#### Métodos de Busca Heurística

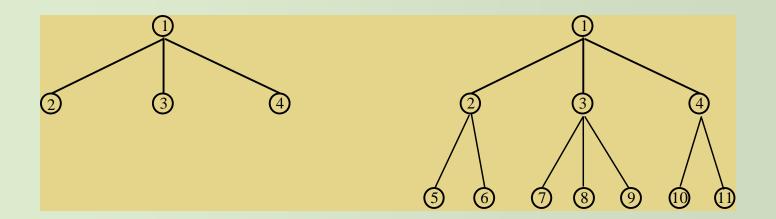
- Estratégias e técnicas de busca
- Exemplos ilustrativos e de aplicação
- Utilização do software OTIMIZA

#### Técnicas de Busca Heurística

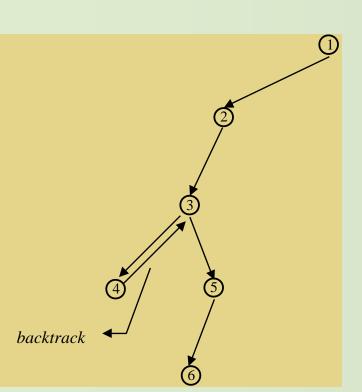
- Um problema de busca pode ser visto como um processo de se determinar um percurso, através de uma estrutura em forma de árvore, para se alcançar um estado meta a partir de um estado inicial.
- Uma árvore de busca é um grafo orientado, constituída por nós e arcos, na qual cada nó representa um estado do problema, e cada arco representa como se relacionam os estados referentes aos nós por ele interligados

#### Técnicas de Busca Heuristica

• <u>busca em amplitude (breadth-first search)</u>: a partir do nó raíz, são gerados todos os seus nós sucessores, pela utilização de todas as regras ou operadores possíveis. Este processo se repete para todos os nós sucessores, até que a aplicação de alguma regra ou operador resulte num estado que corresponda à meta do problema



#### Técnicas de Busca Heuristica



busca em profundidade (*depth-first* 

search: a partir do nó raíz, em cada nível é gerado um único nó sucessor. A árvore é percorrida por um único caminho, até que a solução do problema seja alcançada ou que o caminho seja interrompido. Um caminho é interrompido quando se alcança um nó terminal (nó que não é a solução e que não possui sucessores), quando um nó representa um retorno a um estado anterior, ou quando se alcança um estado considerado "pior" (p. ex. mais longo, de maior custo). Em qualquer destes casos, um procedimento de retrocesso (backtrack) é realizado

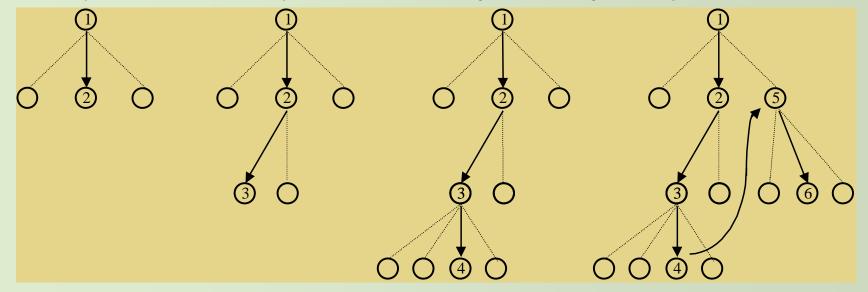
#### Técnicas de Busca Heuristica

- <u>gerar e testar (generate-and-test)</u>: variante da técnica de busca em profundidade, em que se procura avançar por um caminho na árvore de busca, e ao final se verifica se o estado alcançado representa uma solução para o problema.
- <u>escalada da montanha (hill climbing)</u>: variante da técnica de busca em profundidade, que utiliza uma função heurística para direcionar o processo de busca. A partir do nó inicial gera-se um sucessor pela aplicação de um operador. Se o nó sucessor representar um estado melhor que o estado corrente, avança-se por este caminho; caso contrário, aplica-se outro operador em busca de um nó mais promissor.
- gradiente (gradient search): variante de hill climbing. Em cada nível da árvore de busca, todos os possíveis nós sucessores são avaliados, e o melhor deles é escolhido para ser expandido, desde que represente um estado que seja melhor que o estado corrente.

#### Técnicas de Busca Heurística

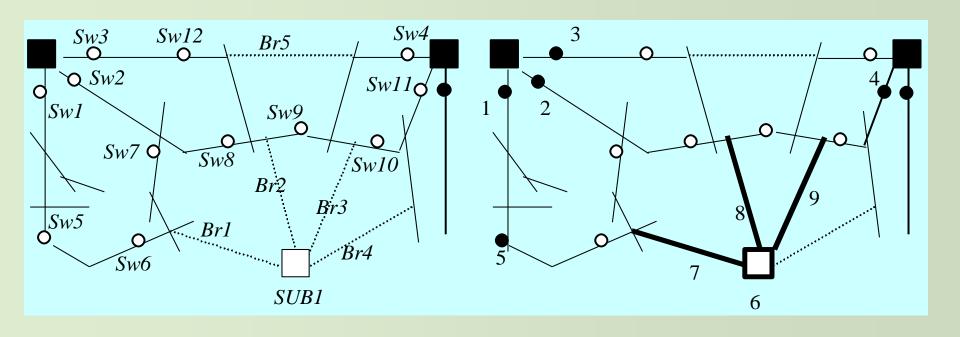
busca pela melhor escolha (best-first)

**Search**: combina as vantagens dos processos de busca em profundidade e em amplitude. Em cada passo são avaliados todos os nós possíveis de serem expandidos, pela aplicação de uma função heurística de avaliação específica para o problema. A busca é então continuada a partir do nó, dentre todos aqueles gerados até então, que se apresente como o mais promissor, ou seja, aquele que apresenta o maior potencial em direção à solução do problema.



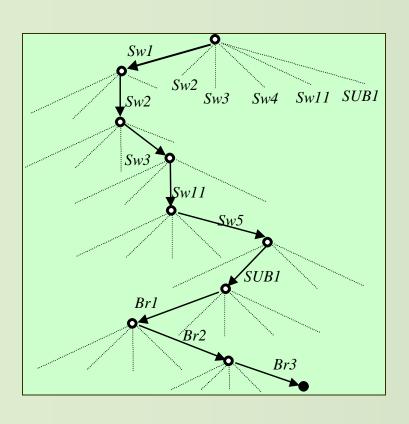
# Estratégias Heurísticas

#### Estratégia construtiva

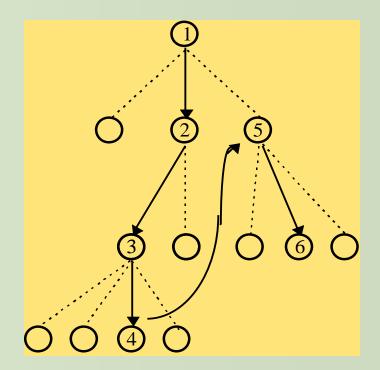


## Procedimentos de Busca

#### Profundidade

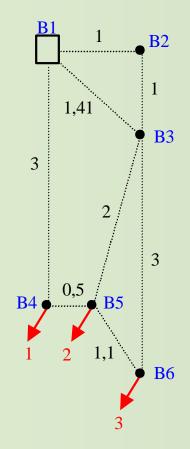


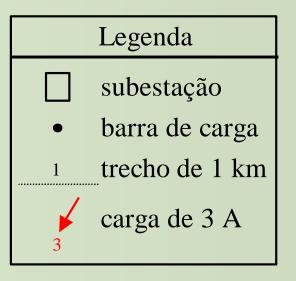
#### Melhor Escolha



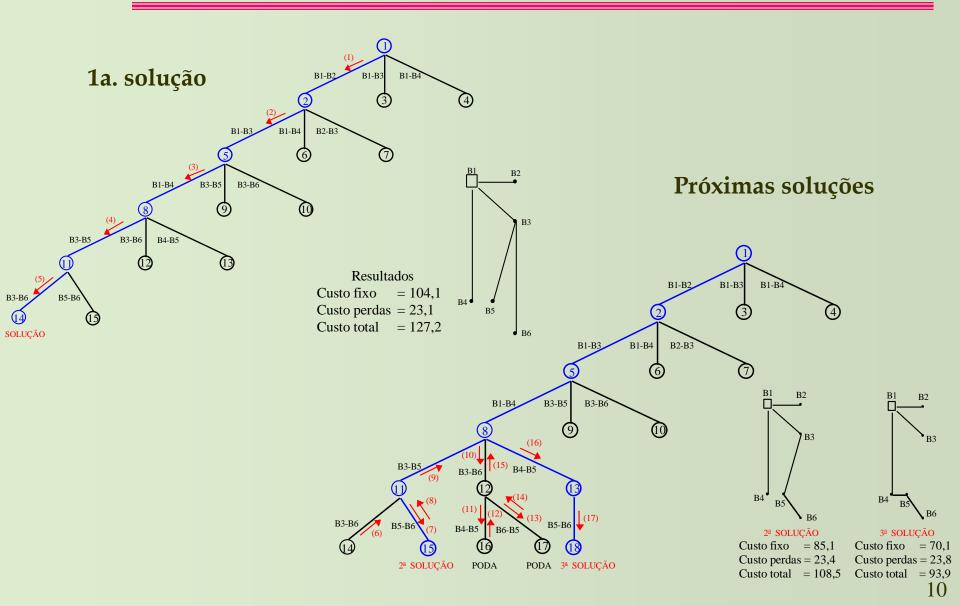
# **Exemplo**

**Objetivo**: Minimização dos custos (investimentos e perdas)



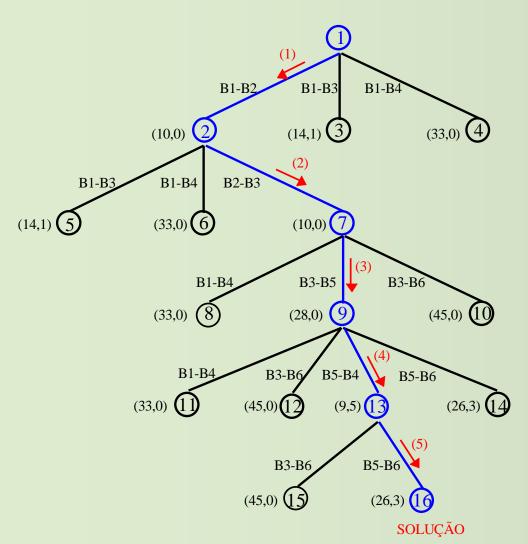


# Resultados: busca em profundidade simples



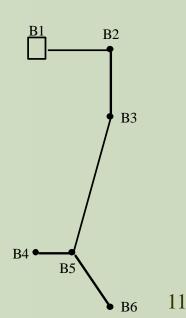
# Resultados: busca em profundidade com estrutura de preferências

#### Primeira solução

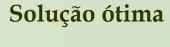


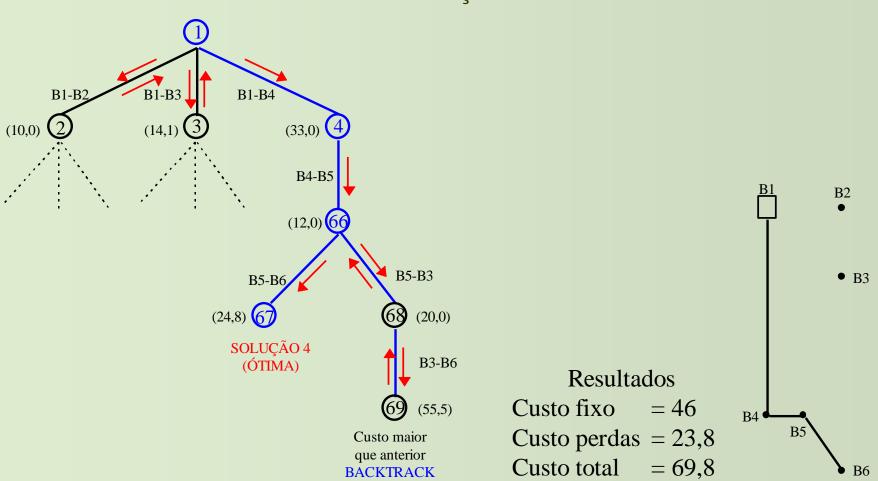
#### Resultados

Custo fixo = 56 Custo perdas = 27,8 Custo total = 83,8

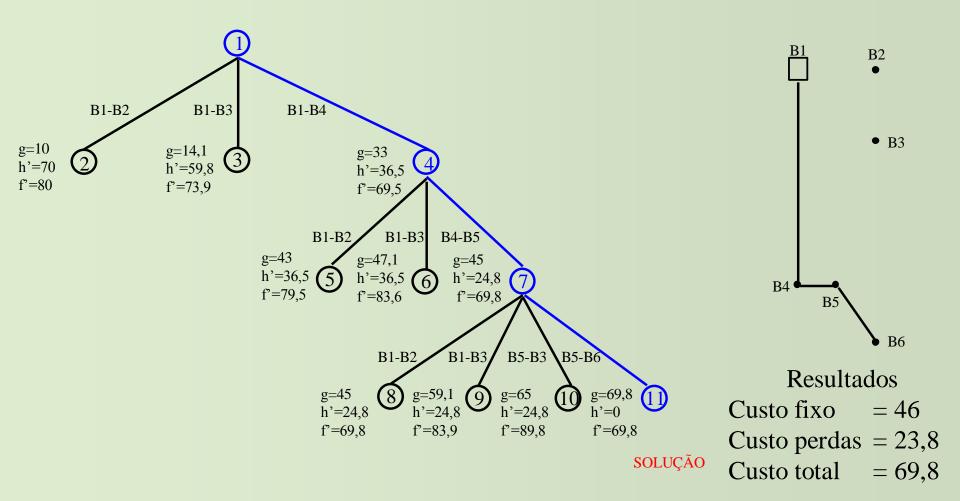


# Resultados: busca em profundidade com estrutura de preferências





# Resultados: busca pela melhor escolha



#### Análise dos resultados

- Busca em profundidade com função de avaliação:
  - ✓ para a primeira solução foram analisados 15 nós e expandidos 5. O custo é 34 % menor que o da primeira solução com busca em profundidade simples.
  - ✓ a solução ótima foi a 4a. encontrada, e foram avaliados 68 nós da árvore de busca.
- Busca pela melhor escolha:
  - √ foram analisados 11 nós e expandidos somente 3

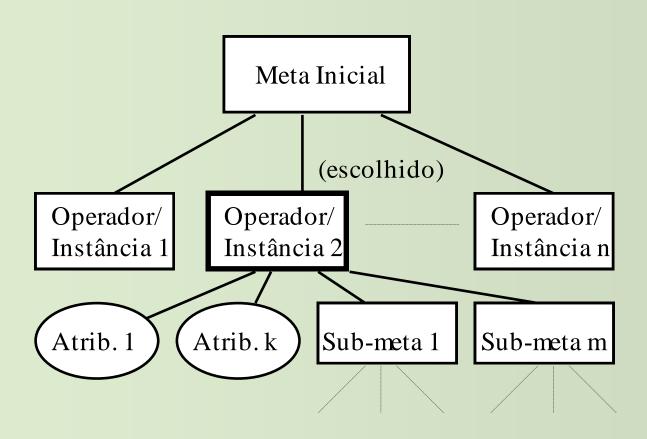
#### Técnica de busca - melhor escolha

- f'(n) = g(n) + h'(n) (A\* algorithm)
  - g(n): custo para atingir o nó n, a partir do nó inicial;
  - h(n): estimativa de custo para alcanár o nó meta.

Se h'sempre subestima h (o valor exato para alcançar o nó meta), então o algoritmo leva à solução ótima.

#### Problemas de Decisão com Restrições (CDP)

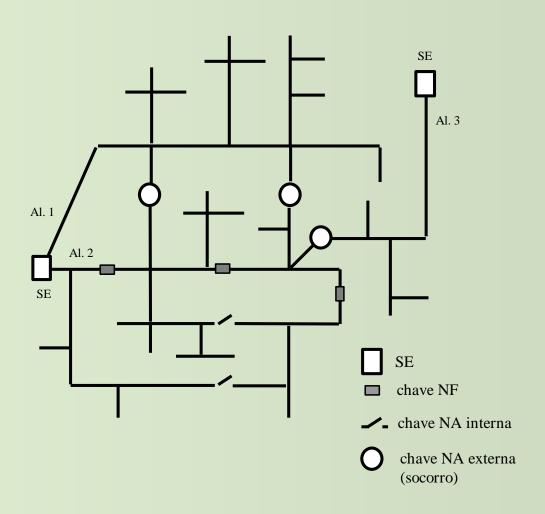
# Estrutura Hierárquica:



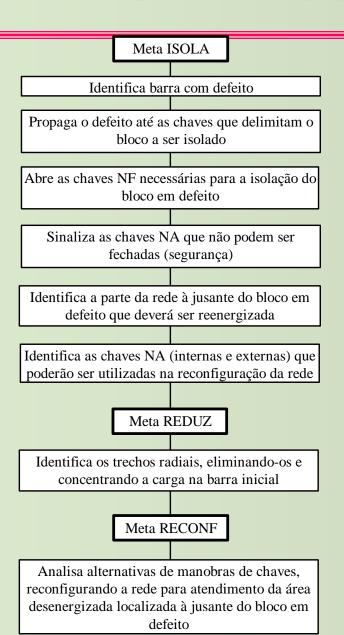
## Principais elementos do CDP

- metas: definem o problema e são dinamicamente geradas pela aplicação dos operadores durante o processamento;
- frames: representam classes e objetos de um problema específico;
- operadores: entidades que podem ser aplicadas quando um conjunto de condições é satisfeito. A sua aplicação resulta em novas sub-metas e novas instâncias aos objetos das *frames*;
- **Restrições**: condições que não podem ser violadas durante o processo.

# Exemplo 1: Reconfiguração de redes



## Estratégia - reconfiguração



## Elementos utilizados

Elemento	Itens no Problema de Reconfiguração	
Metas	ISOLA REDUZ RECONF	
Frames	BARRA (dados e variáveis de barras) LIGAC (dados e variáveis de ligações) GERA (dados gerais) SIST (resultados globais)	
Operadores	ISOLA_TRECHO (meta ISOLA) ISOLA_CHAVE (meta ISOLA) ABRE_NF (meta ISOLA) BLOCO_DES (meta ISOLA) FINALIZA_DEF (meta ISOLA) REDUZ_REDE (meta REDUZ) FECHA_CHAVE (meta RECONF, construtivo) ABRE_CHAVE (meta RECONF, destrutivo) FINALIZA_RECONF (meta RECONF)	
Restrições	Máxima queda de tensão Máximo carregamento de cabos Máximo carregamento de subestações Limites de índice de mérito	

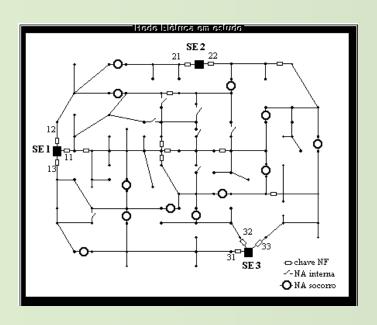


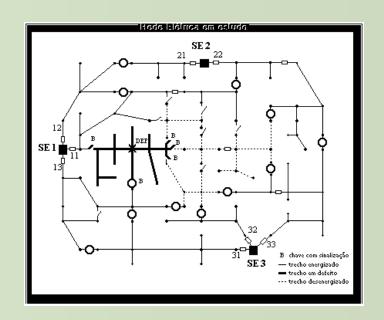
```
(frame templates,
 (BARRA, tipo: s, ger: r, potat: f, potre: f, estado: s, coorx: i, coory: i,
 dvbar: r),
 (LIGAC, inibar: s, fimbar: s, estado: s, fluxo%: f, capacidade: r, zr: r,
 zx: r, comp:r, elem: s, tipo: s),
 (SIST, novosub: p, maxfluxo: f, maxdv: f, custo: f, merito: f, indice: f,
 fsemax: f, fsetot: f, estado: s, alfa ind: r, alfa dv: r, alfa car, r, alfa se:
 r, malha_ilh: r,),
 (INDICE, custo: f, merito: f, indice: f),
 (GERAL, pcost: fs, pmer: fs, f1car: r, f2car: r, f1tens: r, f2tens: r, n1car:
 r, n2car: r, n3car: r, pcar: r, n1tens: r, n2tens: r, n3tens: r, ptens: r)
(frame instancias,
 (BARRA,
   (BAR01, subes, 0.3, .000, .000, .000, .000, .000, .000, CON, 100, 900, .0)
   (BAR02,carga,0.0,.012,.011,.013,.006,.005,.006,CON,700,900,.0)
   (BAR03,carga,0.0,.020,.019,.021,.015,.014,.016,CON,800,600,.0)
 (LIGAC,
   (LIG01,BAR01,BAR02,USADA,.0,.0,.0,.12,.1,.2,2.3,TRECHO, )
   (LIG02,BAR01,BAR03,USADA,.0,.0,.0,.12,.1,.2,1.5,TRECHO,)
   (LIG03,BAR02,BAR04,USADA,.0,.0,.0,.12,.1,.2,1.5,TRECHO, )
   (LIG53,BAR47,BAR46,USADA,.0,.0,.0,.08,.1,.2,0.1,CHAVE,NF)
   (LIG82,BAR28,BAR53,ABERTA,.0,.0,.0,.12,.1,.2,0.5,CHAVE,NA)
 (GERAL.
   (GERA1,mi,m,70.,90.,0.9,0.95,10.,7.,1.,1.,1.,7.,10.,1.)
```

#### Exemplo de operador

```
(FECHA_CHAVE,
 (variaveis,
  (?usa:s,?abre:s,?chav:s,?desl:s,?inibar:s,?fimbar:s,linha:
  LIGAC,?sis:SIST,?sub:SIST)
 (meta_aplicavel,(Reconf,?sis))
 (dado_que,
  (let,?usa,USADA),
  (let,?abre,ABERTA),
  (let,?chav,CHAVE),
  (let,?desl,DESL),
  (xmatch,?linha(.elem,?chav,.estado,?abre,:inibar:BARRA.
  estado,?ener,:fimbar:BARRA.estado,?desl)),
  (let,?inibar,?linha.inibar),
  (let,?fimbar,?linha.fimbar),
 (contingencias,(def,?linha))
 (novas instancias,(?sub))
 (novas_atribuicoes,
  (atribua,?sis.novosub,?sub),
  (atribua,?linha.estado,?usa),
  (atribua,?fimbar:BARRA.estado,?ener),
  (fluxo_fuzzy,?sis),
  (atribua,?sub.custo,?sis.custo),
  (atribua,?sub.maxfluxo,?sis.maxfluxo),
  (atribua,?sub.maxdv,?sis.maxdv),
 (novas metas,
  (Reconf,?sub)
```

# Configurações inicial / bloco em defeito

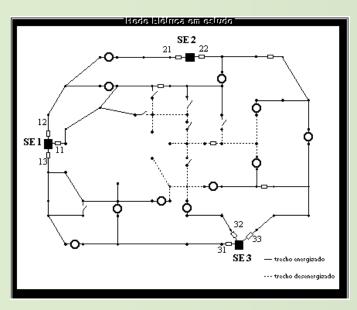




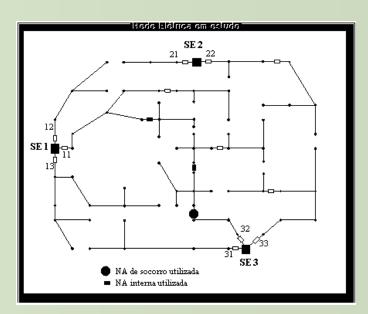
Rede p/ análise

Bloco em defeito

## Configurações – bloco isolado e ótima



Bloco isolado e área desenergizada

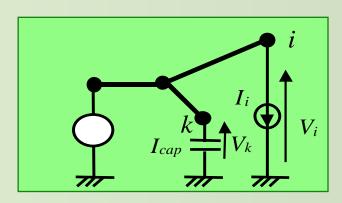


Melhor solução encontrada

#### Exemplo 2: Alocação de bancos de capacitores

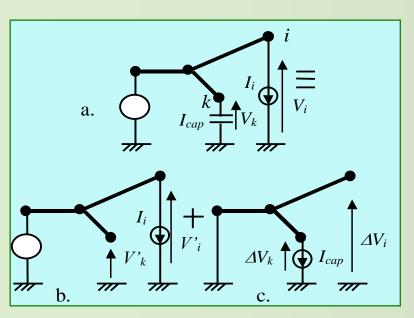
#### Ganho de tensão:

$$Ganho_{k} = \sum_{i \in \Omega_{b}} \Delta V_{i} / Custo_{cap}$$



#### Capacitores em derivação

Variação de tensão devido a um capacitor na rede



$$V_{k} = V'_{k} - z_{kk} j q_{cap} V_{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_{k} = \frac{V'_{k}}{1 + j z_{kk} q_{cap}} \cong \frac{V'_{k}}{1 - x_{kk} q_{cap}}$$

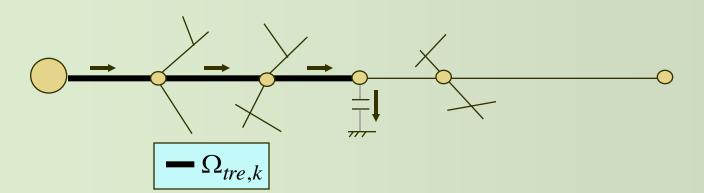
## Capacitores em derivação

Variação de perdas

$$\sum_{p \neq \in \Omega_{tre,k}} \Delta p_{qp}$$

#### onde:

$$\Delta p_{qp} = R_{pq} I_{cap,k} \left( 2I_{i,pq} - I_{cap,k} \right)$$



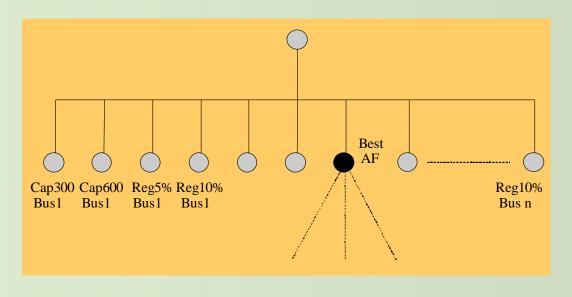
#### Modelamento no CDP

<b>CDP Elementos</b>	Items in the Planning Problem
Frames	BUS (bus data and variables)
	CONNECTION (feeder data & variables)
	SECTOR (delimited by switches)
	SYSTEM (global results)
Operadores	STATE_PRESENT
1	INSTALL_CAP
	INSTALL_REG
	FINALIZE
Restrições	Capacity limits
	Voltage limits
	Losses variation
Meta	STATE
	INSTALL

## Operador INSTALL\_CAP

```
(INSTALL CAP
 (variables,
 bus:BUS,?sector:SECTOR,?sys:SYST,
 ?sub:SYST))
 (applicable goal, (Install,?sys))
 (provided that,
 (match,?bus(namebl:SECTOR.capac,'')))
 (contingencies, (fault,?bus))
 (new instances, (?sub))
 (new assignments,
    (assign,?sys.newsub,?sub)
   (install cap,?bus)
   (flow fuzzy,?sys)
   (fprint,?bus)
   (assign,?sub.loss,?syst.loss),
    (assign,?sub.n bancos,?sist.n bancos)
 (new goals,
    (Instal,?sub))
```

#### Estrutura de preferências

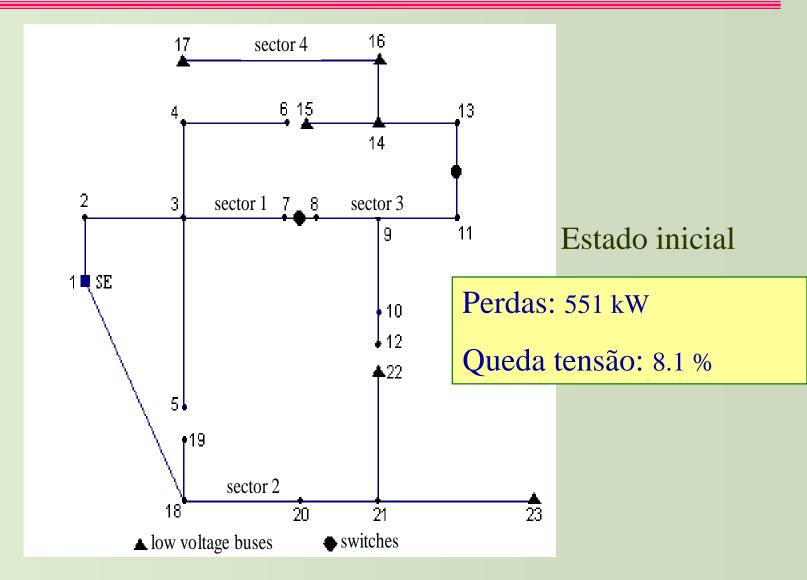


$$AF = \max \left( \frac{p_{losses} G_{\Delta losses} + p_{gain} G_{\Delta v}}{p_{losses} + p_{gain}} \right)$$

$$G_{\Delta losses} = \frac{C_{losses} \sum_{pq \in \Omega_{re,k}} \Delta p_{qp}}{Cq_{cap}}$$

$$G_{\Delta v} = \frac{C_{\Delta v} \sum_{i \in \Omega_b} \Delta V_i}{Cq_{cap}(or C_{reg})}$$

#### Caso de alocação de capacitores



#### Alocação de bancos de capacitores

#### Caso 1:

- Instalação de 300 kVAr em bancos para levar as tensões para a faixa aceitável (max. queda de tensão de 7.5%);
- Meta de minimização de custo de investimentos.

#### Resultados:

- 2 unidades (buses 16 ou 17\* e 23);
- Perdas: 528 kW (redução de 4%),
- Queda de tensão: 7,48%.

<sup>\*</sup>Instalação na barra 17 ocorre quando perdas são consideradas

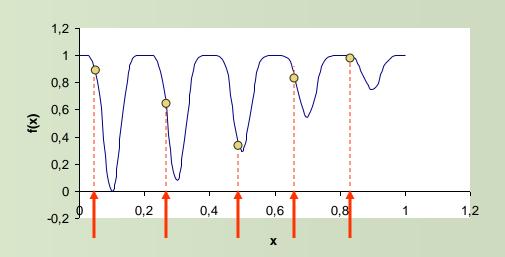
# Algoritmos evolutivos

- Principais conceitos
- Algoritmos Genéticos
- Estratégias Evolutivas
- Exemplos ilustrativos e de aplicação
- Utilização do software OTIMIZA

#### Computação evolutiva

Algoritmos genéticos (AG) Estratégias evolutivas (EE) - Algoritmos Evolutivos (AE)

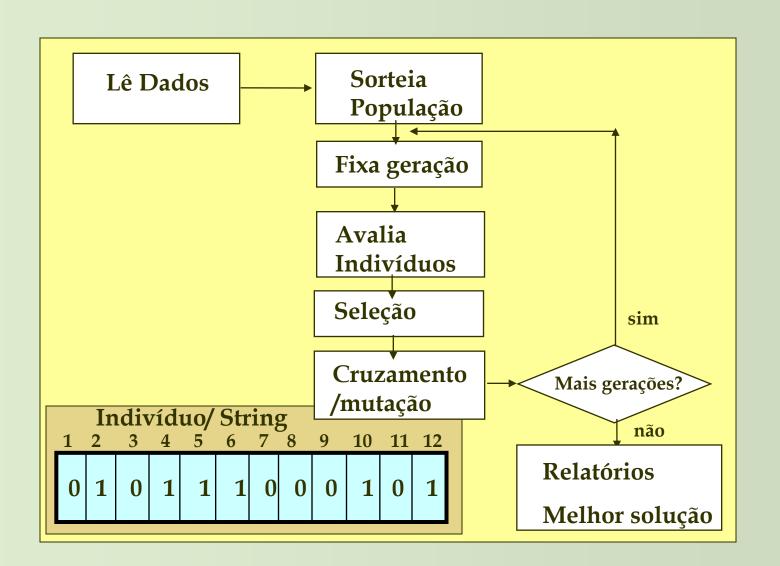
- Indivíduo
- População
- Seleção
- Reprodução
- Mutação



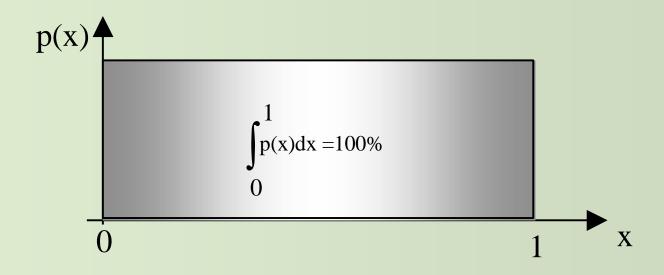
## Bases de Algoritmos Genéticos

- Codificação do conjunto de parâmetros
- Desenvolvimento a partir de uma população de soluções alternativas
- Utilização de informação da função objetivo
- Regras de transição probabilísticas para busca no espaço de soluções.

## Algoritmo Básico

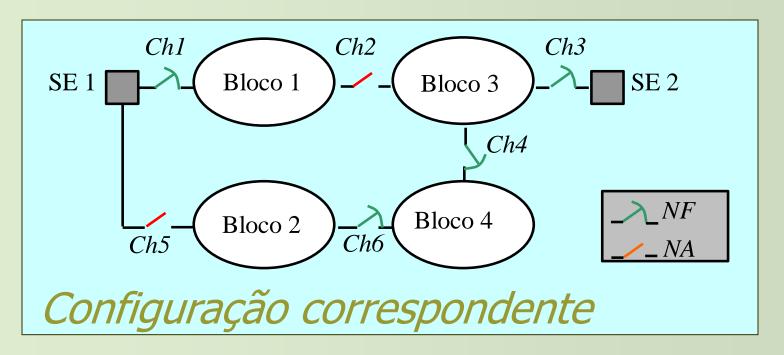


#### Distribuição uniforme / sorteios

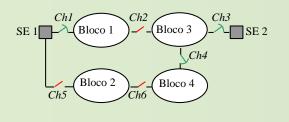


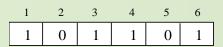
#### Exemplo - Codificação String

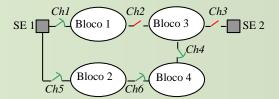
	1	2	3	4	5	6	
string	1	O	1	1	0	1	
					_		



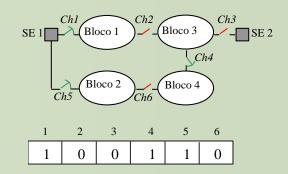
### Configurações iniciais – sorteio

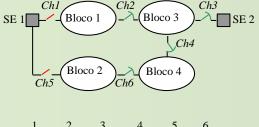


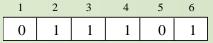


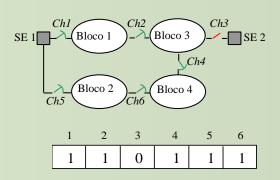


1	2	3	4	5	6
1	0	0	1	1	1





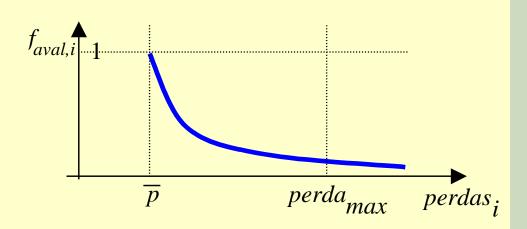




#### Função de Avaliação

#### Exemplo sem restrições:

$$f_{aval,i} = \frac{\overline{p}}{perdas_i}$$

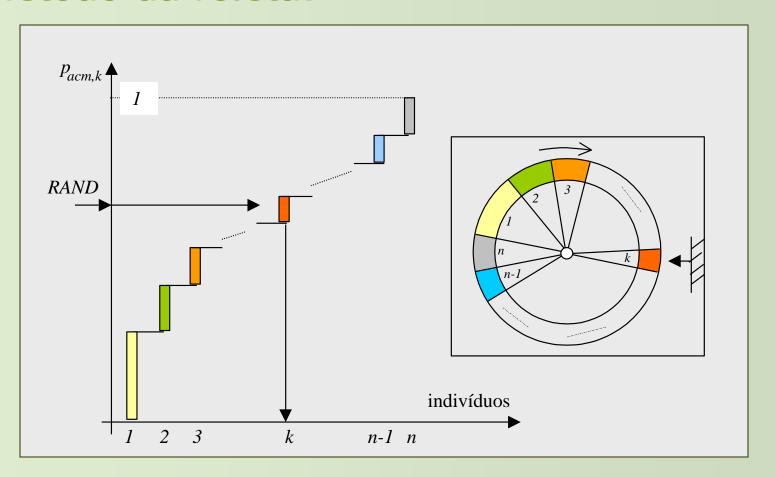


#### com restrições:

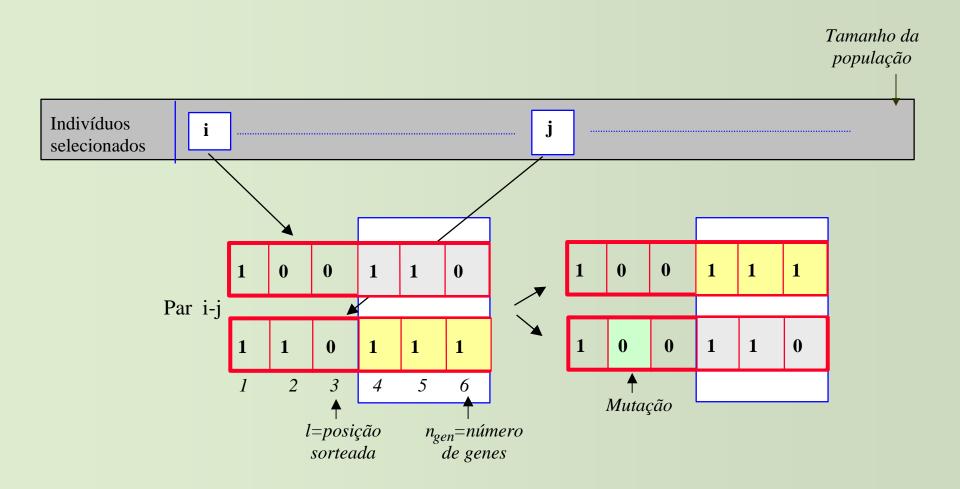
$$f_{aval,i} = \frac{\overline{p}}{perdas_i + r.Penal_i} \qquad Penal_i = \sum_{j=1}^n \{ \max[0, h_j(\mathbf{x})] \}^k$$

#### Reprodução / seleção

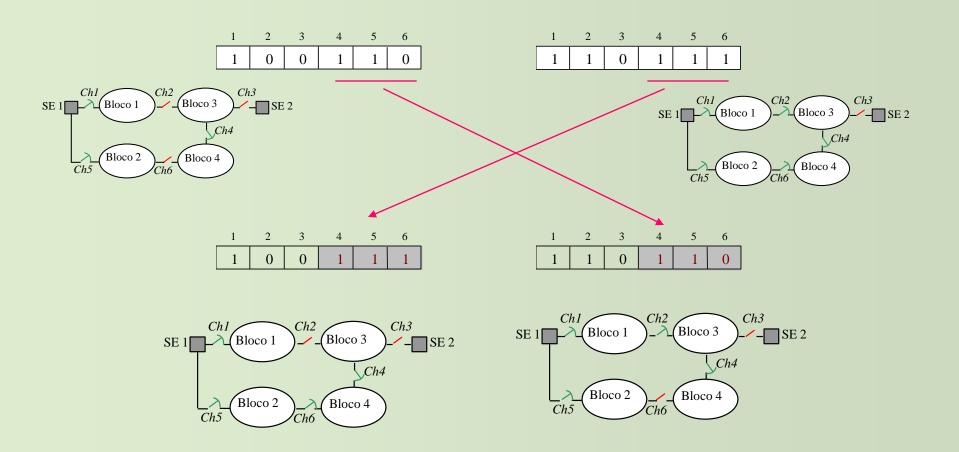
#### Método da roleta:



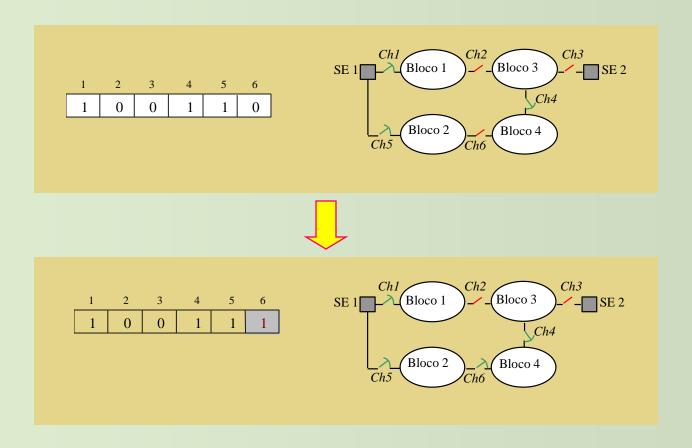
#### Cruzamento e Mutação



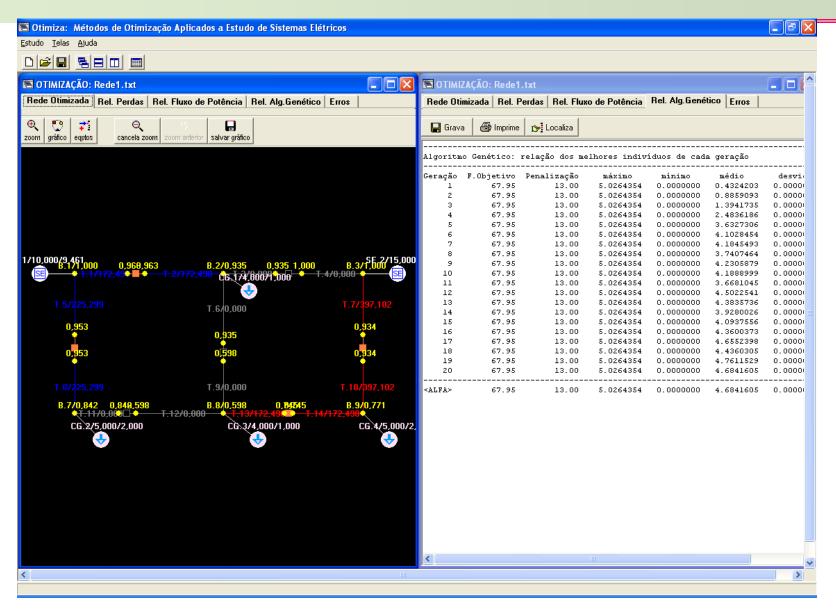
#### Cruzamento na população - exemplo



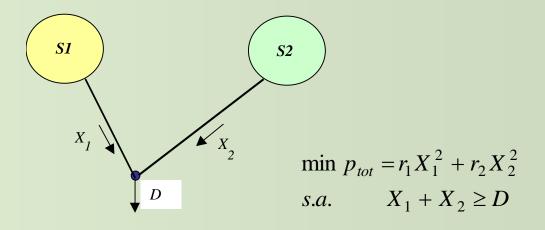
#### Mutação do indivíduo 3 (exemplo)



# Minimização Perdas por AG



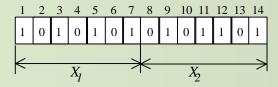
#### Exemplos ilustrativos



$$\min p_{tot} = r_1 X_1^2 + r_2 (D - X_1)^2 = (r_1 + r_2) X_1^2 - 2r_2 D X_1 + r_2 D^2$$

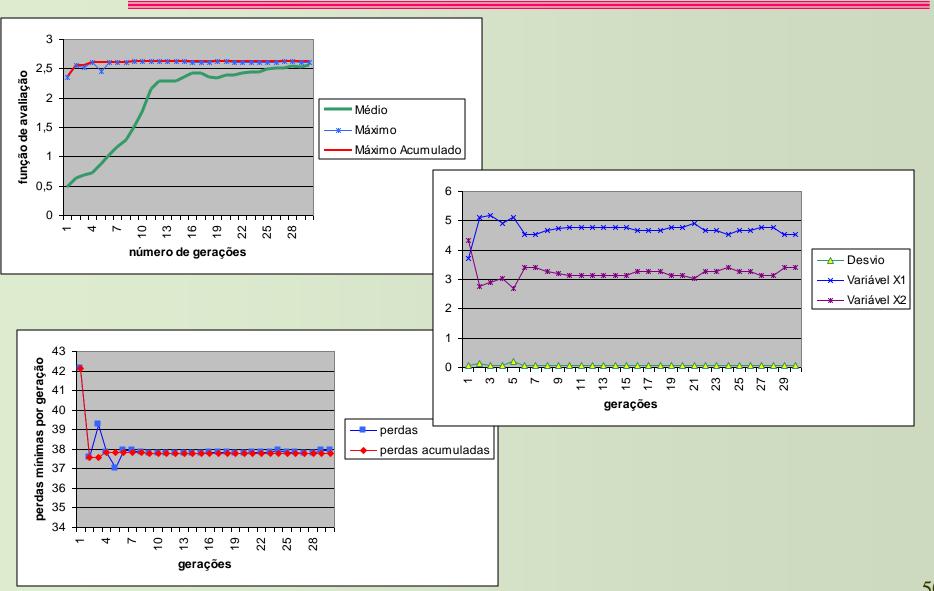
$$X_1 = \frac{r_2}{r_1 + r_2} D; \quad X_2 = \frac{r_1}{r_1 + r_2} D \text{ e } p_{tot} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} D^2$$

#### Resolução por AG



$$\begin{split} X_{1,i} &= \frac{\left(2^{0} bit_{i,1} + 2^{1} bit_{i,2} + 2^{2} bit_{i,3} + 2^{3} bit_{i,4} + 2^{4} bit_{i,5} + 2^{5} bit_{i,6} + 2^{6} bit_{i,7}\right)}{\left(2^{7} - 1\right)} X_{\max} \\ X_{2,i} &= \frac{\left(2^{0} bit_{i,8} + 2^{1} bit_{i,9} + 2^{2} bit_{i,10} + 2^{3} bit_{i,11} + 2^{4} bit_{i,12} + 2^{5} bit_{i,13} + 2^{6} bit_{i,14}\right)}{\left(2^{7} - 1\right)} X_{\max} \\ f_{obj,i} &= r_{1}X_{1,i}^{2} + r_{2}X_{2,i}^{2} + r\left\{\max\left[0, \left(D - X_{1,i} - X_{2,i}\right)\right]\right\}^{2} \end{split}$$

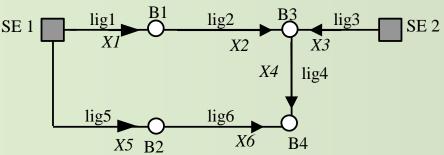
#### Resolução AG



# Resolução AG

	Variá	vel X <sub>1</sub>	Variável X <sub>2</sub>		Variável p <sub>tot</sub>	
Método Utilizado	(pu)	erro (%)	(pu)	erro (%)	(pu)	erro (%)
Exato	0,0480	0	0,0320	0	0,00384	0
PL – aproximação 1	0,0800	66,7	0,0000	100	0,00640	66,7
PL – aproximação 2	0,0400	16,7	0,0400	25,0	0,00400	4,2
AG	0,0479	0,2	0,0315	1,6	0,00378	1,6

#### Exemplo 2



$$\min C_{f} = \min \left( \sum_{i=1}^{6} C_{i} \delta_{i} + \sum_{j=1}^{2} C_{sj} \delta_{sj} \right)$$
s.a. 
$$X_{1} - X_{2} = D_{1}$$

$$X_{5} - X_{6} = D_{2}$$

$$X_{2} + X_{3} - X_{4} = D_{3}$$

$$X_{4} + X_{6} = D_{4}$$

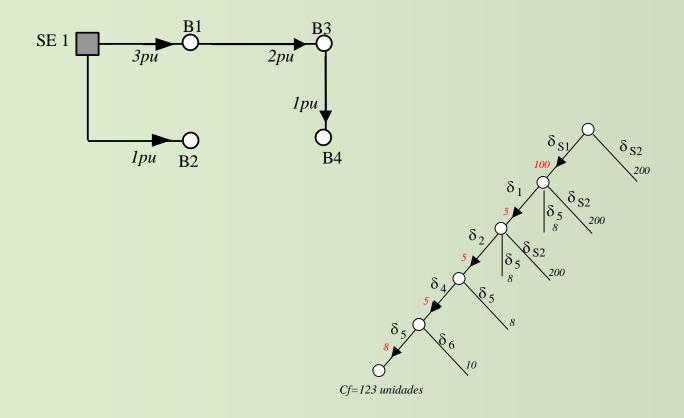
$$X_{i} - M \delta_{i} \leq 0, i = 1, ..., 6$$

$$X_{1} + X_{5} - M \delta_{s1} \leq 0$$

$$X_{3} - M \delta_{s2} \leq 0$$

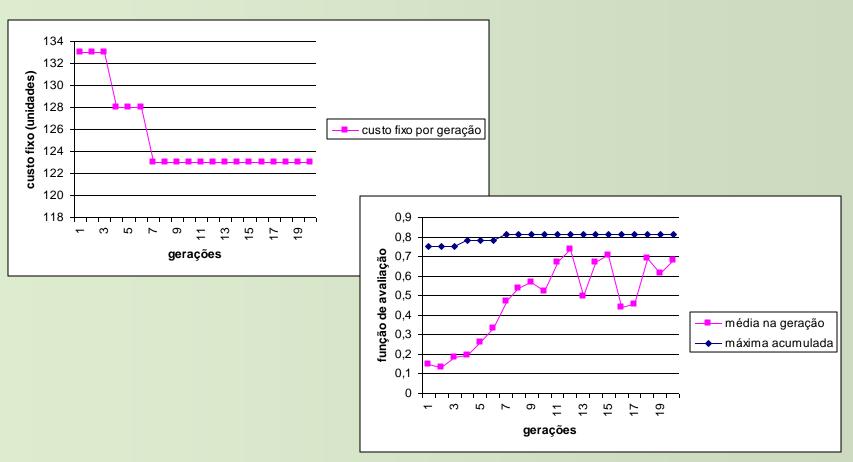
$$\delta_{i}, \delta_{sj} \in \{0,1\}$$

# Exemplo 2

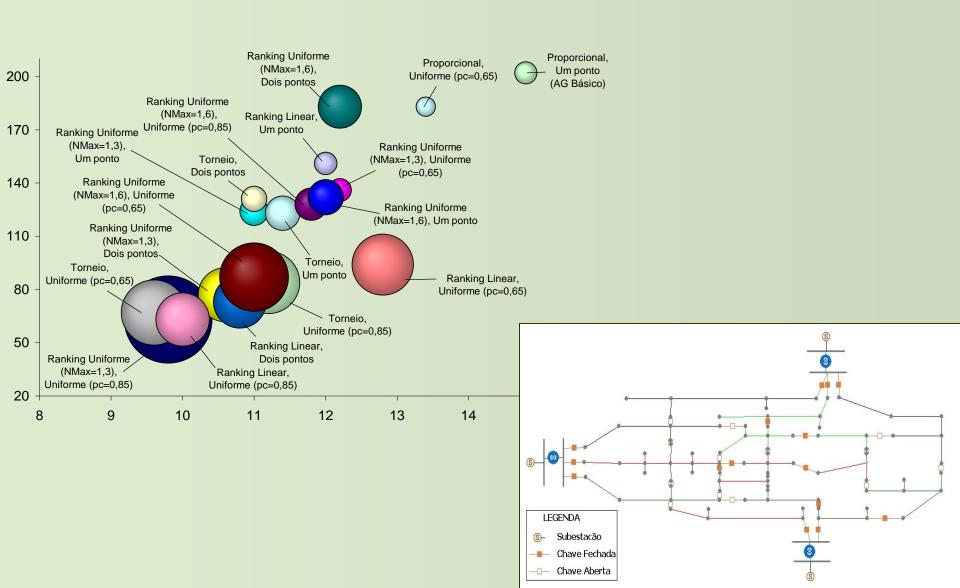


#### Exemplo 2 – por AG

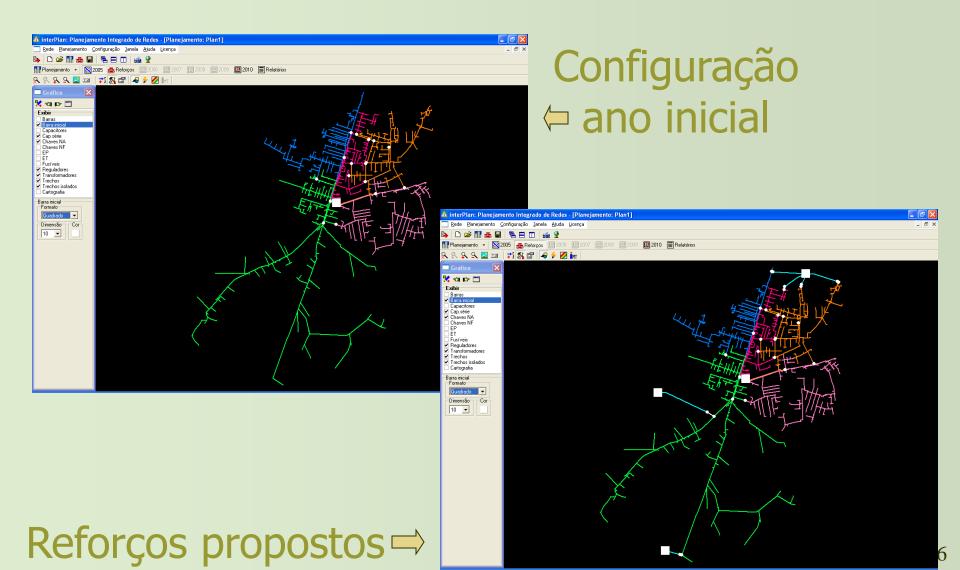
$$f_{obj,i} = C_{f,i} + r.penal_i$$



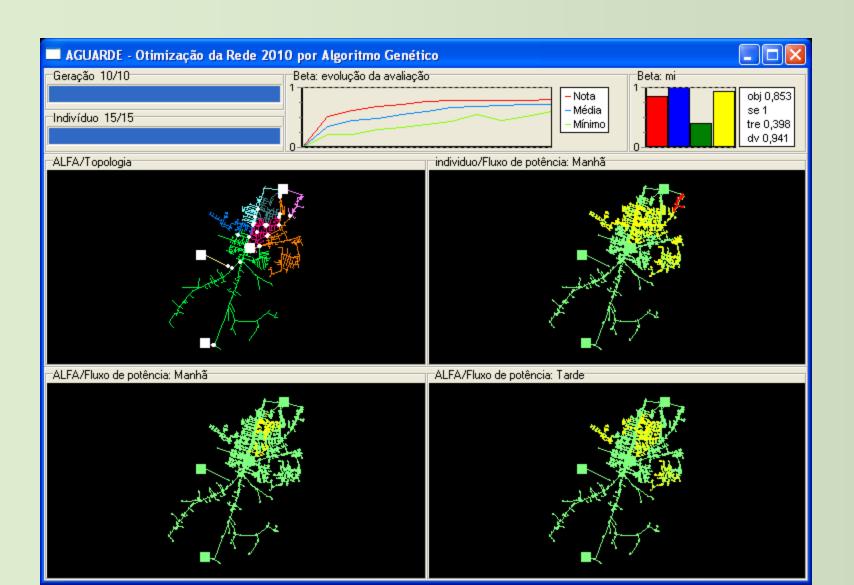
# Minimização Perdas por AG – testando variantes...



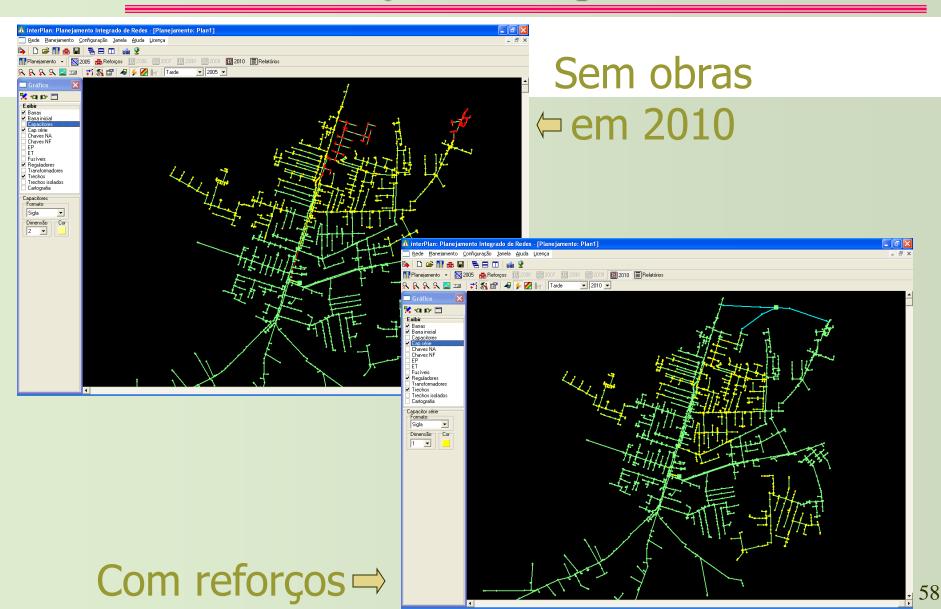
#### Planejamento Expansão - AG



#### Planejamento Expansão - AG

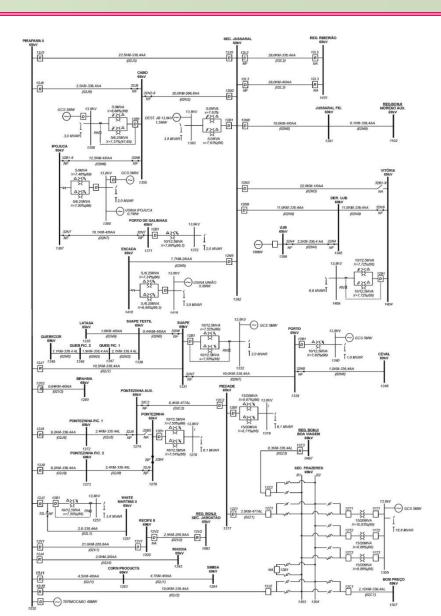


#### Planejamento Expansão - AG



#### Alocação de Medidores VTCDs

- Onde instalar medidores de forma que capturem VTCDs em qualquer ponto da rede?
- Qual é a quantidade mínima de medidores de forma que pelo menos um medidor capture uma VTCD?

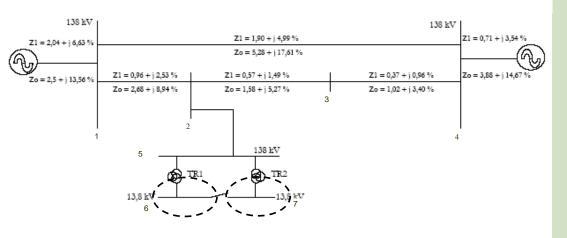


#### Formulação PLI

$$\min \sum_{j} y_{med,j}$$

s.a.

$$y_{red,i} = \sum_{j} M_{obs,i-j} \cdot y_{med,j} \ge 1, i = 1,...,n$$



VTCD em								
		1	2	3	4	5	6	7
defeito	1	1	1	1	1	1	1	1
em	2	1	1	1	1	1	1	1
λ.//	3				1			
$M_{obs} =$	4	1	1	1	1	1	1	1
	5	1	1	1	1	1	1	1
	6	0	0	0	0	0	1	0
	7	0	0	0	0	0	0	1

#### Dados dos transformadores:

TR1 - Zps = 9,33 % 138/13,8 kV base 15 MVA TR2 - Zps = 8,97 % 138/13,8 kV base 15 MVA

Obs.: Os transformadores são Yo/Yo/D

Impedância mútua total (circuito duplo - 138kV): Zom = 3,38 + j 11,62 %

### Modelo por AG

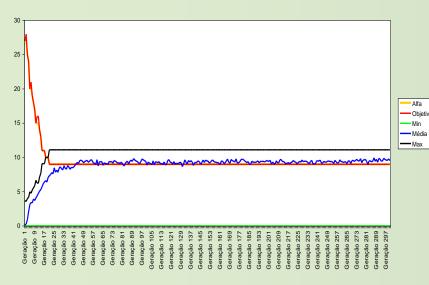
$$F_{aval} = \frac{1}{\sum_{j} y_{med,j} + kF_{pena}}$$

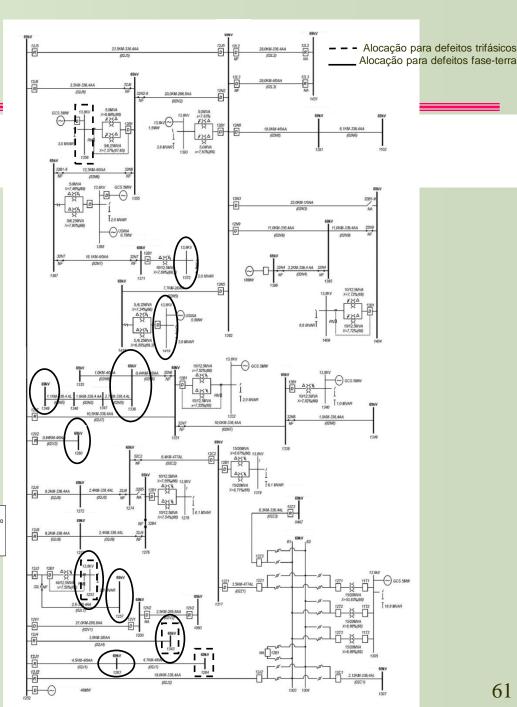
$$F_{pena} = \sum_{i} g(y_{red,i})$$

$$g(y_{red,i}) = 1, se y_{red,i} = 0$$

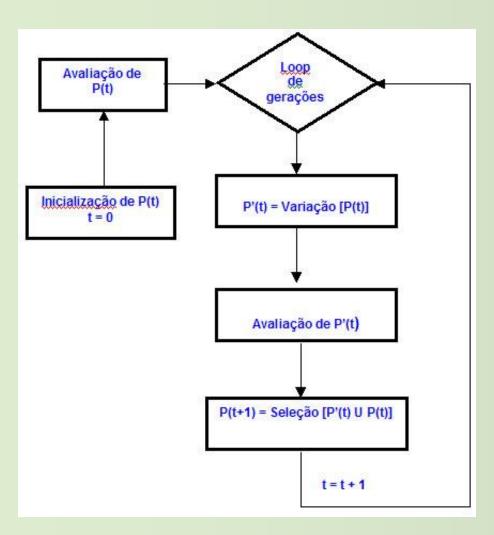
$$g(y_{red,i}) = 0, se y_{red,i} \ge 1$$

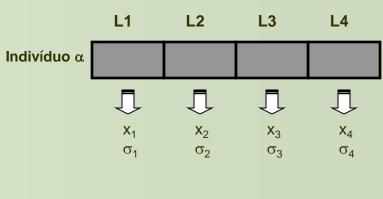
#### Evolução dos parâmetros





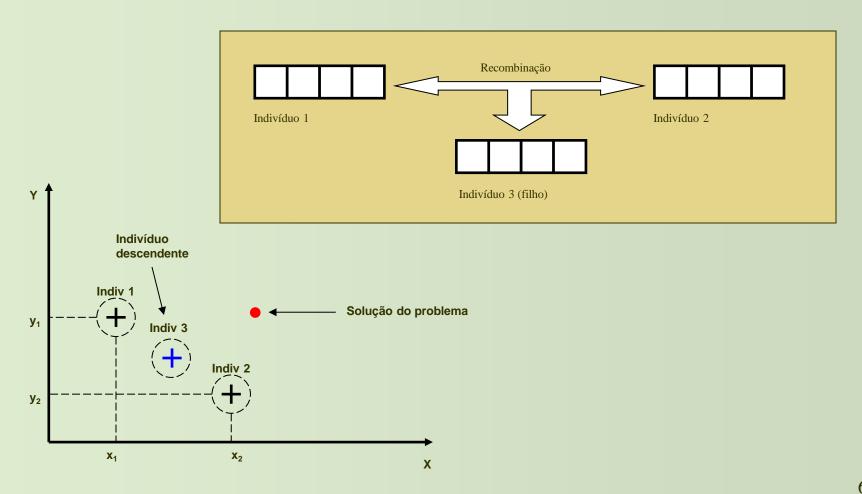
#### Estratégias evolutivas (EEs)





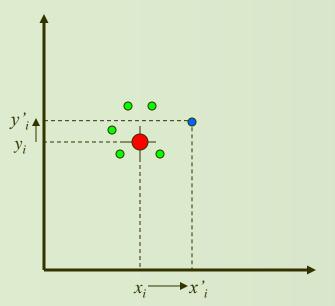
#### Variação da População em EE

#### Recombinação



#### Variação da População em EE

#### Mutação

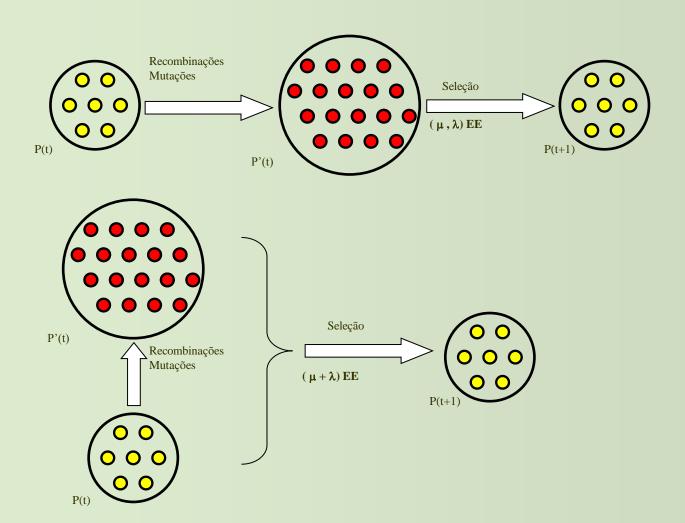


 $x'_{i} = x_{i} + \sigma \cdot N_{i}(0,1)$ 

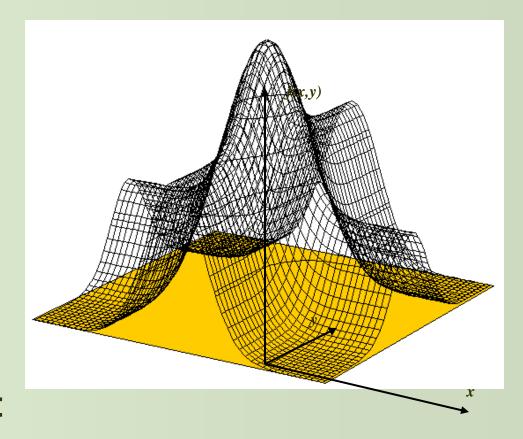
 Mutação com auto-adaptação

$$x'_{i} = x_{i} + \sigma'_{i} \cdot N_{i}(0,1)$$
 
$$\sigma_{i}' = \sigma_{i} \cdot \exp(\tau' \cdot N(0,1) + \tau \cdot N_{i}(0,1))$$
 
$$\tau', \tau - \text{taxas de aprendizado} \propto 1/\sqrt{2n}, 1/\sqrt{2\sqrt{n}}$$

#### Seleção em EEs



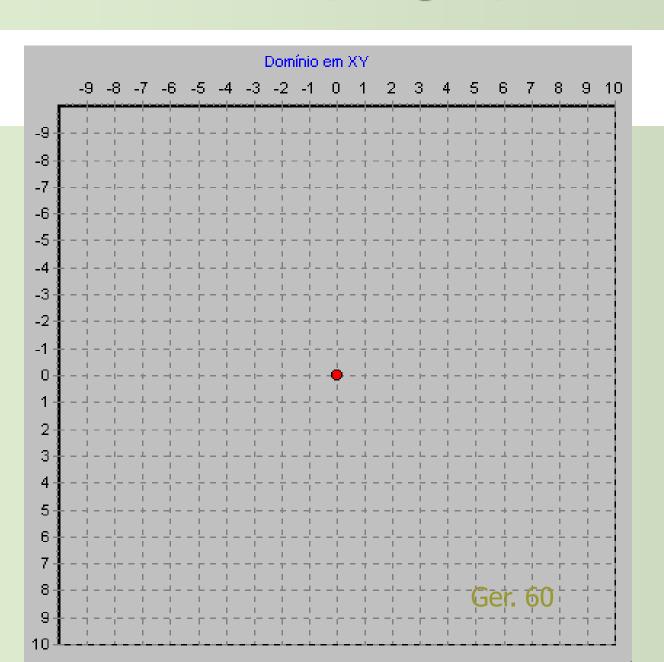
#### Exemplo de AE



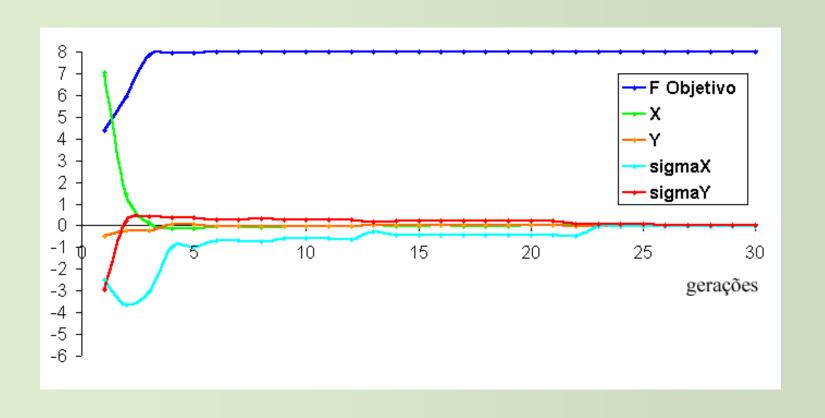
Maximizar a função:

$$f(x,y) = 5 \cdot e^{(-y^2/2)} + 3 \cdot e^{(-x^2/2)}$$

# Evolução - gerações



# Evolução - gerações



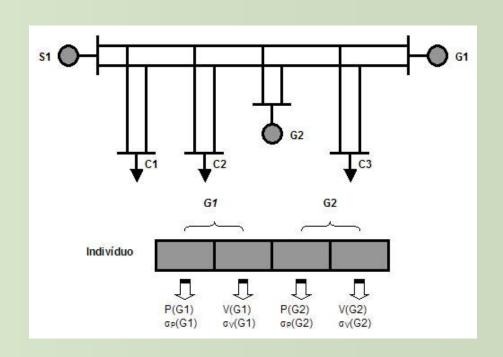
#### Algumas aplicações de AEs

 Otimização do despacho de unidades de geração distribuída (GD) e regulação da tensão

Fluxo de potência convencional

#### Otimização do Despacho e Regulação de Tensão de GD

- Operação do sistema com mínimos custos operacionais
- Atendimento a critérios técnicos de carregamento e tensão na rede
- Ajuste nas unidades de geração distribuída:
  - Potência ativa
  - Nível de tensão



#### Modelo Matemático

#### **PNL**

$$\min f(\widetilde{x}, \widetilde{u})$$

s.a.

$$\widetilde{g}(\widetilde{x},\widetilde{u}) = 0$$

$$\widetilde{x}_{\min} \leq \widetilde{x} \leq \widetilde{x}_{\max}$$

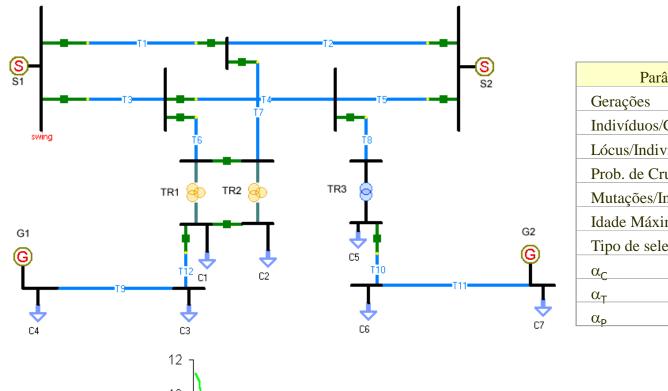
$$\widetilde{u}_{\min} \leq \widetilde{u} \leq \widetilde{u}_{\max}$$

#### AE

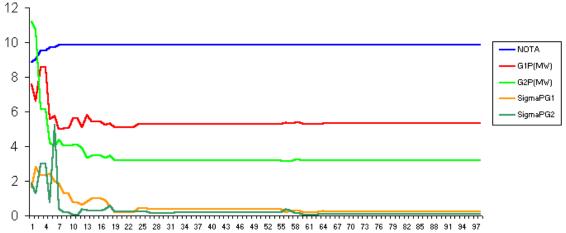
$$f(Indiv) = \frac{\alpha_C \cdot f_C(Indiv) + \alpha_T \cdot f_T(Indiv) + \alpha_P \cdot f_P(Indiv)}{\alpha_C + \alpha_T + \alpha_P}$$

- • $f_c$  função de avaliação transgressão carregamento
- • $f_T$  função de avaliação transgressão tensão
- • $f_p$  função de avaliação custo operacional (perdas)

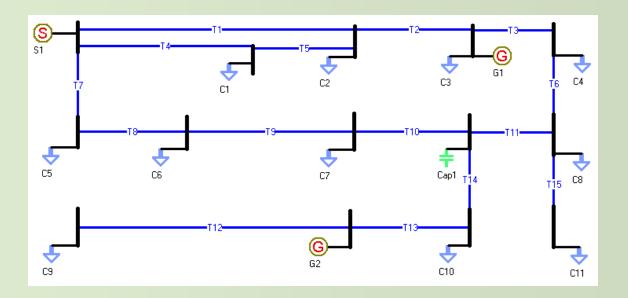
# Resultados – Despacho GD - AE



Parâmetro	Valor
Gerações	200
Indivíduos/Geração	5
Lócus/Indivíduo	4
Prob. de Cruzamento	50%
Mutações/Indivíduo	10
Idade Máxima/Indivíduo	5 gerações
Tipo de seleção	$(\mu, k, \lambda)$
$\alpha_{C}$	1
$\alpha_{T}$	1
$\alpha_{p}$	3

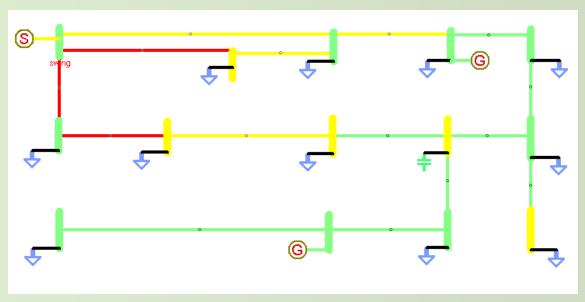


# Caso 2



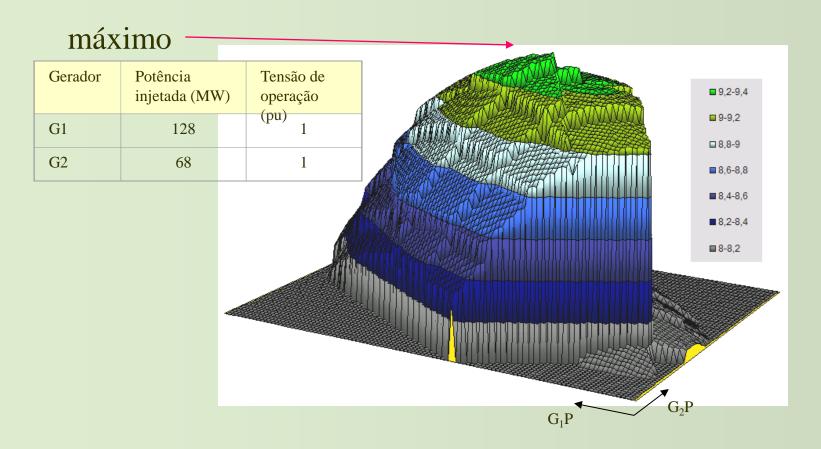
Suprimento/ Gerador	Tipo de barra	Capacidade (MVA)	Tensão Nominal (kV)
S1	Vθ	400	88
G1	PV	200	88
G2	PV	150	88

# Diagnóstico



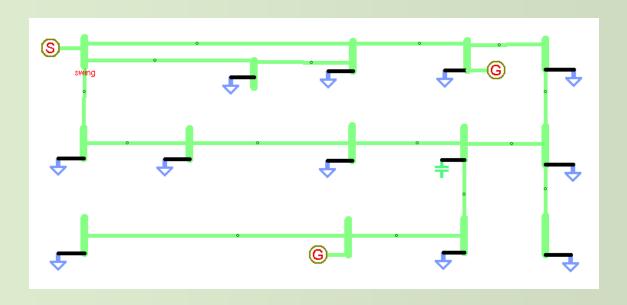
Gerador	Tipo de barra	Potência injetada (MW)	Tensão de operação (pu)
G1	PV	5	1
G2	PV	2	1

#### Busca exaustiva



Representação gráfica da função g. Os valores de  $G_1P$  variam entre 0 e 200 MW, enquanto os de  $G_2P$  variam entre 0 e 150 MW.

# Solução por AE

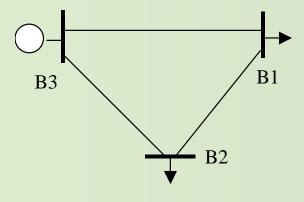


Gerador	Potência injetada (MW)	Passo de mutação (MW)	Tensão de operação (pu)	Passos de mutação (pu)
G1	125,34	0,31	1,02	0,00
G2	66,98	0,26	1,03	0,00

#### Fluxo de potência

$$oxed{V_I}$$
 ----- $oxed{V_{nc}}$   $oxed{ heta_I}$  ----- $oxed{ heta_{nc+nG}}$ 

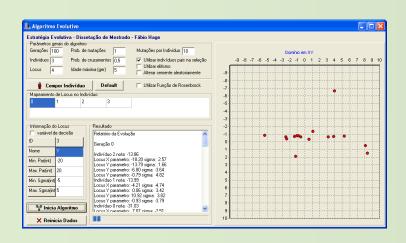
$$f(Indiv) = -[\sum_{i=1,nc+nG} |\Delta P_i| + \sum_{i=1,nc} |\Delta Q_i|]$$

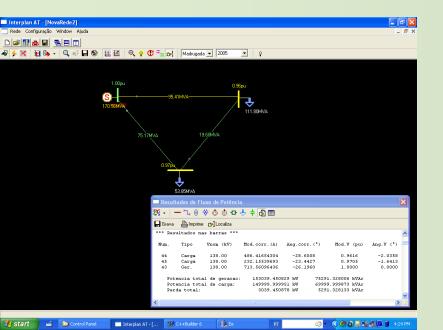


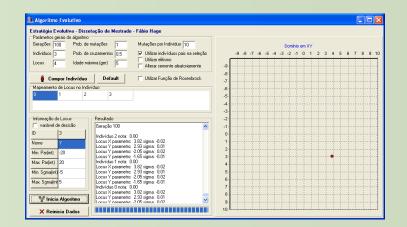
$$P_i(V,\theta) = \sum_{j=1}^{n} V_i V_j (G_{ij} \cos \theta_{ji} - B_{ij} \sin \theta_{ji}), \quad i = 1,...,n_c + n_G$$

$$Q_i(V,\theta) = -\sum_{j=1}^n V_i V_j \left( G_{ij} \operatorname{sen} \theta_{ji} + B_{ij} \cos \theta_{ji} \right), \quad i = 1,..., n_c$$

#### Exemplo – fluxo de potência







Os valores das quedas de tensão nas barras 1 e 2 são de 3,82% e 2,93%, respectivamente, correspondendo às tensões de 0,9618pu e 0,9707pu. Os ângulos são de -2,05° e -1,65°.