - 1739$$



a) Suponha $x_0 > \alpha$

mesma coisa que na 1ª e na 2ª exm

$$x_k \downarrow \alpha$$

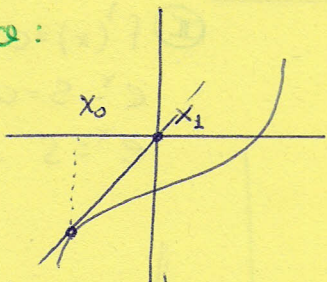
b) $0 < x_0 < \alpha$

$x_1 > \alpha$ e depois $x_k \downarrow \alpha$

c) Em geral, vai existir um $k \in \mathbb{N}$ t.q. $x_k > 0 \Rightarrow$ converge para α .

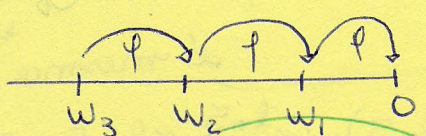
Única "perigo": $x_k = 0$ (onde a iteração não está definida)

exemplo:



→ De fato, existe uma sequência de pontos indo p/ $-\infty$
 $\hookrightarrow (w_k)$

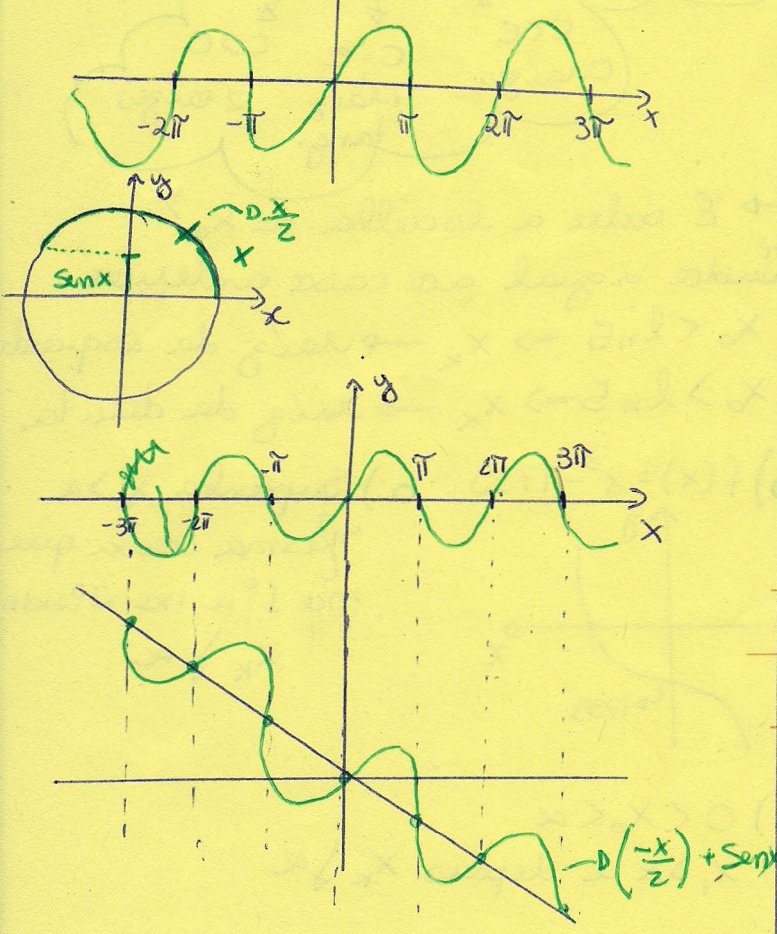
tal que:



$\varphi(w_1) = 0$
 $\varphi(w_{k+1}) = w_k$

x_0 só não pode ser um desses pontos!

4) $f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$



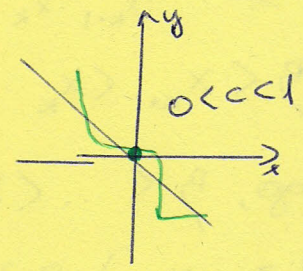
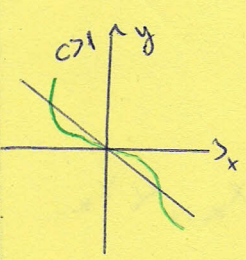
CUIDADOS:

1) O gráfico não é uma reta, pois se inclina

demais, deixa de ser função

2. Olhem na origem.

É assim ou assim



Se fosse $f(x) = \sin x - cx$
 $f'(x) = \cos x - c$
 $f'(0) = 1 - c$

→ Análise usual

(ver atividade da aula anterior)

Aula 20 26.05.2017

→ Faltei - alergia

23/05
 aula de ex?

Aula 22 02/06/2017 - Sexta

t	t _{min}	T _{max}
0	67	82
1	68	83
2	68	83
3	66	80
4	62	76
5	58	72
6	56	72
7	56	73
8	58	76
9	60	76
10	63	79
11	65	80

30/05
 aula de ex

12

t = momento da ana
 Lana = 12

$T_{\min}$ = temperatura mínima média
(em $^{\circ}\text{F}$) p/ a instante t
($^{\circ}\text{F}$)

Objetivo: ajustar por MMQ as dadas das duas colunas, usando

$$y = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{12} t\right) + b_1 \sin\left(\frac{2\pi}{12} t\right)$$

$\uparrow$
 $T_{\min}$ ou $T_{\max}$
3 parâmetros

Lembrança MMQ

Ingredientes: • Variáveis: x, t, y, z, w
• que são medidas em conjuntos
 $(x_i, t_i, y_i, z_i, w_i)$

• Equação idealizada: (que coloca em relação essas variáveis)

$$f_1(x, t, y, \dots) a + f_2(x, t, y, \dots) b + f_3(x, t, y, \dots) c = h(x, t, y, \dots)$$

Exemplos vistos

a) $ax^2 + by^2 = 1$ (2º, 2 parâmetros)

b) $a + bx^2 = y$

c) $a = y - 0.3x^2$ (2º, 1 parâmetro)

d) $a + bx = y$ (ajuste da reta)

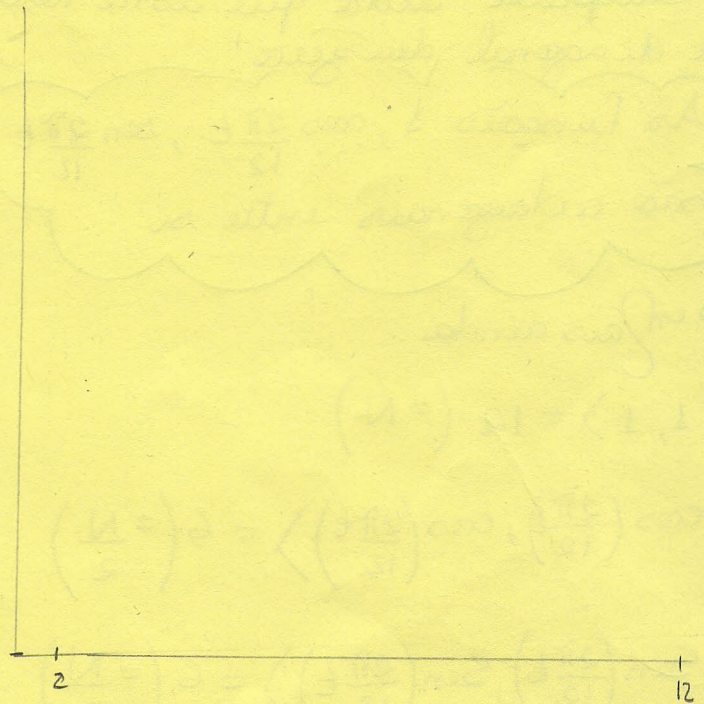
Ideia: ① Pensar que estamos diante de um sistema sobre-determinado.
n equações

② Em geral, não há solução p/ o sistema

③ (a, b, c) que minimiza a resíduo quadrática é a solução de

$$\begin{aligned} & \bullet \langle f_1, f_1 \rangle a + \langle f_1, f_2 \rangle b + \langle f_1, f_3 \rangle c = \langle f_1, h \rangle \\ & \bullet \langle f_2, f_1 \rangle a + \langle f_2, f_2 \rangle b + \langle f_2, f_3 \rangle c = \langle f_2, h \rangle \\ & \bullet \langle f_3, f_1 \rangle a + \langle f_3, f_2 \rangle b + \langle f_3, f_3 \rangle c = \langle f_3, h \rangle \end{aligned} \quad (11)$$

Aula 23 06.06.2017 - Seica



comentários da atividade passada

→ Dadas essencialmente periódicas

• $T_{\max} = y$ e $T_{\min} = y$

• duas variáveis t, y

• dados (t_i, y_i) , $i=0, \dots, 11$
12 pontos $N=12$

(por acaso, $t_i = i$)

→ Ajuste pedido

$$y = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{12} t\right) + b_1 \sin\left(\frac{2\pi}{12} t\right)$$

variando t
em $[0, 12]$

faz $\frac{2\pi}{12} t$ variar em $[0, 2\pi]$

① $\langle 1, 1 \rangle a_0 + \langle 1, \cos\left(\frac{2\pi}{12} t\right) \rangle a_1 + \langle 1, \sin\left(\frac{2\pi}{12} t\right) \rangle b_1 = \langle 1, y \rangle$

$$\text{II} \quad \left\langle \cos\left(\frac{2\pi t}{12}\right), 1 \right\rangle a_0 + \left\langle \cos\left(\frac{2\pi t}{12}\right), \cos\left(\frac{2\pi t}{12}\right) \right\rangle a_1 \\ + \left\langle \cos\left(\frac{2\pi t}{12}\right), \sin\left(\frac{2\pi t}{12}\right) \right\rangle b_1 = \left\langle \cos\left(\frac{2\pi t}{12}\right), y \right\rangle$$

$$\text{III} \quad \left\langle \sin\left(\frac{2\pi t}{12}\right), 1 \right\rangle a_0 + \left\langle \sin\left(\frac{2\pi t}{12}\right), \cos\left(\frac{2\pi t}{12}\right) \right\rangle a_1 \\ + \left\langle \sin\left(\frac{2\pi t}{12}\right), \sin\left(\frac{2\pi t}{12}\right) \right\rangle b_1 = \left\langle \sin\left(\frac{2\pi t}{12}\right), y \right\rangle$$

→ Surpresa! Tudo que está fora da diagonal deu zero!

As funções $1, \cos \frac{2\pi t}{12}, \sin \frac{2\pi t}{12}$ são ortogonais entre si

→ n ais ainda:

$$\langle 1, 1 \rangle = 12 (=N)$$

$$\left\langle \cos\left(\frac{2\pi t}{12}\right), \cos\left(\frac{2\pi t}{12}\right) \right\rangle = 6 \left(= \frac{N}{2}\right)$$

$$\left\langle \sin\left(\frac{2\pi t}{12}\right), \sin\left(\frac{2\pi t}{12}\right) \right\rangle = 6 \left(= \frac{N}{2}\right)$$

$$\rightarrow a_0 = \frac{1}{N} \langle 1, y \rangle = \left(\frac{1}{N} \sum y_i = \bar{y} \right)$$

média das y_i s

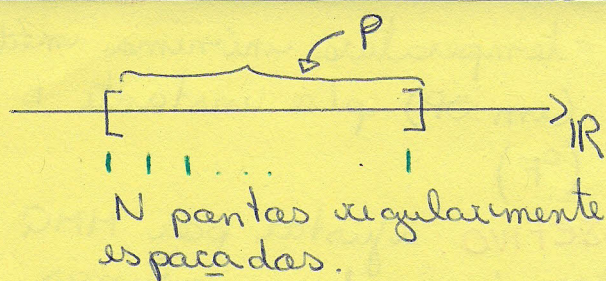
$$\rightarrow a_1 = \frac{2}{N} \left\langle \cos\left(\frac{2\pi t}{12}\right), y \right\rangle$$

$$\rightarrow b_1 = \frac{1}{\left(\frac{N}{2}\right)} \left\langle \sin\left(\frac{2\pi t}{12}\right), y \right\rangle$$

Segredo:

1) A partição da período é regular

2) N é par



→ As funções

$$1, \cos\left(\frac{2\pi t}{P}\right), \sin\left(\frac{2\pi t}{P}\right),$$

$$\cos\left(2 \cdot \frac{2\pi t}{P}\right), \sin\left(2 \cdot \frac{2\pi t}{P}\right),$$

$$\cos\left(3 \cdot \frac{2\pi t}{P}\right), \sin\left(3 \cdot \frac{2\pi t}{P}\right), \dots,$$

$$\cos\left(k \cdot \frac{2\pi t}{P}\right), \sin\left(k \cdot \frac{2\pi t}{P}\right).$$

$$(k | 2k+1 < N)$$

— são ortogonais entre si (i.e. o sistema de MMQ sai diagonal)

$$\langle 1, 1 \rangle = N$$

$\langle f, f \rangle = N/2$, p/ todas as outras funções dessa lista.

→ Então podemos ajustar

$$y = a_0 + \sum_{j=1}^k a_j \cos\left(j \cdot \frac{2\pi t}{P}\right) + \sum_{j=1}^k b_j \sin\left(j \cdot \frac{2\pi t}{P}\right)$$

e a resultada será:

$$a_0 = \frac{1}{N} \langle 1, y \rangle$$

$$a_j = \frac{1}{\left(\frac{N}{2}\right)} \left\langle \cos\left(j \cdot \frac{2\pi t}{P}\right), y \right\rangle, \forall j=1, \dots, k$$

$$b_j = \frac{1}{\left(\frac{N}{2}\right)} \left\langle \sin\left(j \cdot \frac{2\pi t}{P}\right), y \right\rangle, \forall j=1, \dots, k$$

$$= A \cos\left(\frac{2\pi}{12}t - \theta\right) = A \cos\left(\frac{2\pi}{12}\left(t - \underbrace{t_0}_{\text{DEF } t_0}\right)\right)$$

$$y = \underbrace{a_0}_{T_{\min} \text{ média}} + \underbrace{A}_{\text{Variação máx. fora da média}} \cos\left(\frac{2\pi}{12}(t - t_0)\right)$$

período 12

$$T_{\min}: t_0 = \frac{12}{2\pi} \cdot 0,46 = 0,88$$

