

AGA0505 - Análise de Dados em Astronomia I - Lista #10

Data de entrega: 27/06/2017

Seja claro nas respostas, explicando seu raciocínio; não serão aceitas respostas sem justificativa;

1. Suponha que temos um modelo dado por $\mu(\alpha, \beta) = \alpha x + \beta x^2$
 - (a) Encontre a matriz Hessiana
 - (b) Encontre, a partir da matriz Hessiana, a matriz de covariância
 - (c) Qual é a variância de β ?
 - (d) Discuta como a localização das medidas X_i afeta a variância de β .
2. Vamos testar métodos de ajuste diante de situações que acontecem frequentemente na Astronomia.
 - (a) Gere uma gaussiana bivariada com 1000 pares (x, y) , centrada em $(0, 0)$ com $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1$ e $\text{cov}[x, y] = 0,7$. Faça um gráfico dos pontos gerados.
 - (b) Utilizando o método dos Mínimos Quadrados, ajuste uma reta $(y = ax + b)$ aos pontos (x, y) .
 - (c) Agora, desconsidere os pontos nos quais $y > 0$. Em que situação isso pode ocorrer na Astronomia?
 - (d) Repita o ajuste com esses pontos, os valores de a e b mudaram? Discuta o efeito. Apresente um gráfico com os dois conjuntos de pontos e as duas retas ajustadas.
3. Vamos fazer um simples ajuste via MCMC
 - (a) Gere uma sequência de 100 pares (x, y) onde $x = 1, 2, 3, \dots, 100$ e y é tomado de uma distribuição gaussiana $G(y) \propto \exp[(y - \bar{y})/2\sigma_y^2]$, com $\bar{y} = ax + b$. Escolha a e b e σ_y^2 à vontade¹. Faça um gráfico dos pontos gerados.
 - (b) Agora, vamos considerar os 100 pontos gerados como *medidas* (x, y) . Utilize uma *likelihood*² Gaussiana $\mathcal{L}(y|a, b, c) = \exp[(y - \bar{y})/2\sigma_y^2]$, com $\sigma_y^2 = c$, e média $\bar{y} = ax + b$. Nosso objetivo é determinar os parâmetros do modelo a, b, c a partir das nossas medidas.
 - (c) Começando de $(a, b, c) = (0, 0, 1)$ como valor inicial no espaço de parâmetros, calcule sua *likelihood* e proceda de acordo com o algoritmo de Metropolis para construir uma cadeia de parâmetros. Note que você precisa ajustar o tamanho do passo para explorar corretamente o espaço de parâmetros, tome um tempo para testar essas escolhas - discuta isso brevemente na resposta.
 - (d) Calcule as médias e as medianas das distribuições para os parâmetros (a, b, c) . Quais mais se aproximam mais das soluções corretas para os parâmetros (a, b, c) ? Quantos passos foram necessários? Faça um histograma das distribuições geradas para os parâmetros a, b, c . Da cadeia gerada, determine a região de 68%CL após marginalizar sobre c .

★

¹Teste com alguns valores diferentes, em especial, não faça σ_y^2 grande demais ou pequeno demais.

²Verossimilhança