

## AGA0505 - Análise de Dados em Astronomia I - Lista #10

Data de entrega: 27/06/2017

*Seja claro nas respostas, explicando seu raciocínio; não serão aceitas respostas sem justificativa;*

1. Suponha que temos um modelo dado por  $\mu(\alpha, \beta) = \alpha x + \beta x^2$ 
  - (a) Encontre a matriz Hessiana
  - (b) Encontre, a partir da matriz Hessiana, a matriz de covariância
  - (c) Qual é a variância de  $\beta$ ?
  - (d) Discuta como a localização das medidas  $X_i$  afeta a variância de  $\beta$ .
2. Vamos testar métodos de ajuste diante de situações que acontecem frequentemente na Astronomia.
  - (a) Gere uma gaussiana bivariada com 1000 pares  $(x, y)$ , centrada em  $(0, 0)$  com  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1$  e  $\text{cov}[x, y] = 0,7$ . Faça um gráfico dos pontos gerados.
  - (b) Utilizando o método dos Mínimos Quadrados, ajuste uma reta ( $y = ax + b$ ) aos pontos  $(x, y)$ .
  - (c) Agora, desconsidere os pontos nos quais  $y > 0$ . Em que situação isso pode ocorrer na Astronomia?
  - (d) Repita o ajuste com esses pontos, os valores de  $a$  e  $b$  mudaram? Discuta o efeito. Apresente um gráfico com os dois conjuntos de pontos e as duas retas ajustadas.
3. Vamos fazer um simples ajuste via MCMC
  - (a) Gere uma sequência de 100 pares  $(x, y)$  onde  $x = 1, 2, 3, \dots, 100$  e  $y$  é tomado de uma distribuição gaussiana  $G(y) \propto \exp[(y - \bar{y})/2\sigma_y^2]$ , com  $\bar{y} = ax + b$ . Escolha  $a$  e  $b$  e  $\sigma_y^2$  à vontade<sup>1</sup>. Faça um gráfico dos pontos gerados.
  - (b) Agora, vamos considerar os 100 pontos gerados como *medidas*  $(x, y)$ . Utilize uma *likelihood*<sup>2</sup> Gaussiana  $\mathcal{L}(y|a, b, c) = \exp[(y - \bar{y})/2\sigma_y^2]$ , com  $\sigma_y^2 = c$ , e média  $\bar{y} = ax + b$ . Nosso objetivo é determinar os parâmetros do modelo  $a, b, c$  a partir das nossas medidas.
  - (c) Começando de  $(a, b, c) = (0, 0, 1)$  como valor inicial no espaço de parâmetros, calcule sua *likelihood* e proceda de acordo com o algoritmo de Metropolis para construir uma cadeia de parâmetros. Note que você precisa ajustar o tamanho do passo para explorar corretamente o espaço de parâmetros, tome um tempo para testar essas escolhas - discuta isso brevemente na resposta.
  - (d) Calcule as médias e as medianas das distribuições para os parâmetros  $(a, b, c)$ . Quais mais se aproximam mais das soluções corretas para os parâmetros  $(a, b, c)$ ? Quantos passos foram necessários? Faça um histograma das distribuições geradas para os parâmetros  $a, b, c$ . Da cadeia gerada, determine a região de 68%CL após marginalizar sobre  $c$ .

★

---

<sup>1</sup>Teste com alguns valores diferentes, em especial, não faça  $\sigma_y^2$  grande demais ou pequeno demais.

<sup>2</sup>Verossimilhança