Aula 08 - 31.03.2017 - Sexta.

→ Revisão: Interpolação de Hermite

São dados:

- pontos - distintos, ordenados, não necessariamente regularmente espaçados

$$\underbrace{t_0 \dots t_1}_{I_1}\ \underbrace{t_2}_{I_2} \dots \underbrace{t_{n-1}\ \ t_n}_{I_n}$$

$I_i = [t_{i-1}, t_i]$ célula i

t_i: nós. — t_0, t_n: nós externos

$t_1, \dots, t_{n-1}$: nós internos.

- Valores:

$f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_n)$

- derivadas:

$f'(t_0), f'(t_1), \dots, f'(t_n)$

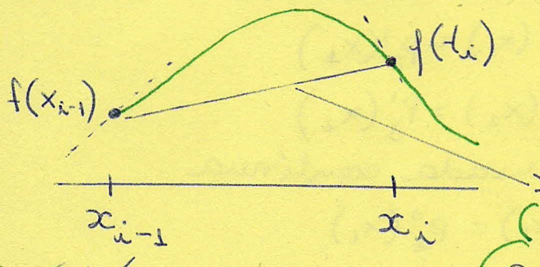
PROBLEMA: Encontrar uma função H em $[x_0, x_n]$ t.q.:

1) $H|I_i$ (lê-se "H restrita ao intervalo I_i") é igual a um polinômio cúbico p_i ($\in P_3$)

2) $H(x_0) = f(x_0)$
$H(x_1) = f(x_1)$
$\vdots$
$H(x_n) = f(x_n)$

3) $H'(x_0) = f'(x_0)$
$\vdots$
$H'(x_n) = f'(x_n)$

VEJAM: Esse problema pode ser resolvido célula a célula.



coef. angular
$m_i = \Delta f[t_{i-1}, t_i]$

I)

t	$f(t)$
t_{i-1}	

I)

t	f		
t_{i-1}	$f(t_{i-1})$	d_{i-1}	
t_{i-1}	$f(t_{i-1})$		①
t_i	$f(t_i)$	$\Delta f[t_{i-1}, t_i]$	
t_i	$f(t_i)$	d_i	②

① $\dfrac{\Delta f[t_{i-1}, t_i] - d_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}$

③

② $\dfrac{d_i - \Delta f[t_{i-1}, t_i]}{t_i - t_{i-1}}$

③ $\dfrac{d_{i-1} + d_i - 2\Delta f[t_{i-1}, t_i]}{(t_i - t_{i-1})^2}$

II) $p_i(t) = f(t_{i-1}) + d_{i-1}(t - t_{i-1})$
$+ \dfrac{m_i - d_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}(t - t_{i-1})^2 +$
$\dfrac{d_{i-1} + d_i - 2m_i}{(t_i - t_{i-1})^2}(t - t_{i-1})^2(t - t_i)$

Problema do Spline cúbico.

→ São dados:

- pontos $t_0, \dots, t_n$ (da mesma forma)
- valores $f(t_0), \dots, f(t_n)$
- mais duas condições de contorno (nós ou próx. dos nós externos)

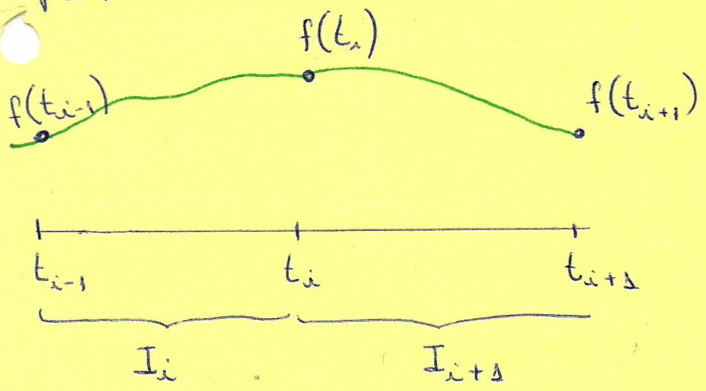
→ Problema: Achar uma função S em $[t_0, t_n]$, duas vezes diferenciá~~dos~~vel, tal que

1) $S(t_0) = f(t_0)$
$\vdots$
$S(t_n) = f(t_n)$ } Interpola

2) $S|_{I_i}$ é cúbico ($= p_i \in P_3$)

3) Satisfaz as condições de contorno

→ O que isso implica para cada p_i?



$\underbrace{\begin{array}{ll} .\,p_i(t_{i-1}) = f(t_{i-1}) & .\,p_{i+1}(t_i) = f(t_i) \\ .\,p_i(t_i) = f(t_i) & .\,p_{i+1}(t_{i+1}) = f(t_{i+1}) \end{array}}_{2n \text{ exigências}}$

→ diferenciabilidade de S: $p_i'(t_i) = p_{i+1}'(t_i)$

↳ Mas, para quais "i"?

$\underbrace{\text{nós internos}: i = 1, \dots, n-1}_{n-1 \text{ exigências}}$

→ $S'' = p_i''(t_i) = p_{i+1}''(t_i)$

$\underbrace{i = 1, \dots, n-1.}_{n-1 \text{ exigências}}$

total: $4n-2$ exigências

TODAS SÃO EQUAÇÕES ENVOLVENDO OS COEFICIENTES DOS p_i's, QUE SÃO AS ICÓGNITAS.

→ Equações são lineares

Por exemplo:

I $p_i(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$

$p_{i+1}(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_2 t^3$

II $p_i'(t_i) = p_{i+1}'(t_i)$:

$1.a_1 + (2t)a_2 + (3t_i^2)a_3 =$

$1 b_1 + (2t_i)b_2 + (3t_i^2)b_3$

Balanço:

n polinômios cúbicos $\Rightarrow 4n$ coefs (incógnitas)

$4n-2$ (equações lineares)

As duas equações que faltam são as condições de contorno!

→ tipos de condições de contorno

- SPLINE "Grampeada"

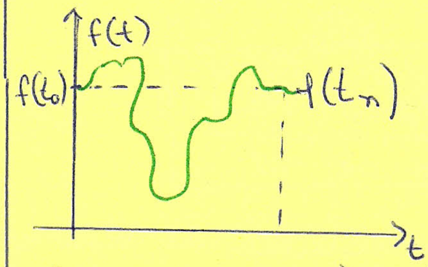
$p_1'(t_0) = d_0$ (dado), $p_n'(t_n) = d_n$ (dado)

- SPLINE "NATURAL"

$p_1''(t_0) = 0$ e $p_n''(t_n) = 0.$

- SPLINE PERIÓDICO

Precisa que, nos dados, se tenha $f(t_0) = f(t_n)$



1º condição: $p_n'(t_n) = p_1'(t_0)$

2º condição: $p_n''(t_n) = p_1''(t_0)$

Next:

1) Tratar as derivadas $d_0, \dots, d_n$ como icógnitas

2) Usar a continuidade de S'' ($n-1$ eqs) condições de contorno (2 eq)

Aula 09 - 04.04.2017 - Terça

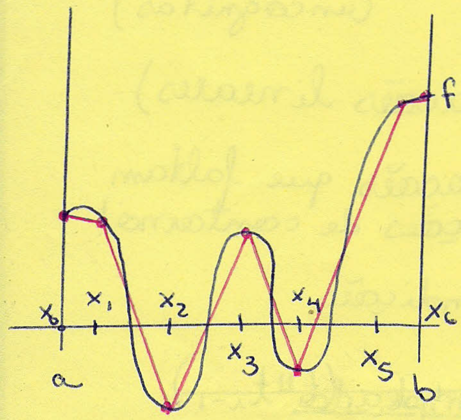
↳ aula no CEC.

Aula 10 - 07.04.2017 } Aula de
Aula 11 - 18.04.2017 } exercícios

Aula ~~10~~ 12 – 25/04/2017 – Terça

Recordando:

→ Método dos trapézios



$(n=6)$

6 células.

$$\boxed{\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f \approx \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p_f[x_{i-1}, x_i]}$$

↳ "trocamos cada intervalinho por uma reta".

↳ fórmula para $\int_{x_{i-1}}^{x_i} p_f[x_{i-1}, x_i]$

$$= \boxed{(x_i - x_{i-1}) \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}}$$

→ caso especial: células de mesmo tamanho.

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \left(\begin{array}{c} = \text{altura do} \\ \text{trapézio} \end{array} \right)$$

→ $$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{2n} \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_{i-1}) + f(x_i) \right] \text{ ou}$$

ainda, $$\frac{b-a}{2n} \left\{ f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n) \right\}$$

→ Método de Simpson

↳ A "filosofia" é a mesma em relação ao método anterior

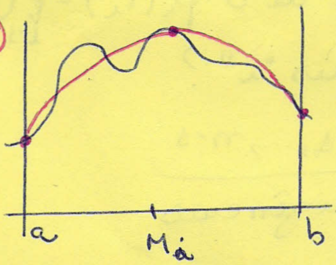
- divisão em células
- Aproximação polinomial em cada célula.

I Olharemos para o ponto médio de cada célula

II Aproximaremos a integral na célula por

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} p_f[x_{i-1}, m_i, x_i]$$

III



⇝ aproximação por uma parábola.

→ Fórmula dessa integração

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} p_f[x_{i-1}, m_i, x_i] =$$

$$(x_i - x_{i-1}) \cdot \frac{f(x_{i-1}) + 4f(m_i) + f(x_i)}{6}$$

– caso de partição regular

$$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{6n} \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_{i-1}) + 4f(m_i) + f(x_i) \right]$$

$$= \frac{b-a}{6n} \left\{ f(x_0) + 4f(m_1) + 2f(x_1) + 4f(m_2) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + 4f(m_n) + f(x_n) \right\}$$

1- Vamos resolver a seguinte integral $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$

(I) tabela de valores da f para usar nos métodos. Vamos pegar de $\frac{1}{6}$ em $\frac{1}{6}$ e arredondamento n 6ª casas

x	f(x)
0	4
1/6	3,891892
2/6	3,6
3/6	3,2
4/6	2,769231
5/6	2,360656
6/6	2

→ trapézios possíveis (partição regular)

$n = 6, 3, 2, 1$

(II) Simpson

Para usar os ptos médios como ptos da tabela, um bom $\underline{\underline{n}}$ é o $\underline{\underline{3}}$.

(III) método dos trapézios com $n=6$.

$$\sum_{T,\, n=6} = 37{,}643558$$

$$\underbrace{T_f(6)}_{\text{trapézios de } f \text{ c/ } n=6} = \frac{1-0}{2\times 6} \times 37{,}643558 = 3{,}136963$$

(IV) Simpson com $n=3$

$$\sum_{S,\, n=3} = 56{,}548654$$

$$S_f(3) = \frac{1-0}{6\times \underset{\uparrow\, n}{3}} \times 56{,}548654 = \ldots$$

$3{,}14159\,\cancel{1889}\,2$!! $\ddot{\text{O}}$

Dedução da fórmula do modelo de Simpson.

$P_f[x_{i-1}, m_i, x_i]$

(I)

x	
m_i	$f(m_i)$
x_{i-1}	$f(x_{i-1})$
x_i	$f(x_i)$

$f(m_i), f(x_{i-1}) \to \Delta f[m_i, x_{i-1}]$; $f(x_{i-1}), f(x_i) \to \Delta f[x_{i-1}, \cancel{m_i}, x_i]$; $\to (*)$

$(*)\ \Delta f[x_{i-1}, m_i, x_i]$

(II)

$$P_f[x_{i-1}, m_i, x_i] = \underbrace{f(m_i)}_{\text{I}} + \underbrace{\Delta f[m_i, x_{i-1}](x-m_i)}_{\text{II}} + \underbrace{\Delta f[x_{i-1}, m_i, x_i](x-m_i, x-x_{i-1})}_{\text{III}}$$

(III)

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\text{I}) = f(m_i)(x_i - x_{i-1}) = 2s\, f(m_i) \quad (**)$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\text{II}) = \Delta f[m_i, x_{i-1}] \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-m_i)\,dx$$

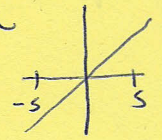
$w = x - m_i$

$dw = dx$

$x_{i-1} \to x_{i-1} - m_i = -s$

$x_i \to x_i - m_i = s$ $\quad (**)$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\text{II}) = \Delta f[m_i, x_{i-1}] \underbrace{\int_{-s}^{+s} w\,dw}_{\text{função ímpar}} = 0$$



$g(-w) = -g(w)$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (\text{III}) = \Delta_f[x_{i-1}, x_i, m_i] \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-m_i)\underbrace{(x-x_{i-1})}_{w + m_i - x_{i-1} \,=\, w+s}dx$$

$$= \Delta f[\dots] \int_{-s}^{s} w(w+s)\,dw =$$

$$\Delta f[\dots] \left\{ \underbrace{\int_{-s}^{s} w^2\,dw}_{\frac{2s^3}{3}} + s \underbrace{\cancel{\int_{-s}^{s} w\,dw}}_{0} \right\}$$

(IV) $$\int P_f = 2s\,f(m_i) + \frac{2s^3}{3}\,\Delta f[x_{i-1}, m_i, x_i]$$

(V) Reescrevendo a tabela em (I):

$$\begin{array}{c|c}
x & \\
\hline
m_i & f(m_i) \\
 & \quad \dfrac{f(x_{i-1}) - f(m_i)}{-s} \\
x_{i-1} & f(x_{i-1}) \qquad\qquad (*) \\
 & \quad \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{2s} \\
x_i & f(x_i)
\end{array}$$

$$(*)\ \frac{\dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{2s} + \dfrac{2f(x_{i-1}) + 2f(m_i)}{2s}}{s}$$

(*) Ou ainda,

$$\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i) - 2f(m_i)}{2s^2}$$

(VI) Usando (IV)

$$= 2s\,f(m_i) + \frac{2s^3}{3} \cdot \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i) - 2f(m_i)}{2s^2}$$

$$= 2s \left\{ f(m_i) + \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i) - 2f(m_i)}{6} \right\}$$

$$= 2s\,\frac{f(x_{i-1}) + 4f(m_i) + f(x_i)}{6}$$

Aula 13 - 28/04/2017 - Sexta

→ Greve geral

Aula ~~12~~ 14 - 02/05/2017 - Terça

Interpolação Polinomial

↳ Duas situações:

(I) Apenas x_i's e seus respectivos $f(x_i)$'s - FORMA DE NEWTON

(II) x_i's, $f(x_i)$'s e algumas $f'(x_i)$'s.

Exemplo: Encontre o polinômio p em P, tal que $p(-2)=0$, $p(1)=-1$, $p(3)=1$ e $\underbrace{p'(1)=2,\ p'(3)=5}_{\text{dentro do mesmo conj. de pontos.}}$

x_i	$f(x_i)$
-2	0
1	-1
1	-1
3	1
3	1

Duplicar os x_i's, que possuem derivada no enunciado.

Interpolação de Hermite

↳ Até agora, tínhamos 4 infos para um polinômio em P_3.

↳ Agora, queremos interpolar em P_3, mas temos $P(n+1)$

- Basta colocar função H que, restrita a cada intervalo, seja um polinômio cúbico.
- H é C^1.
- Não, necessariamente, a 2ª derivada é contínua.

→ Isso leva ao problema do Spline cúbico

Dados: $x_0, x_1, \dots, x_n$ + (condições de contorno: ∃ duas!)

Quais ~~as~~ são derivadas $d_0, \dots, d_n$ no ~~plo~~ problema de Hermite, que fazem a função ser C^2? Chame de S a função correspondente.

Obs: O spline cúbico minimiza

$$\int_{x_0}^{x_n} (g''(x))^2 dx, \ \forall g \in C^2,$$

que satisfaz a mesma condição de contorno e interpola os ptos.

- condições de contorno

1) Grampeada (clamped)

$$S'(x_0) = \underbrace{\cancel{d_0}}_{\text{Dado}}{}^{r} \qquad S'(x_n) = \underbrace{\cancel{d_n}}_{\text{Dado}}{}^{s}$$

↳ duas incógnitas são eliminadas de cara $d_0 = r$ e $d_n = s$.

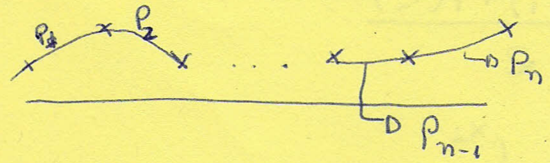
2) Natural

$S''(x_0) = 0$ e $S''(x_n) = 0$.

(ou outros valores, mas aí não seria "natural")

obs: Poderia misturar 1) e 2) tipo $S'(x_0) = r$, $S''(x_1) = 0$

3) Não-é-nó (not-a-knot)



$P_1 = P_2$ → único pol nos 2ºs intervalos

$P_{n-1} = P_n$ → único pol. nos 2 últimos intervalos.

⇕

$$P'''_{\cancel{1}}(x_1) = P_1'''(x_1) \quad \left(\begin{array}{c} S \text{ é } C^3 \\ \text{em } x_1 \end{array}\right)$$

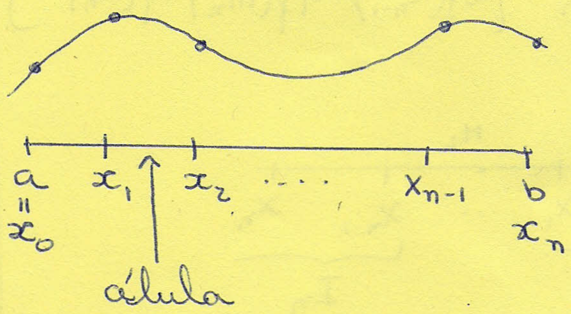
$$P'''_{n-1}(x_{n-1}) = P'''_n(x_{n-1})$$

4) Periódica (só se $f(x_0) = f(x_n)$)

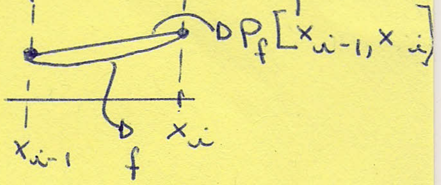
$S'(x_0) = S'(x_n)$: $P_1'(x_0) = P_n'(x_n)$: $d_0 = d_n$

$S''(x_0) = S''(x_n)$ $P_1''(x_0) = P_n''(x_n)$

Integração numérica



(I) Trapézios: Aproximar f por $P_f[x_{i-1}, x_i]$



(II) Simpson

$$P_f\left[x_{i-1}, \frac{x_{i-1}+x_i}{2}, x_i\right] \in P_2$$

Ⓘ $\displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_i} f \simeq \int_{x_{i-1}}^{x_i} p_f[x_{i-1}, x_i] = (x_i - x_{i-1}).(*)$

$(*)\ \dfrac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$

Ⓘⓘ $\displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_i} f \simeq \int_{x_{i-1}}^{x_i} p_f[x_{i-1}, m_i, x_i] =$

$(x_i - x_{i-1}).\ \dfrac{f(x_{i-1}) + 4f(m_i) + f(x_i)}{6}$

- Partição regular $(x_i - x_{i-1}) = \dfrac{b-a}{n}, \forall i$

Ⓘ $\displaystyle\int_a^b f \simeq \frac{b-a}{2n}\left\{ f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(n) \right\}$

Ⓘⓘ $\displaystyle\int_a^b f \simeq \frac{b-a}{\cancel{2n}\ 6n}\left\{ f(x_0) + 4f(m_1) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + 4f(m_n) + f(x_n) \right\}$