

Geometria Analítica

Produto Misto

Prof. Dr. Lucas Barboza Sarno da Silva

Produto Misto

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} \\ \vec{v} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k} \\ \vec{w} = x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} + z_3 \vec{k} \end{array} \right.$$

Representação: $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ ou $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

Exercício

Calcular o produto misto dos vetores:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k} \\ \vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{w} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k} \end{array} \right.$$

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{Resposta: } (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 27$$

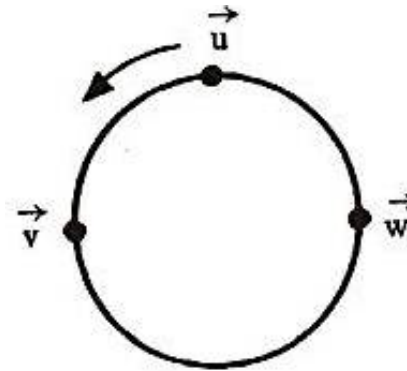
Propriedades do Produto Misto

I) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

- se um dos vetores é nulo
- se dois deles são colineares
- se os três são coplanares

II) O produto misto independe da ordem circular dos vetores, isto é:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = (\vec{w}, \vec{u}, \vec{v})$$



Entretanto, o produto misto muda de sinal quando se trocam as posições de dois vetores consecutivos, isto é:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$$

$$\text{III)} \quad (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \vec{r}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{u}, \vec{v}, \vec{r})$$

$$\text{IV)} \quad (\vec{u}, \vec{v}, \lambda \vec{w}) = (\vec{u}, \lambda \vec{v}, \vec{w}) = (\lambda \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \lambda (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

Exemplos

1) Verificar se são coplanares os seguintes vetores:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u} = (3, -1, 4) \\ \vec{v} = (1, 0, -1) \\ \vec{w} = (2, -1, 0) \end{array} \right.$$

Exemplos

2) Qual deve ser o valor de m para que os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ sejam coplanares?

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a} = (m, 2, -1) \\ \vec{b} = (1, -1, 3) \\ \vec{c} = (0, -2, 4) \end{array} \right.$$

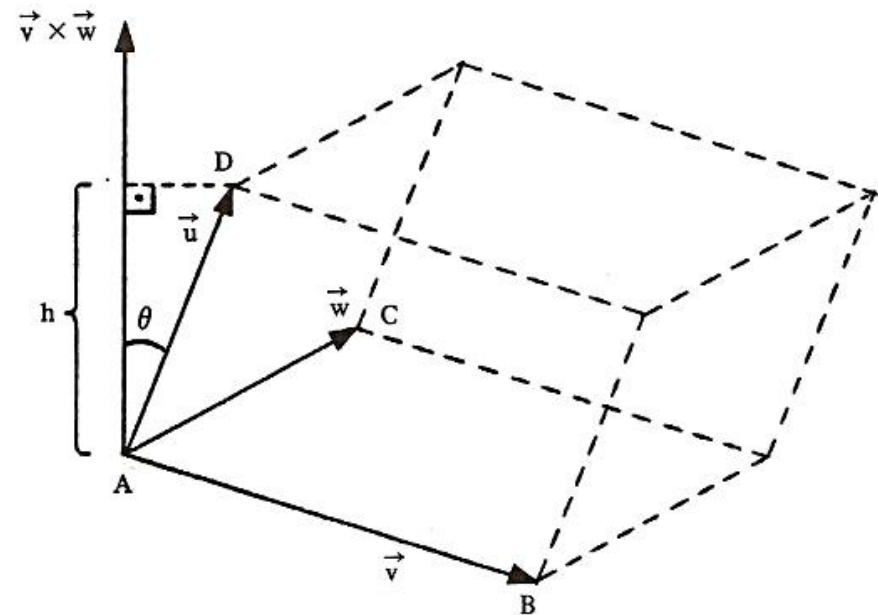
Exemplos

3) Verificar se $A(1, 2, 4)$, $B(-1, 0, -2)$, $C(0, 2, 2)$ e $D(-2, 1, -3)$ estão no mesmo plano.

Interpretação geométrica do módulo do Produto Misto

Geometricamente, o módulo do produto misto $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ é igual ao volume do paralelepípedo de arestas determinadas pelos vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$.

$$V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$$



Exemplos

1) Dados os vetores $\vec{u} = (x, 5, 0)$, $\vec{v} = (3, -2, 1)$ e $\vec{w} = (1, 1, -1)$, calcular o valor de x para que o volume do paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ seja 24 u.v. (unidades de volume).