Ondas

Lucy V. C. Assali

Física II - 2015 - IO

O que é uma onda?

Qualquer sinal que é transmitido de um ponto a outro de um meio, com velocidade definida, sem que haja transporte direto de matéria.

- ✓ distúrbio
- ✓ se propaga
- ✓ leva sinais de um lugar a outro
- ✓ transporta energia (e momento)

Definição:

variação de uma grandeza física que se propaga no espaço ⟶ distúrbio que se propaga e pode levar sinais ou energia (e momento) de um lugar para outro

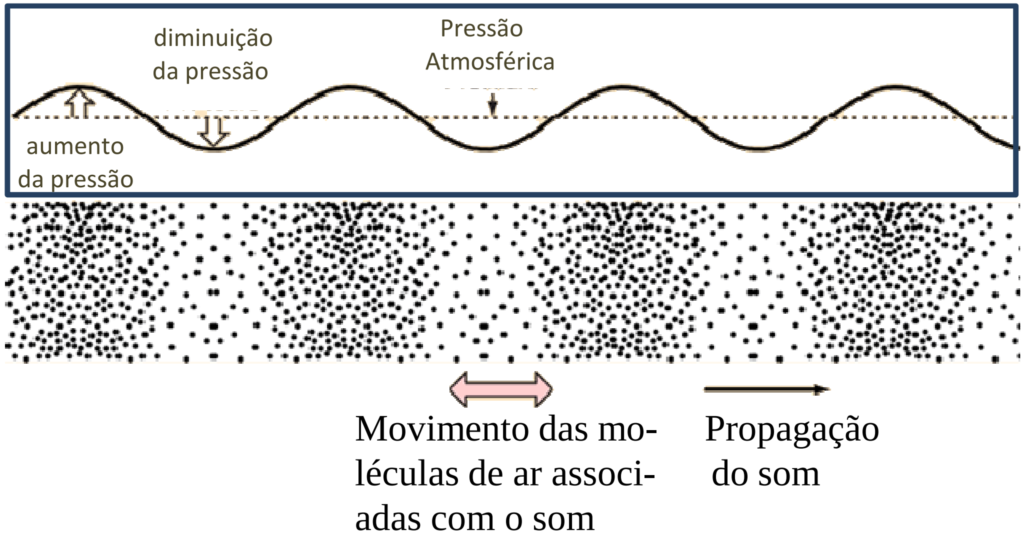
"Energia em movimento"

Tipos de ondas: longitudinais ou transversais

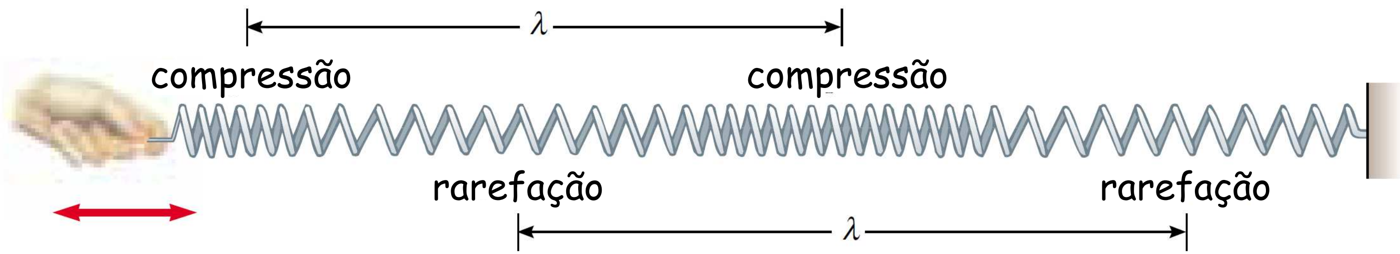
I. Ondas Longitudinais

- ✓ As partículas do meio perturbado se deslocam paralelamente à direção de propagação da onda

Som



Mola

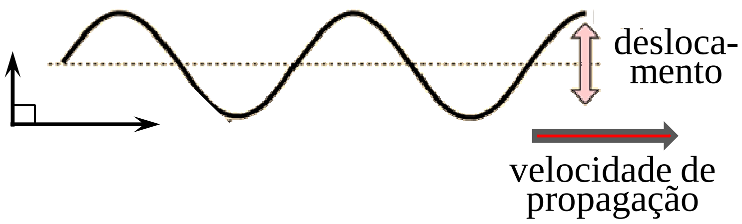


Lucy V. C. Assali

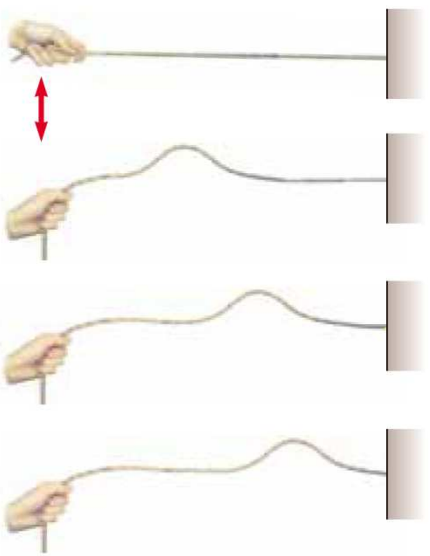
II. Ondas Transversais:

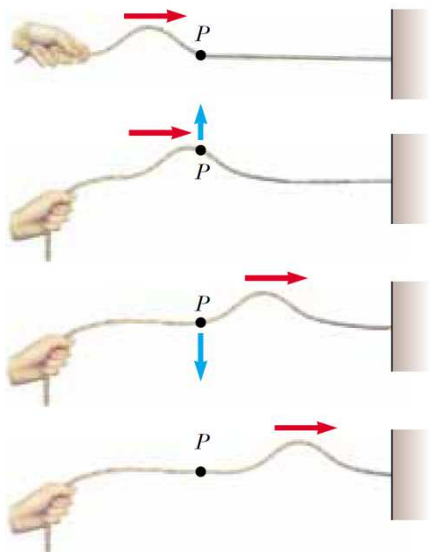
- ✓ As partículas do meio perturbado se deslocam perpendicularmente à direção de propagação da onda

Ondas transversais podem ocorrer em cordas, na superfície de um líquido ou através de um sólido e um exemplo importante destes tipos de ondas são as ondas eletromagnéticas

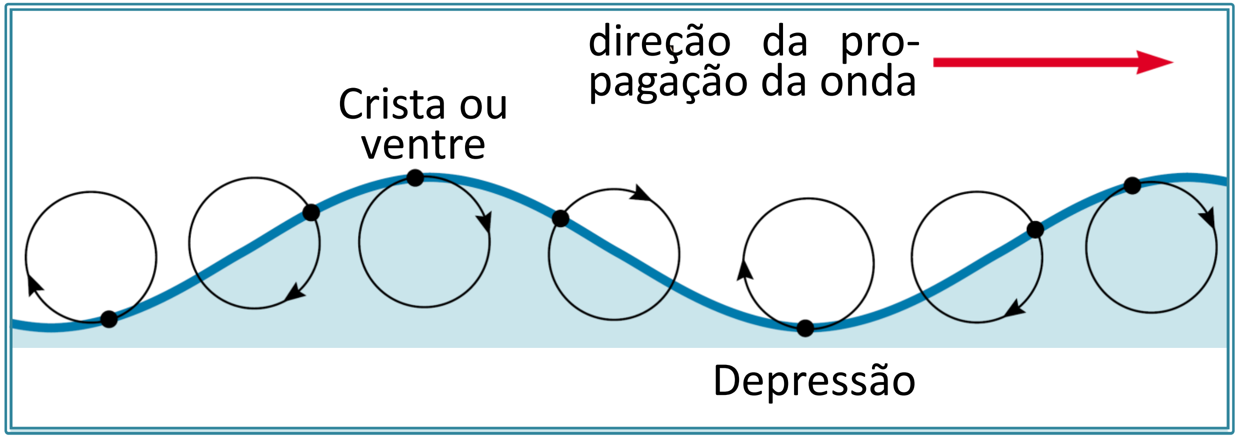


Corda



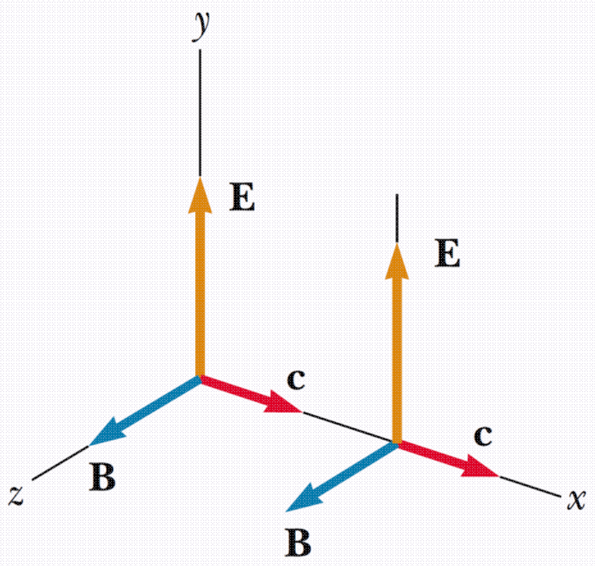


Curiosidade: *Ondas na superfície da água não são nem longitudinais nem transversais, mas uma combinação de ambas: partículas na vizinhança da superfície descrevem trajetórias aproximadamente circulares, com componentes tanto na direção de propagação como perpendiculares a ela*

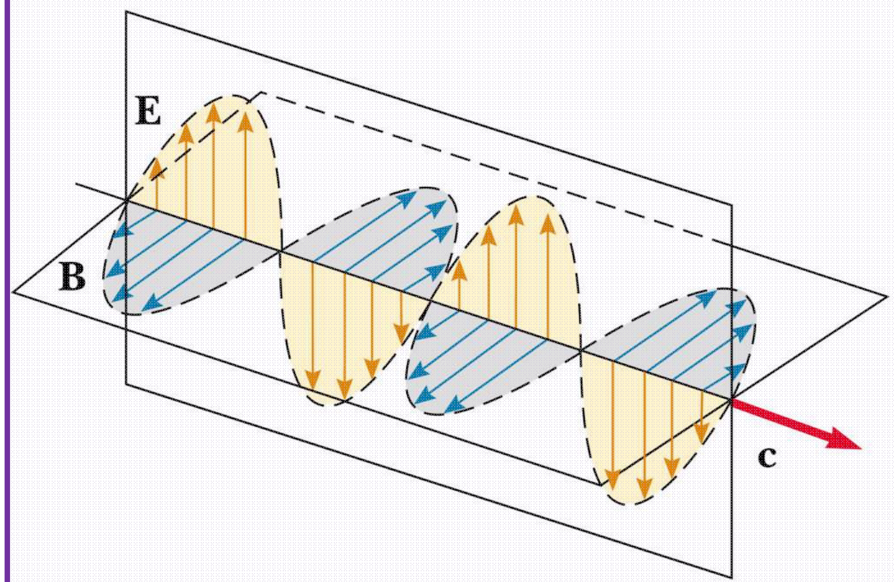


Deslocamentos longitudinais: *enquanto a onda passa na superfície da água, as moléculas de água localizadas na crista se movem na direção de propagação da onda, enquanto as moléculas na depressão se movem no sentido oposto. Como a molécula da crista estará, depois de ter passado um tempo igual à metade do período, seu movimento na direção de propagação será cancelado por seu movimento no sentido oposto. Isto acontece para todas as moléculas de água perturbadas pela onda, indicando que o deslocamento líquido é nulo em um ciclo completo. Assim, apesar de as moléculas apresentarem deslocamento médio nulo, a onda se propaga ao longo da superfície da água.*

Curiosidade: uma onda eletromagnética é uma onda transversal onde os campos elétrico e magnético oscilam, em cada ponto, mantendo-se sempre perpendiculares à direção de propagação.



Onda eletromagnética se propagando com velocidade $\mathbf{c}$ na direção do eixo x. O campo elétrico é ao longo da direção do eixo y e o campo magnético é ao longo da direção do eixo z, e ambos dependem somente de x e t.

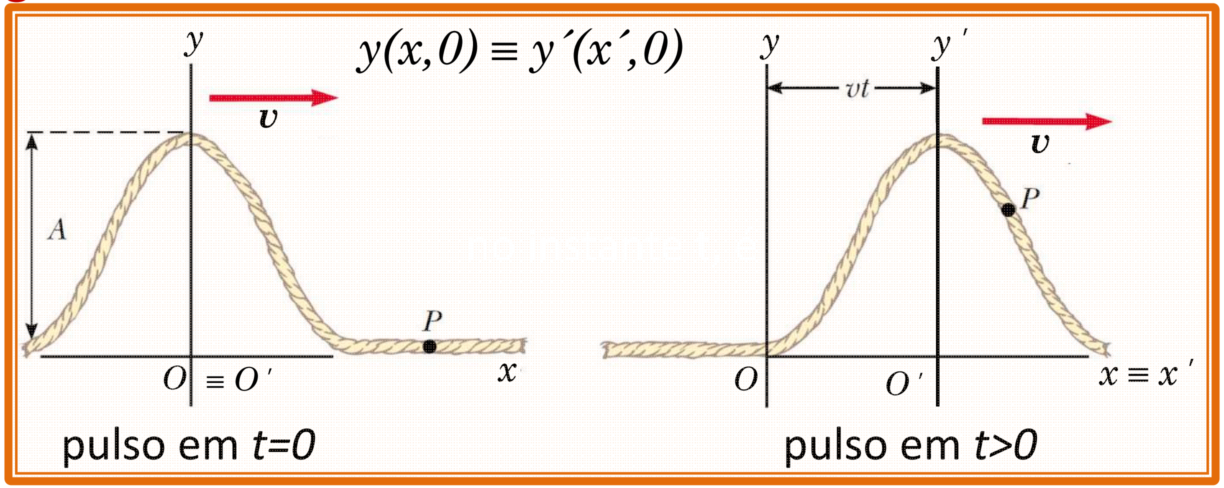


Representação de uma onda eletromagnética senoidal, linearmente polarizada, se propagando na direção do eixo x com velocidade $\mathbf{c}$, em um instante t. Note a variação senoidal de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ com x.

I. Ondas transversais (corda): uma dimensão

1)Ondas Progressivas

O perfil da onda na corda, num dado instante t, é a forma da corda nesse instante, que é dada pela função $y(x,t)$



A perturbação se desloca como um todo, com velocidade v, sem mudar de forma e não muda com o tempo no referencial S’

$$y'(x',t) = y'(x',0) = f(x')$$

função só de x' $(= x - vt)$

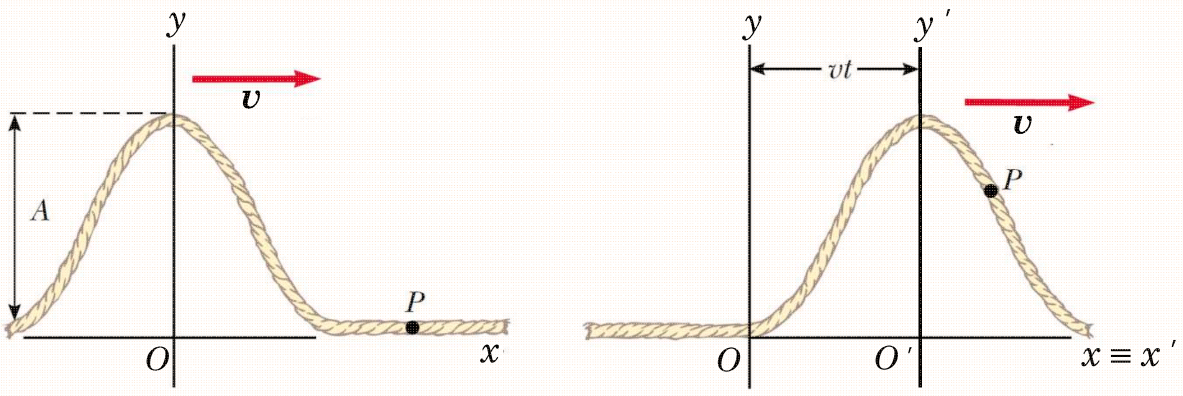
no referencial S

$$y(x,t) = f(x - vt)$$

dá a coordenada y de qualquer ponto P do meio, para qualquer tempo t, e descreve uma onda progressiva que se propaga no sentido positivo de x (para a direita), com velocidade v

Lucy V. C. Assali

1)Ondas Progressivas (corda)

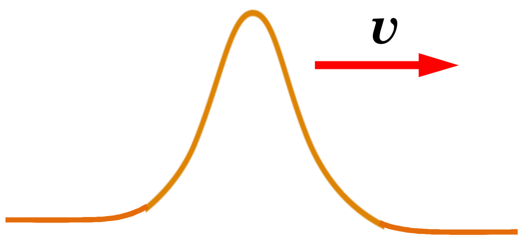


pulso em *t=0* pulso em *t>0*

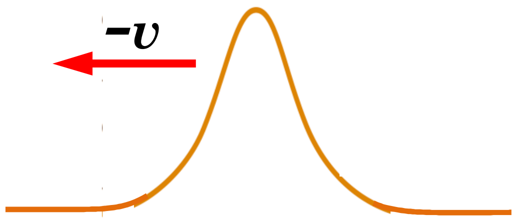
Para um dado valor de t, a função de onda y, como uma função de x, define uma curva representando a forma do pulso nesse instante. Essa curva é equivalente à um *instantâneo* da onda. Para um pulso que se move sem modificação da forma, a velocidade do pulso é a mesma que a de qualquer ponto ao longo do pulso, como, por exemplo, do ponto P da onda da figura. Para encontrar a velocidade do pulso devemos calcular o quão longe este ponto se move em um período curto de tempo e dividir esta distância pelo intervalo de tempo. Para seguir o movimento de P devemos obrigar que a equação $x - vt = cte. = x_0$, garantindo que estamos no ponto P, independente de como x e t variam individualmente. Esta expressão representa, portanto, a equação de movimento de P.
Em $t=0$, o ponto P está em $x = x_0$ e em um tempo posterior dt , o ponto P estará em $x = x_0 + vdt$. Assim, o ponto P terá se movido, no intervalo de tempo dt, uma distância $x = dx = (x_0 + vdt) - x_0 = vdt$. Assim, a velocidade da onda é $v= dx/dt$

I. Ondas transversais (corda): uma dimensão

1)Ondas Progressivas



Onda progressiva que se propaga para a direita: $$y(x,t) = f(x - vt)$$



Onda progressiva que se propaga para a esquerda: $$y(x,t) = g(x + vt)$$

Podemos considerar ondas que se propagam somente em um sentido, durante intervalos de tempos apreciáveis, numa corda suficientemente longa, ou para qualquer tempo no caso limite ideal de uma corda infinita

Corda finita(real) tem extremidades $\Rightarrow$ refletida na extremidade: onda se propaga para a direita e depois de refletida se propaga para a esquerda:

$$y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$$

Exemplo: Um pulso se movimentando para a direita

Um pulso se movimentando para a direita, ao longo do eixo x, é representado pela função de onda:

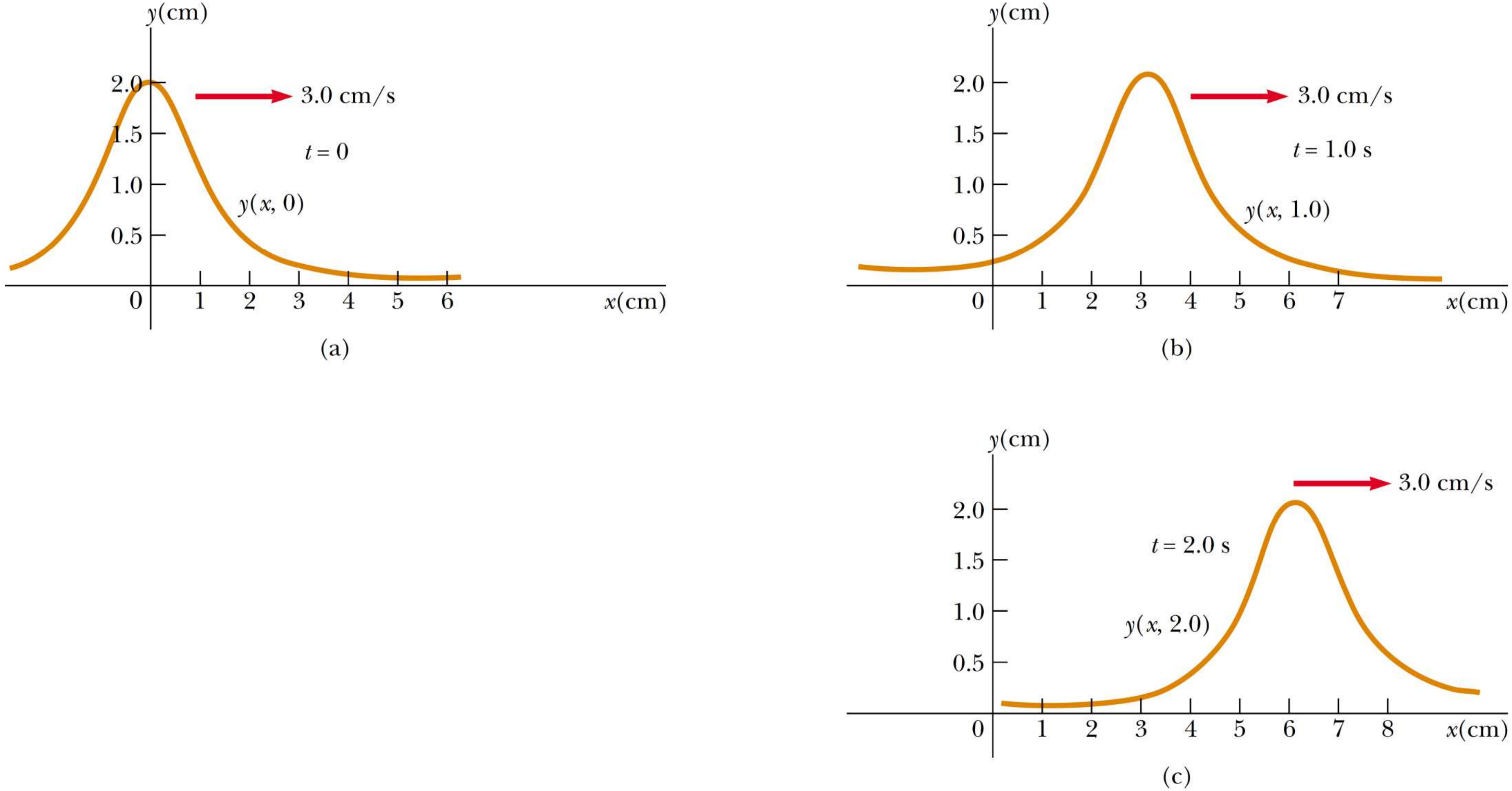
$$y(x,t) = \frac{2}{(x-3\,t)^2+1}$$

onde x e y estão em centímetros e t em segundos. Faça gráficos desta função para t=0, t=1 *e* t=2 s. Primeiro devemos notar que esta função é da forma $y(x,t) = f(x - vt)$

t=0 $$y(x,0) = \frac{2}{x^2+1}$$

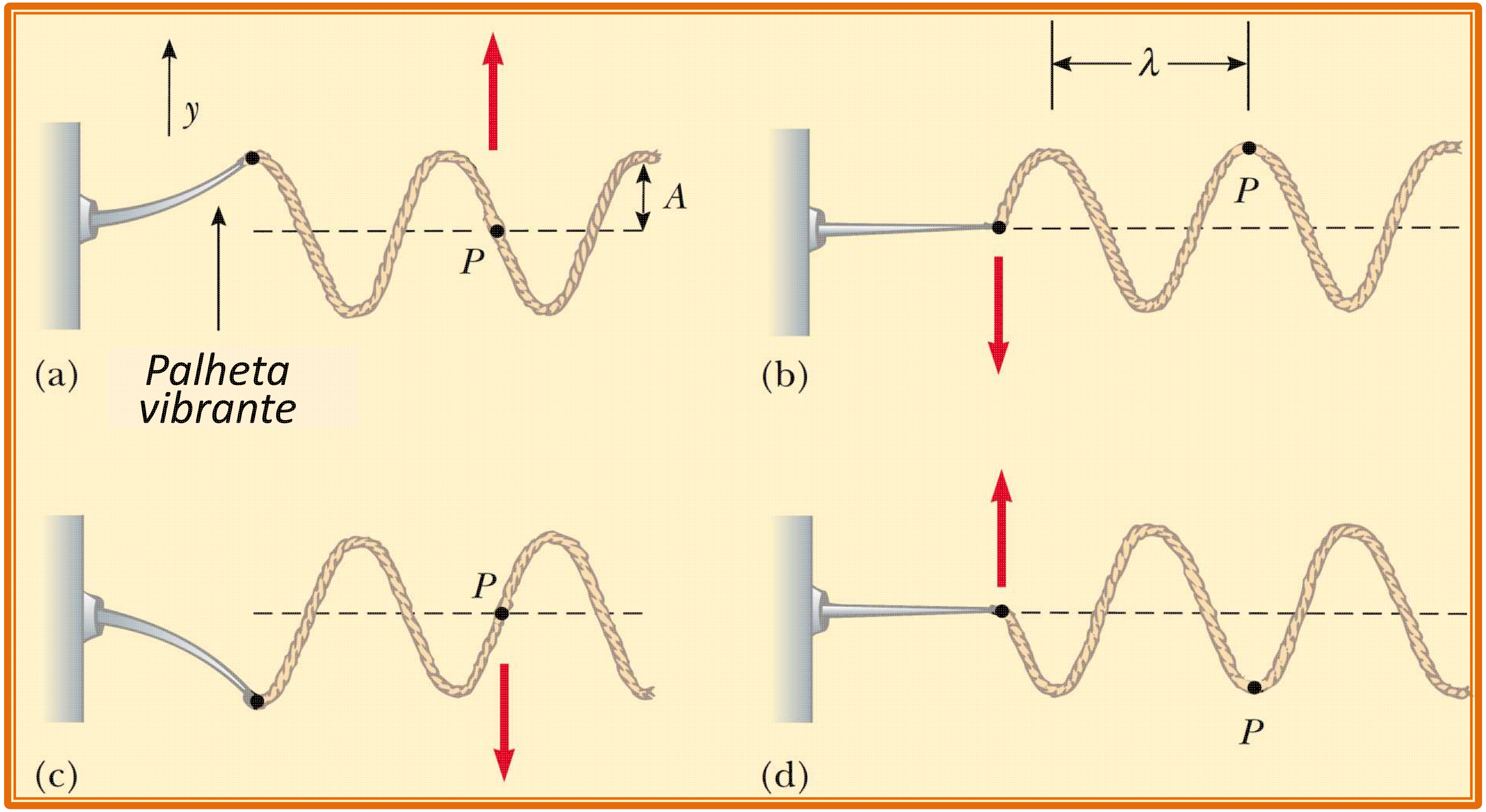
t=1 s $$y(x,1) = \frac{2}{(x-3)^2+1}$$

t=2 s $$y(x,2) = \frac{2}{(x-6)^2+1}$$


y(cm)
2.0
1.5
1.0
0.5
0
1
2
3
4
5
6
x(cm)
3.0 cm/s
t = 0
y(x, 0)
(a)
y(cm)
2.0
1.5
1.0
0.5
0
1
2
3
4
5
6
7
x(cm)
3.0 cm/s
t = 1.0 s
y(x, 1.0)
(b)
y(cm)
2.0
1.5
1.0
0.5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
x(cm)
3.0 cm/s
t = 2.0 s
y(x, 2.0)
(c)

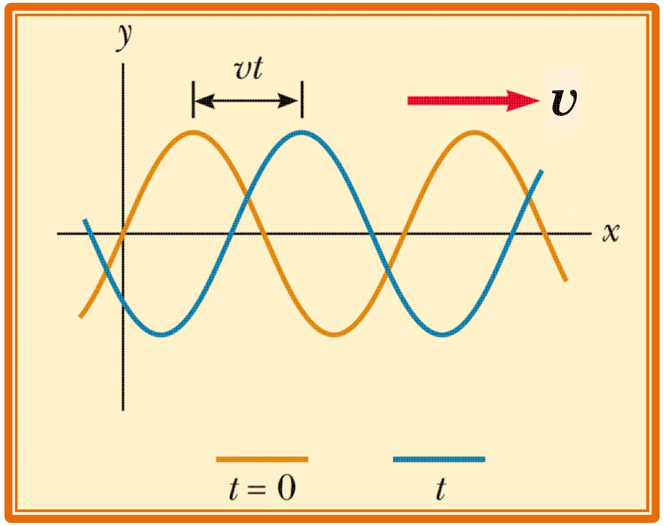
2) Ondas Harmônicas: perturbação corresponde a um MHS

(Caso particular extremamente importante: deslocamento da perturbação corresponde a um MHS)



Ondas transversais (corda): uma dimensão

2) Ondas Harmônicas: deslocamento da perturbação corresponde a um MHS



Perfil da onda: $f(x') = A\cos(kx' + \delta)$

Amplitude da onda

$$y(x,t) = A\cos[k(x - vt) + \delta] = A\cos[kx - \underbrace{kv}_{\omega}\, t + \delta]$$

$$\boxed{y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta)}$$

$\varphi(x,t) = kx - \omega t + \delta \Rightarrow$ Fase da onda (rad)

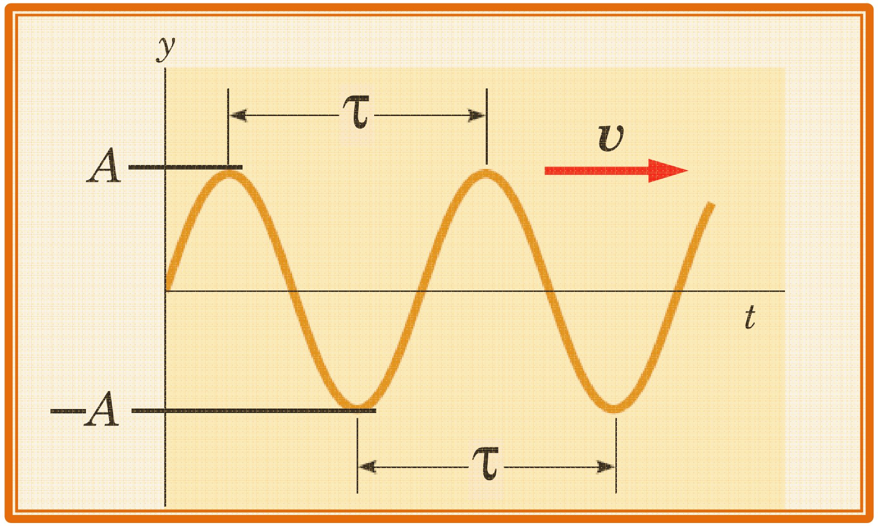
constante de fase

$$\omega = vk = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{\tau}$$

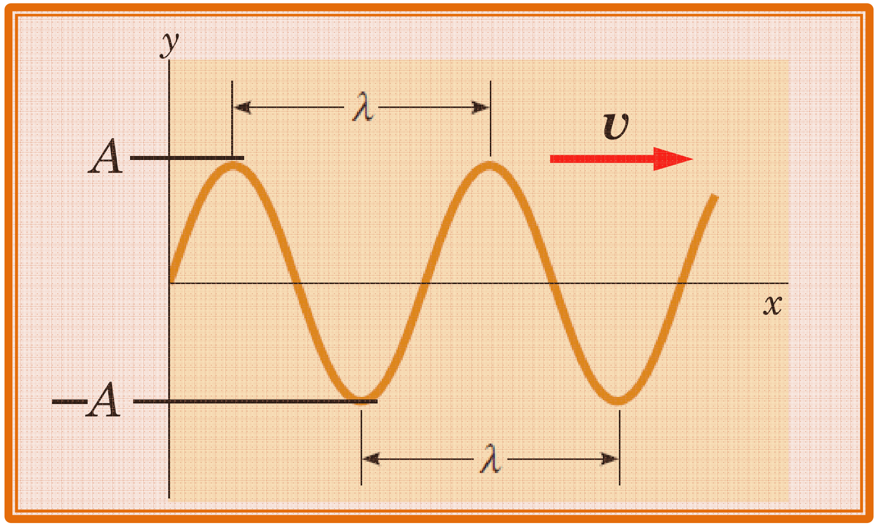
(rad/s) (rad/m)

Ondas transversais (corda): uma dimensão

2) Ondas Harmônicas: perturbação corresponde a um MHS



$\tau \Rightarrow$ o período temporal (s)



$\lambda \Rightarrow$ o período espacial (m)

$$\lambda = \upsilon\tau = 2\pi/k$$

número de onda

Lucy V. C. Assali

Ondas transversais (corda): uma dimensão

2) Ondas Harmônicas: perturbação corresponde a um MHS

Se acompanharmos o deslocamento com o tempo de um ponto onde a fase é constante (p.e. uma crista de onda, onde φ=2π), tal que

$$\varphi(x,t) = kx - \omega t + \delta = \varphi_0 = \text{cte.}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = k\frac{dx}{dt} - \omega = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v$$

Um ponto onde a fase é constante desloca-se com a velocidade v da onda ⟹ v é chamado velocidade de fase

Outro modo de escrever o perfil da onda harmônica:

$$y(x,t) = \text{Re}\left[A\text{e}^{i(kx-\omega t+\delta)}\right]$$

Ondas transversais (corda): uma dimensão

3) A equação de Ondas Unidimensional (a=?)

$$y(x,t) = f(x') \quad \text{onde} \quad x' = x - vt$$

velocidade: $v = \dfrac{\partial y(x,t)}{\partial t}$

aceleração: $a = \dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$

de um ponto x, que se desloca verticalmente na direção y, no instante t

$$\Rightarrow v = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{df}{dx'}\frac{\partial x'}{\partial t} = \frac{df}{dx'}(-v)$$

$$\Rightarrow a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{df}{dx'}\right](-v) = -v\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{df}{dx'}\right]$$

$$= -v\left[\frac{d}{dx'}\left(\frac{df}{dx'}\right)\underbrace{\frac{\partial x'}{\partial t}}_{-v}\right] = v^2\left[\frac{d^2 f}{dx'^2}\right]$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2\left[\frac{d^2 f}{dx'^2}\right]}$$

3) A equação de Ondas Unidimensional (a=?)

Como $$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x - vt) = 1$$

então

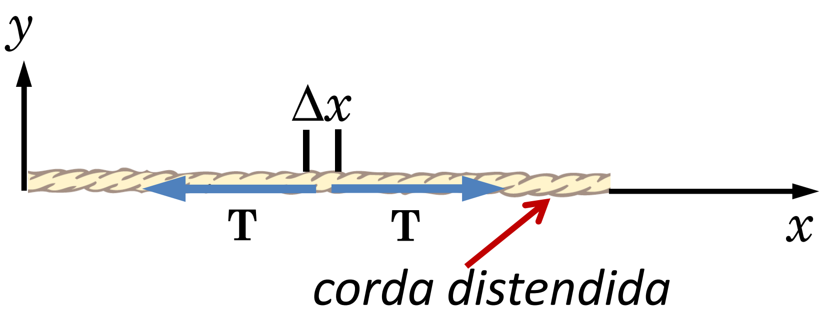
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{df}{dx'}\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{df}{dx'} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{dx'^2}\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{d^2 f}{dx'^2}}$$

$$a = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0}$$

Equação a derivadas parciais
linear de 2ª ordem

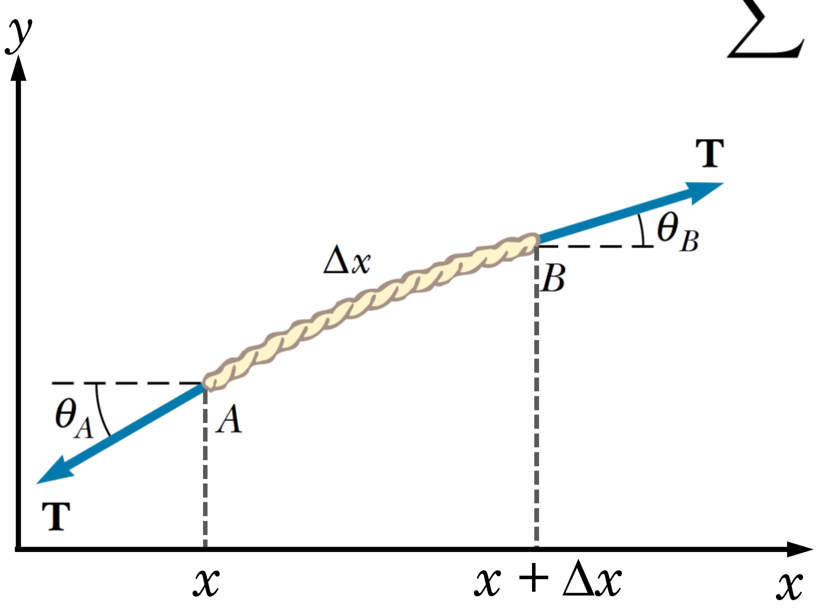
Cordas Vibrantes

1) Equação de movimento



μ ➡ *densidade linear de massa (uniforme)*

$$\Delta m = \mu \Delta x$$



$$\sum F_y = T\text{sen}\theta_B - T\text{sen}\theta_A = T\text{tg}\theta_B - T\text{tg}\theta_A$$

$$= T\frac{\partial y(x+\Delta x,t)}{\partial x} - T\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$$

$$= T\Delta x \left[\frac{\frac{\partial y(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}}{\Delta x} \right]$$

$$\boxed{\sum F_y = T\Delta x \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}}$$

Lucy V. C. Assali

Cordas Vibrantes

1) Equação de movimento

$$\sum F_y = T\Delta x \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \underbrace{\Delta m}_{\mu \Delta x} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$ (3ª Lei de Newton)

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Célebre equação de cordas vibrantes obtida por Euler e D'Alembert (1750)

2) O Princípio de Superposição

Sejam $y_1(x,t)$ e $y_2(x,t)$ duas soluções quaisquer da equação de ondas unidimensionais. Então, uma combinação linear delas

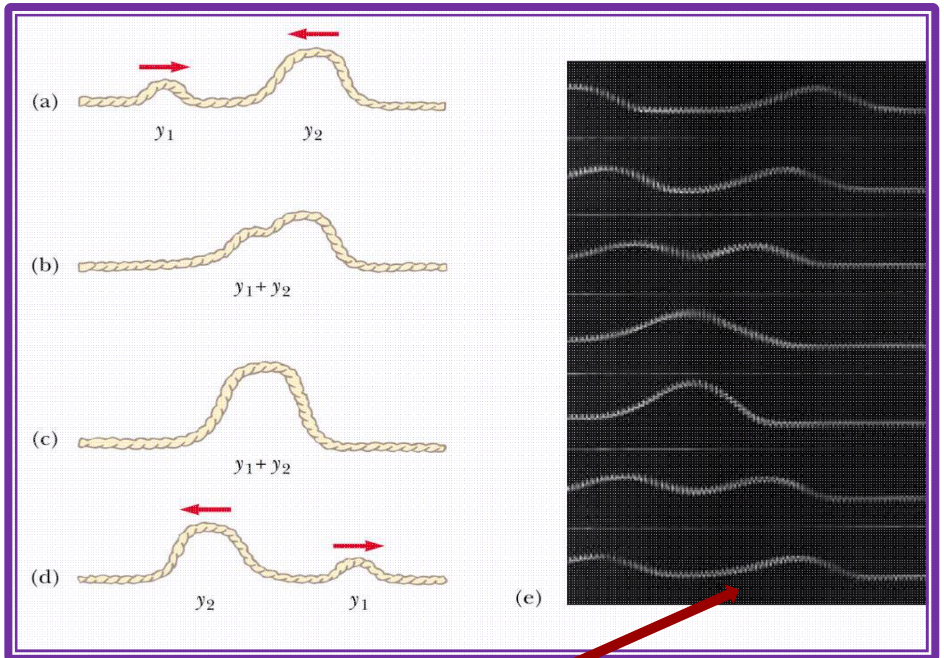
$$y(x,t) = a\,y_1(x,t) + b\,y_2(x,t)$$

também é solução da equação, pois

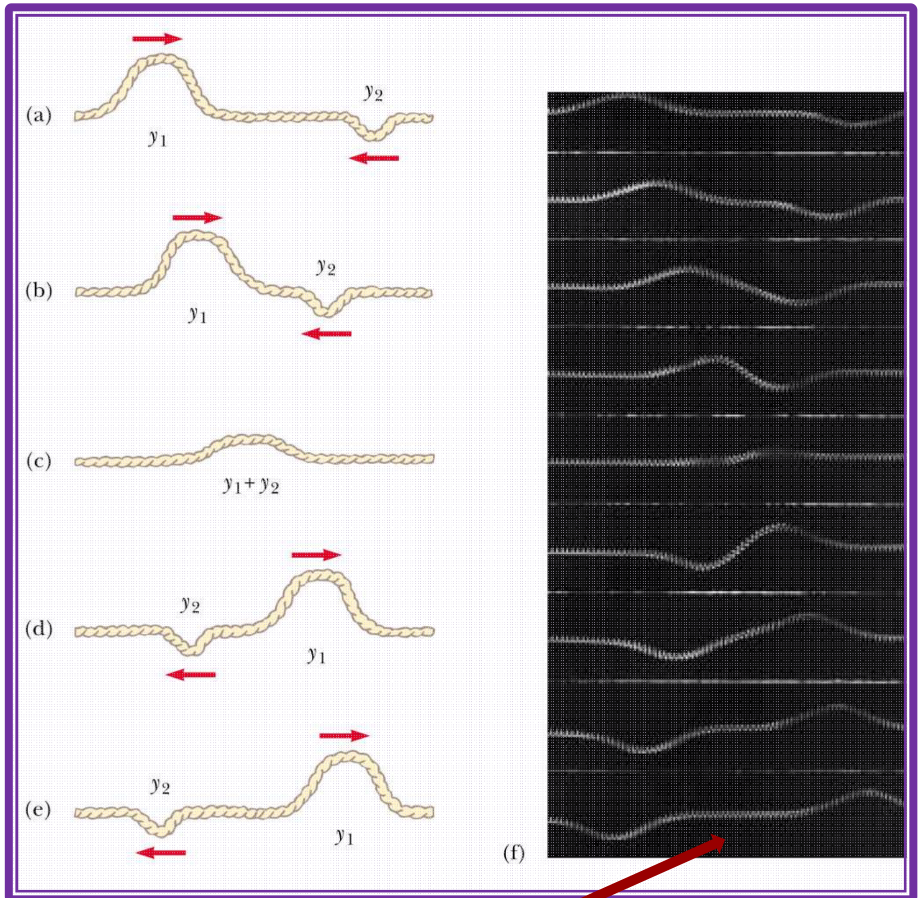
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(ay_1 + by_2) = a\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} + b\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(ay_1 + by_2) = a\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}$$

Obs. : Ondas que obedecem a este princípio são chamadas ondas lineares e são caracterizadas por ondas de pequena amplitude

Exemplo do Princípio de Superposição



Fotografia da superposição de duas ondas iguais e simétricas que se deslocam em sentidos opostos e os pulsos não estão invertidos um em relação ao outro

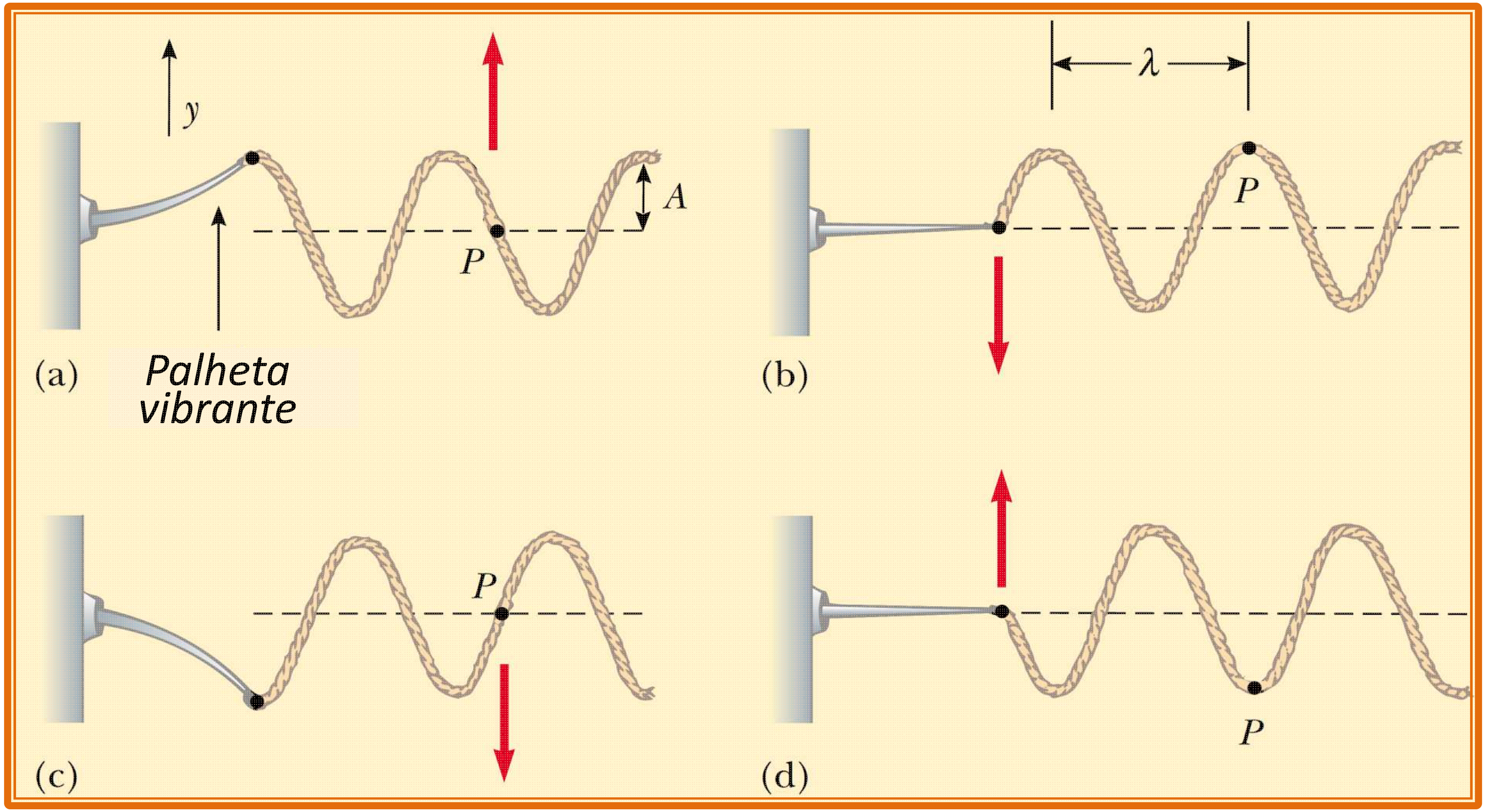


Fotografia da superposição de duas ondas simétricas que se deslocam em sentidos opostos e os pulsos estão invertidos um em relação ao outro

Lucy V. C. Assali

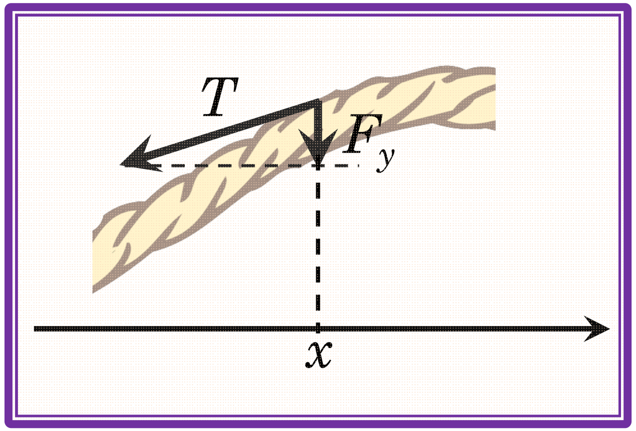
Intensidade de uma onda

Onda harmônica é gerada na corda através da realização de trabalho para fazer oscilar sua extremidade com MHS $\Rightarrow$ A energia correspondente é transmitida à corda e se propaga com a onda.



Intensidade de uma onda

Onda harmônica é gerada na corda através da realização de trabalho para fazer oscilar sua extremidade com MHS $\Rightarrow$ A energia correspondente é transmitida à corda e se propaga com a onda. *Vamos calcular a energia transmitida pela onda, por unidade de tempo, através de um ponto x da corda:*



$$F_y = -T\frac{\partial y}{\partial x}(x,t)$$

O trabalho realizado sobre esse elemento, por unidade de tempo, que nada mais é que a potência instantânea, corresponde à energia transmitida através de x, por unidade de tempo:

$$P(x,t) = F_y\frac{\partial y}{\partial t} = -T\,\frac{\partial y}{\partial x}\,\frac{\partial y}{\partial t}$$

Utilizando (OH):

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -k\,A\,\mathrm{sen}\varphi \quad \mathrm{e} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \omega\,A\,\mathrm{sen}\varphi \qquad \textit{temos}$$

$$\boxed{P(x,t) = \omega\,k\,T\,A^2\,\mathrm{sen}^2(kx-\omega t+\delta)}$$

$que\ oscila\ com\ o\ tempo\ e\ com\ x$

Lucy V. C. Assali

Intensidade de uma onda

Em geral, o que interessa não é o valor instantâneo da potência e sim a média sobre um período, que define a intensidade I da onda:

$$\boxed{I = \bar{P} = \frac{1}{2}\,\omega\, k\, T\, A^2 = \frac{1}{2}\,\mu\, v\, \omega^2\, A^2}$$

$$T = \mu\, v^2 \quad \text{e} \quad k = \frac{\omega}{v}$$

Intensidade da onda é proporcional ao quadrado da amplitude, à velocidade da onda e ao quadrado da frequência

Obs.: a média sobre um período da função $\mathrm{sen}^2\varphi$ *vale* 1/2

Interferência de ondas

Vamos considerar a superposição de duas ondas progressivas harmônicas de mesma frequência.

1) Ondas no mesmo sentido

$$\begin{cases} y_1(x,t) = A_1 \cos(kx - \omega t + \delta_1) \\ y_2(x,t) = A_2 \cos(kx - \omega t + \delta_2) \end{cases}$$

$$\boxed{y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta)}$$

$$\text{onde} \quad A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta_{12}$$

$$\text{com} \quad \delta_{12} = \delta_2 - \delta_1 \quad \text{e} \quad \text{sen}\delta = \frac{A_2}{A}\,\text{sen}\delta_{12}$$

Como a frequência das duas ondas é a mesma, então a intensidade de cada uma delas é proporcional ao quadrado de sua amplitude, com a mesma constante de proporcionalidade. Chamando de I_1 e I_2 as intensidades das componentes, a intensidade I da onda resultante

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\cos\delta_{12}}$$

Interferência de ondas

1) Ondas no mesmo sentido

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\cos\delta_{12}}$$

A intensidade da onda resultante é diferente da soma das intensidades das componentes, dependendo da diferença de fase entre elas $\Rightarrow$ este fenômeno se chama ***Interferência***

Intensidade Máxima $\Rightarrow$ Interferência Construtiva quando $\cos\delta_{12} = 1$

$$\delta_{12} = 2m\pi \quad (m \in \mathbb{N}) \quad \Longrightarrow \boxed{I = I_{\text{máx}} = \left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}\right)^2}$$

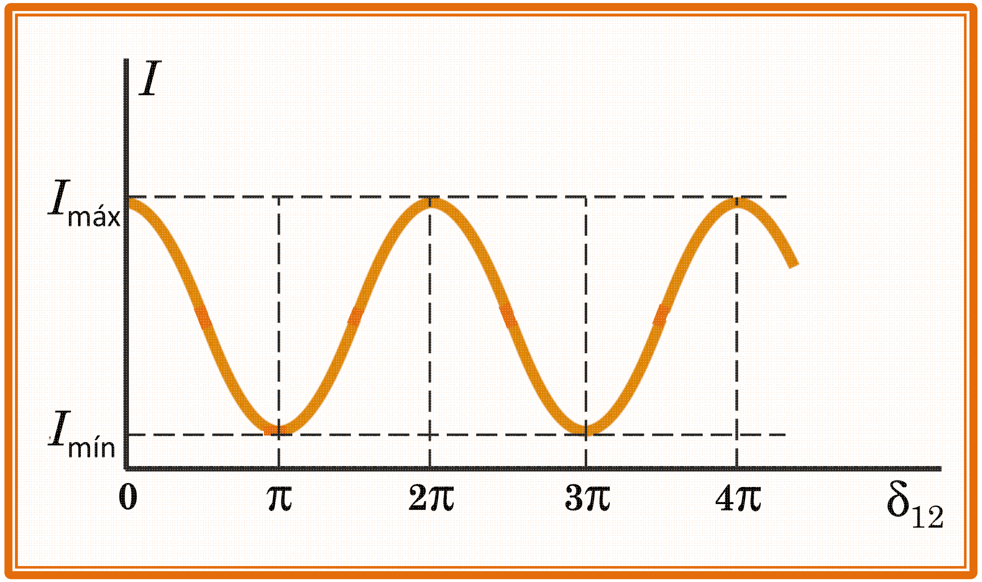
Intensidade Mínima $\Rightarrow$ Interferência Destrutiva quando $\cos\delta_{12} = -1$

$$\delta_{12} = (2m+1)\,\pi \quad (m \in \mathbb{N}) \Longrightarrow \boxed{I = I_{\text{mín}} = \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2}$$

Interferência de ondas

1) Ondas no mesmo sentido

A intensidade da onda resultante oscila entre os valores máximo e mínimo, como função da δ_{12}



Em particular, se $I_1 = I_2$, então $I_{máx} = 4I_1$ e $I_{mín} = 0$

Fenômenos de interferência estão entre os efeitos mais característicos da propagação de ondas

Lucy V. C. Assali

Obtenção da amplitude e da constante de fase da onda resultante:

Consideremos a superposição de duas ondas progressivas harmônicas, de mesma frequência, se propagando no mesmo sentido:

$$\boxed{\begin{cases} y_1(x,t) = A_1 \cos\left[\varphi_1(x,t)\right], \quad \text{onde} \quad \varphi_1(x,t) = kx - \omega t + \delta_1 \\ y_2(x,t) = A_2 \cos\left[\varphi_2(x,t)\right], \quad \text{onde} \quad \varphi_2(x,t) = kx - \omega t + \delta_2 \end{cases}}$$

A onda resultante será:

$$\boxed{y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A\cos\left[\varphi(x,t)\right], \text{com } \varphi(x,t) = kx - \omega t + \delta'}$$

Definindo

$$\boxed{\begin{cases} \delta_2 - \delta_1 = \delta_{12} \text{ teremos que } \varphi_2 = \varphi_1 + \delta_{12} \\ \delta' - \delta_1 = \delta \quad \text{ teremos que } \varphi = \varphi_1 + \delta \end{cases}}$$

Podemos escrever, então, que:

$$\boxed{y(x,t) = A\cos(\varphi_1 + \delta) = y_1 + y_2 = A_1\cos(\varphi_1) + A_2\cos(\varphi_1 + \delta_{12})}$$

Sabendo que

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\theta, \text{ onde } \cos\theta = \Re\text{e}\left[e^{i\theta}\right] \text{ e } \text{sen}\theta = \Im\text{m}\left[e^{i\theta}\right]},$$

podemos escrever que

$$\boxed{z(x,t) = Ae^{i\varphi_1}\, e^{i\delta} = e^{i\varphi_1}\left[A_1 + A_2 e^{i\delta_{12}}\right]}. \qquad (1)$$

Com isso teremos que $y(x,t) = \Re\text{e}[z]$.
A igualdade (1) é verdadeira para $Ae^{i\delta} = A_1 + A_2 e^{i\delta_{12}}$.
Portanto:

$$\begin{cases} \Im\text{m}\,[z] \Longrightarrow A\,\text{sen}\delta = A_2\,\text{sen}\delta_{12} \\ \Re\text{e}\,[z] \Longrightarrow A\cos\delta = A_1 + A_2\cos\delta_{12} \end{cases} \qquad (2)$$

Elevando ao quadrado as equações (2) e somando os resultados temos

$$\boxed{A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\delta_{12}, \text{ com } \delta_{12} = \delta_2 - \delta_1 \text{ (diferença de fase)}}$$

Da equação (2) temos a relação entre δ e δ_{12}:

$$\boxed{\text{sen}\delta = \frac{A_2}{A}\,\text{sen}\delta_{12}}$$

Interferência de ondas

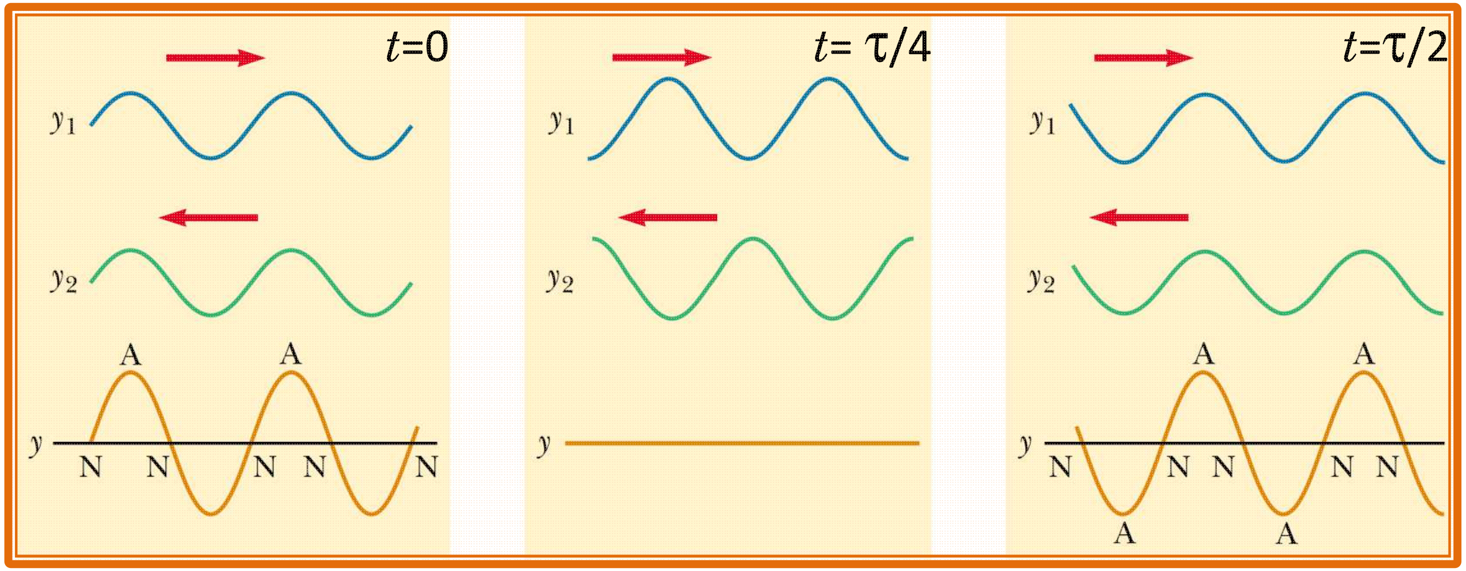
2) Ondas em sentidos opostos (ondas estacionárias)

Vamos considerar a superposição de duas ondas progressivas harmônicas, em sentidos opostos, que, além de terem a mesma frequência, também têm a mesma amplitude e constante de fase nula

$$\begin{cases} y_1(x,t) = A\cos(kx - \omega t) \\ y_2(x,t) = A\cos(kx + \omega t) \end{cases}$$

$$\boxed{y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = 2\,A\cos(kx)\cos(\omega t)}$$ ⟹ ***Onda Estacionária***

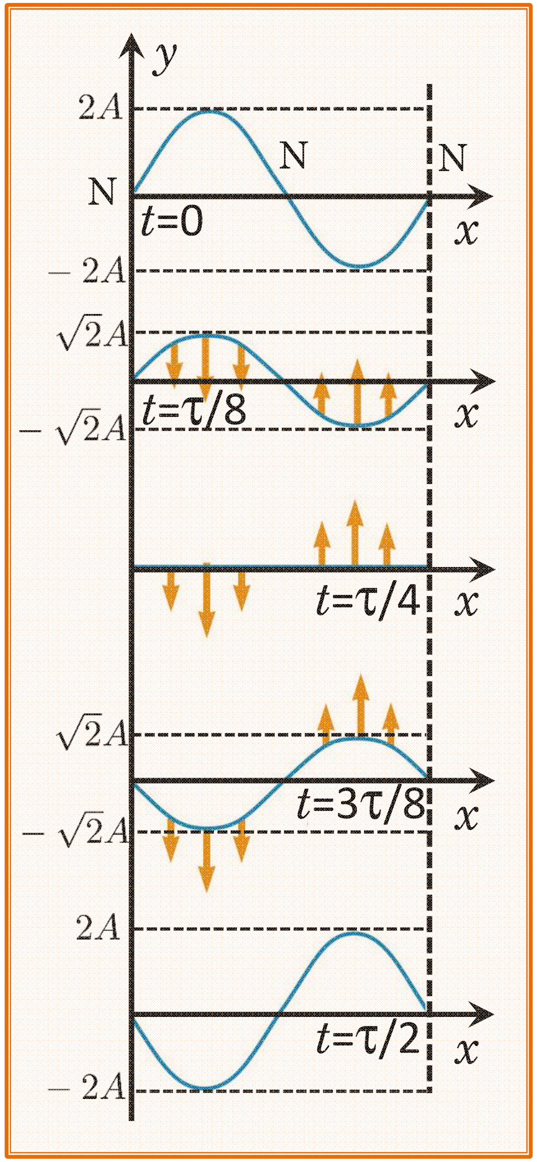
<u>Não há propagação</u>: a forma da onda permanece sempre semelhante, com o deslocamento mudando apenas de amplitude e, eventualmente, de sinal



Lucy V. C. Assali

Interferência de ondas

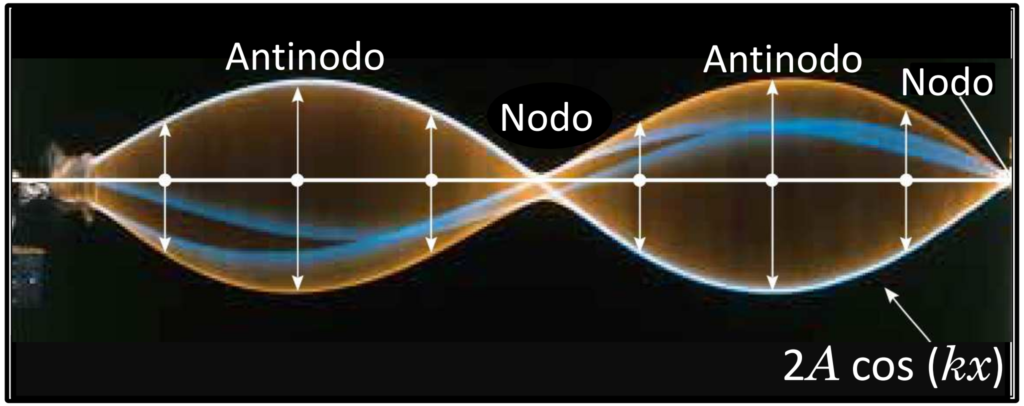
2) Ondas em sentidos opostos (ondas estacionárias)



A figura mostra uma série de *"Instantâneos" de uma onda estacionária:* para $t = \tau/4$ a corda passa pela posição de equilíbrio ($y = 0$) e depois os deslocamentos trocam de sinal, até atingir amplitude máxima para $t = \tau/2$. Daí em diante os gráficos seriam percorridos em sentido inverso (de baixo para cima), até voltar a configuração inicial para $t = 0$. O fluxo médio de energia, em uma onda estacionária, é nulo.

Interferência de ondas

2) Ondas em sentidos opostos (ondas estacionárias)



A figura mostra uma fotografia, de tempo de exposição longo, de uma onda estacionária em uma corda. O comportamento temporal de um deslocamento vertical (transversal), a partir do equilíbrio, de uma partícula individual da corda é dado por $\cos(\omega t)$. Isso indica que cada partícula vibra com frequência angular ω. A amplitude da oscilação vertical de qualquer partícula depende da posição horizontal da partícula, que vibra confinada em uma função envelope $2A\cos(kx)$.

Lucy V. C. Assali

Interferência de ondas

3) Batimentos e velocidade de grupo

Vamos considerar a superposição de duas ondas progressivas harmônicas que se propagam no mesmo sentido, têm a mesma amplitude e constante de fase nula, mas têm frequências ligeiramente diferentes (∴ diferentes número de onda)

$$\begin{cases} y_1(x,t) = A\cos\left(k_1\, x - \omega_1\, t\right) \\ y_2(x,t) = A\cos\left(k_2\, x - \omega_2\, t\right) \end{cases}$$

$$\text{Onde} \quad \begin{cases} \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 \ll \overline{\omega} = \frac{1}{2}\left(\omega_1 + \omega_2\right), \text{com } \omega_1 > \omega_2 \\ \Delta k = k_1 - k_2 \ll \overline{k} = \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right), \text{com } k_1 > k_2 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$y = y_1 + y_2 = A\left\{\cos\left[\left(\overline{k} + \frac{\Delta k}{2}\right)x - \left(\overline{\omega} + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right] + \cos\left[\left(\overline{k} - \frac{\Delta k}{2}\right)x - \left(\overline{\omega} - \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right]\right\}$$

$$\boxed{y(x,t) = \mathbb{A}(x,t)\cos\left(\overline{k}x - \overline{\omega}t\right)}$$

alta frequência

$$\boxed{\mathbb{A}(x,t) = 2\,A\cos\left[\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right]}$$

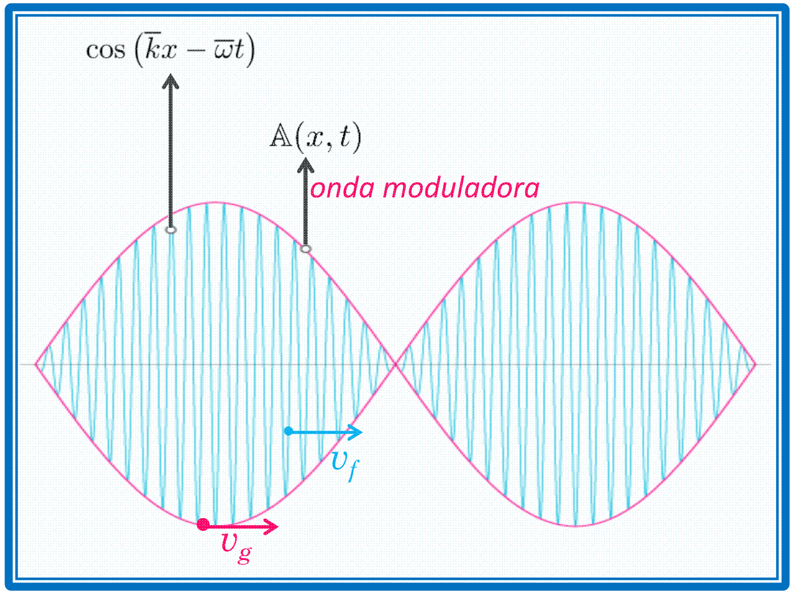
baixa frequência

Lucy V. C. Assali

Interferência de ondas

3) Batimentos e velocidade de grupo

A expressão que encontramos representa um fenômeno de batimentos: a onda encontrada é uma onda de frequência $\overline{\omega}$, elevada, que é modulada pela amplitude $\mathbb{A}$, que é outra onda com frequência $\Delta\omega$ bem mais baixa. Este é o exemplo mais simples de um grupo de ondas.



A fase desta onda é dada por:

$$\varphi(x,t) = \overline{k}x - \overline{\omega}t$$

de modo que a velocidade com que se desloca um ponto de fase constante é a velocidade de fase

$$v_f = \frac{\overline{\omega}}{\overline{k}}$$

A velocidade com que se desloca o grupo de ondas como um todo é a velocidade associada a um ponto da envoltória (onda moduladora), onde $\mathbb{A}$ é constante. Esta velocidade é chamada velocidade de grupo e

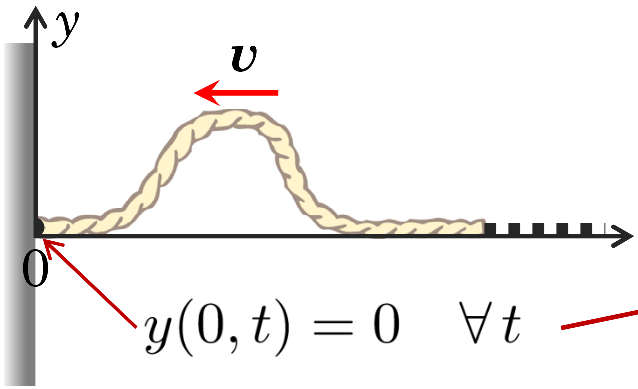
$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}$$

Reflexão de ondas

Pulso que se propaga em uma corda comprida que tem sua extremidade em um ponto O. *O que acontece quando o pulso atinge* O?

1) Extremidade fixa:

$y(x,t) = g(x+vt)$ (pulso antes de atingir 0)



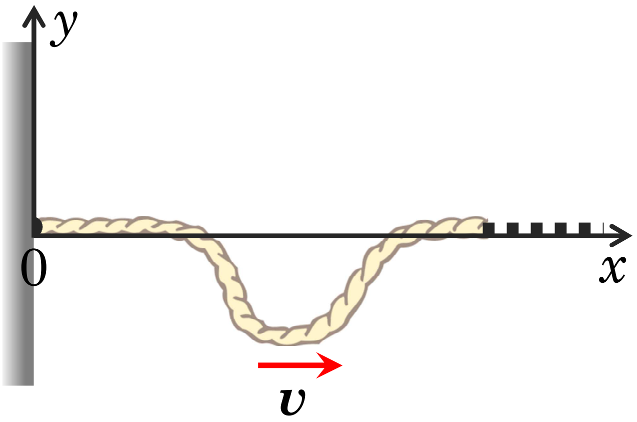
$y(0,t) = 0 \quad \forall\, t$

Solução geral: $y(x,t) = g(x+vt) + \underbrace{f(x-vt)}_{\text{nula antes de atingir 0}}$

$$y(0,t) = g(vt) + f(-vt) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$f(-vt) = -g(vt) \quad \forall\, t$$

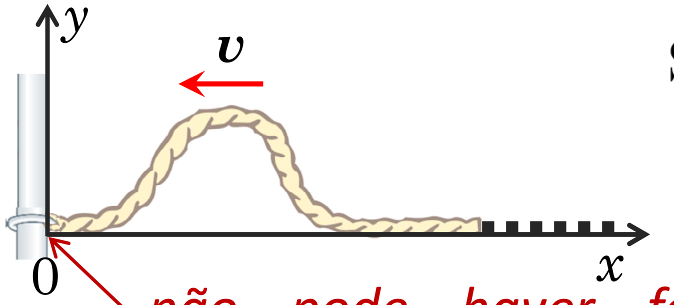


o pulso volta invertido, depois da reflexão em 0, *com defasagem de 180º*

Reflexão de ondas

2) Extremidade livre:

$$y(x,t) = g(x+vt) \text{ (pulso antes de atingir 0)}$$



Solução geral: $y(x,t) = g(x+vt) + \underbrace{f(x-vt)}_{\substack{\text{nula antes}\\ \text{de atingir 0}}}$

não pode haver força transversal sobre a corda:

$$F_y(0,t) = -T\frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = 0 \quad \forall t$$

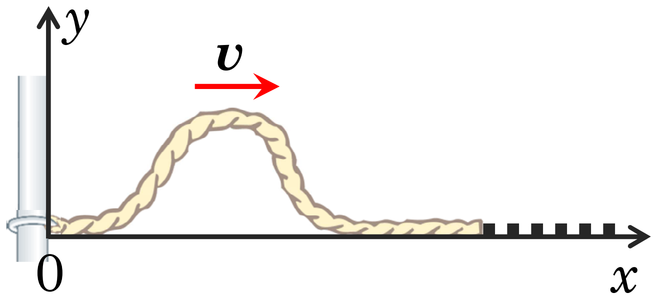
$$\frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(-vt) + \frac{\partial g}{\partial x}(vt) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-vt) = -\frac{\partial g}{\partial x}(vt)$$

$$\Downarrow$$

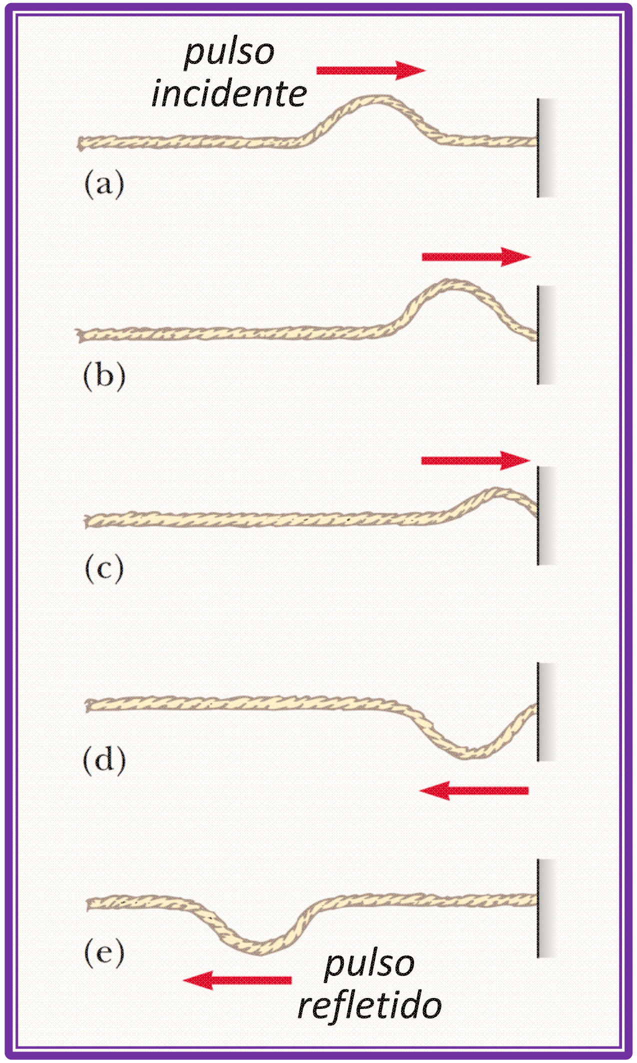
$$f(-vt) = g(vt) \quad \forall t$$



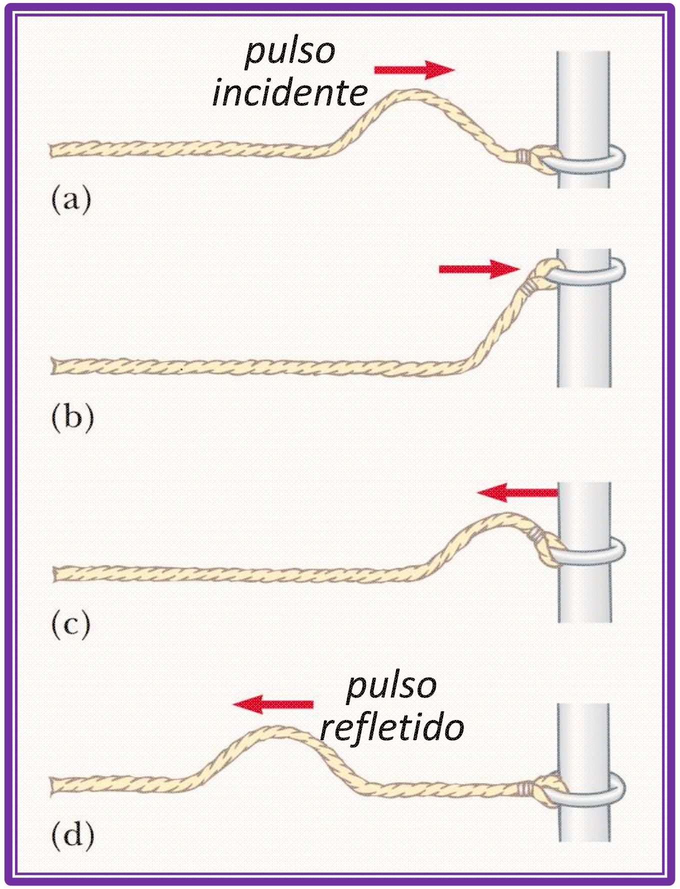
o pulso volta sem ser invertido, depois da reflexão em 0, e sem mudança de fase

Reflexão de ondas

1) Extremidade fixa



2) Extremidade livre

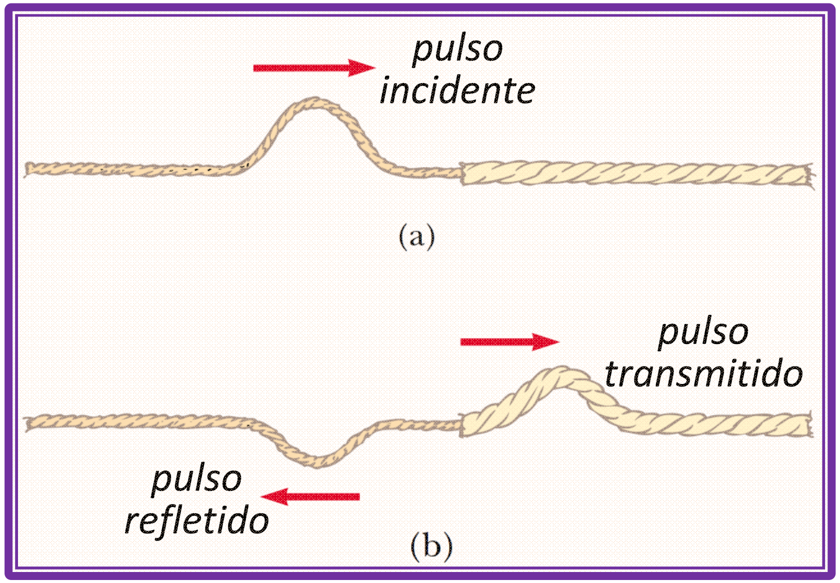


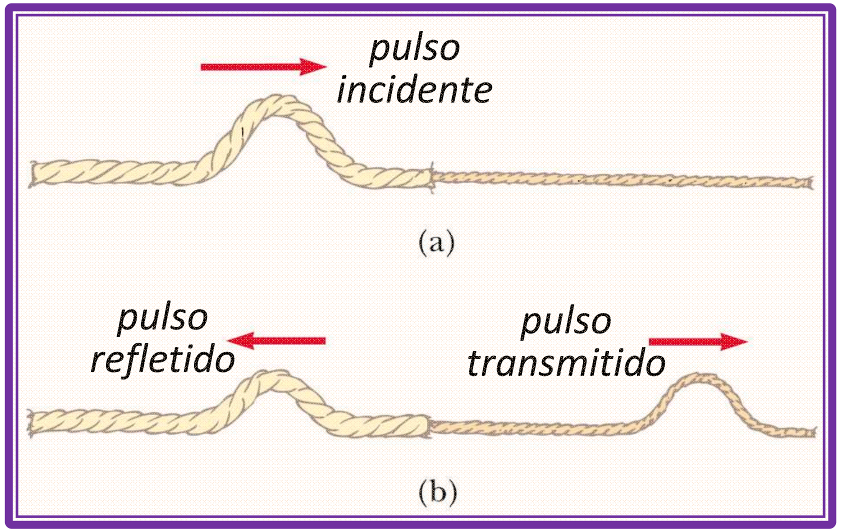
Lucy V. C. Assali

Reflexão de ondas

3) Junção de duas cordas (descontinuidade no meio):

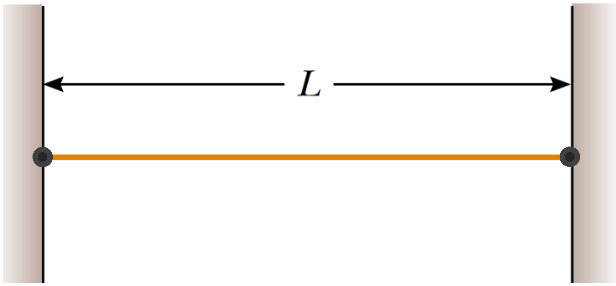
Duas cordas de diferentes densidades lineares e unidas. Se um pulso atinge a junção, onde há uma descontinuidade, há uma onda refletida e uma onda transmitida, cujas amplitudes devem ser obtidas a partir da equação da onda e das condições de contorno a que as ondas estão sujeitas na posição da descontinuidade, tal como a continuidade do deslocamento e da força nesse ponto.





Modos Normais de Vibração

- Ondas estacionárias em uma corda finita presa em ambas as extremidades:



Vamos considerar uma corda de comprimento L, fixa em ambas extremidades. Ondas estacionárias podem ser geradas na corda por uma superposição continua de ondas incidentes e refletidas nos extremos fixos. Esta corda terá um número de possíveis oscilações naturais, chamados de modos normais de vibração, cada qual com uma frequência característica.

Em geral, o movimento de uma corda vibrante é descrito por uma superposição de vários modos normais e quais destes modos estão presentes, em um determinado movimento, depende de como as oscilações tiveram início.

Condição de que as duas extremidades permaneçam fixas:

$$y(0,t) = y(L,t) = 0 \quad \forall\, t$$

Característica de um Modo Normal: *Onda estacionária*

$$y(x,t) = A(x)\cos(\omega t + \delta) \quad \text{solução de} \quad \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

Modos Normais de Vibração

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{v^2}A(x)\cos(\omega t + \delta) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 A}{dx^2}\cos(\omega t + \delta)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{d^2 A}{dx^2} + k^2 A = 0 \qquad \left(k = \frac{\omega}{v}\right)}$$

Solução: $A(x) = a\cos(kx) + b\,\mathrm{sen}(kx)$, onde $A(0) = A(L) = 0$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} A(0) = 0 \Longrightarrow a = 0 \Longrightarrow A(x) = b\,\mathrm{sen}(kx) \\ A(L) = 0 \Longrightarrow b\,\mathrm{sen}(kL) = 0 \Longrightarrow \boxed{k_n = \dfrac{n\pi}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L}v$$

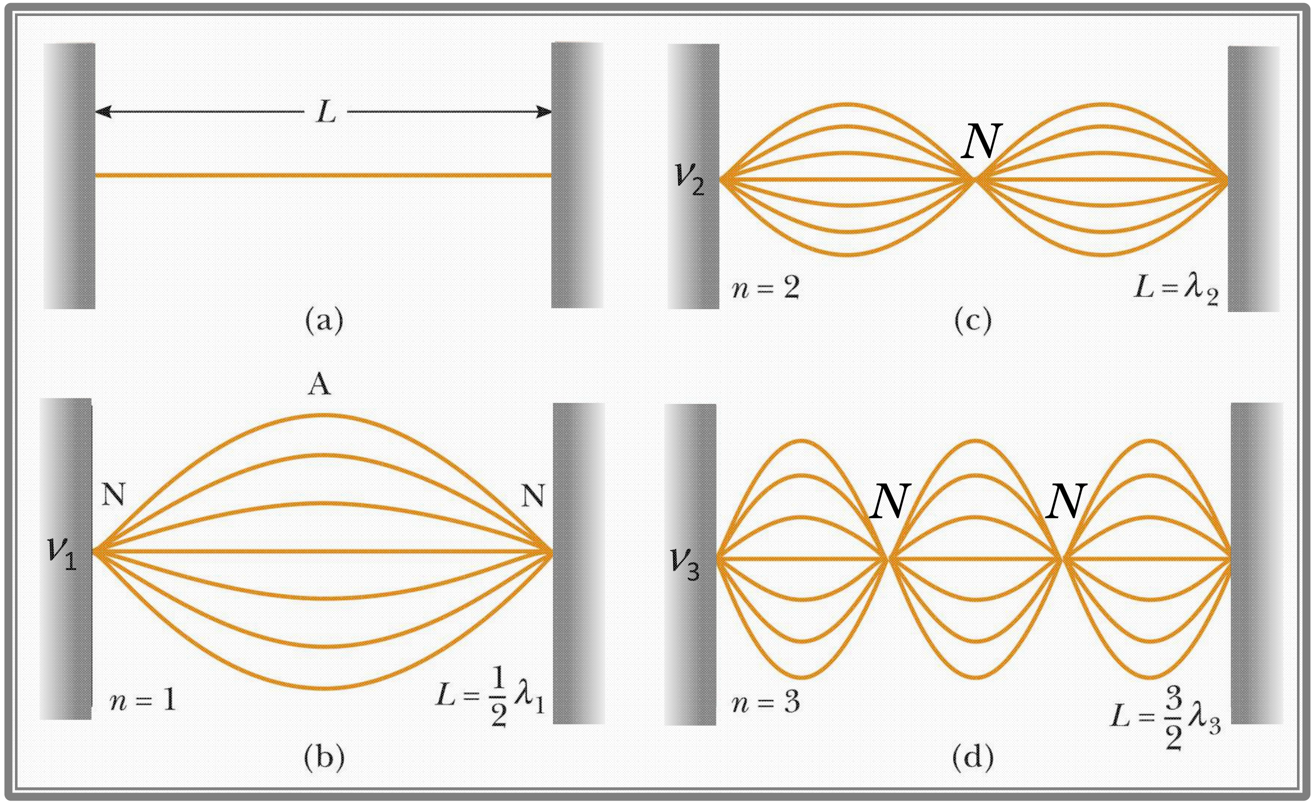
Os comprimentos de onda associados ao modos normais de vibração são:

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{2L}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)}$$

Lucy V. C. Assali

Modos Normais de Vibração

Os modos de vibração mais baixos estão ilustrados na figura abaixo:



Modo de ordem n: contém (n-1) nodos e n/2 comprimentos de onda

Frequência do modo n:

$$\nu_n = n\nu_1 \;\; \text{onde} \;\; \nu_1 = \frac{v}{2L} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \; (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

n 'ésimo harmônico da frequência ν_1 (frequência fundamental)

Lucy V. C. Assali

Exercícios

1. Uma corda uniforme de 20 m de comprimento e massa de 2 kg esta esticada sob uma tensão de 10 N. Faz-se oscilar transversalmente uma extremidade da corda, com amplitude de 3 cm e frequência de 5 oscilações por segundo. O deslocamento inicial da extremidade é de 1,5 cm para cima.

   (a) Ache a velocidade de propagação v e o comprimento de onda λ da onda progressiva gerada na corda;

   (b) Escreva, com função do tempo, o deslocamento transversal y de um ponto da corda situado à distância x da extremidade que se faz oscilar, após ser atingido pela onda e antes que ela chegue a outra extremidade;

   (c) Calcule a intensidade I da onda progressiva gerada.

Dados: $L = 20$ m; $m = 2$ kg; $A = 3$ cm $= 0,03$ m; $\nu = 5$ Hz; $T = 10$ N

(a) Densidade linear da corda: $\mu = \dfrac{m}{L} = \dfrac{2}{20} \Longrightarrow \mu = 0,1$ kg/m

Velocidade: $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{10}{0,1}} \Longrightarrow v = 10$ m/s

Comprimento de onda: $\lambda = \dfrac{v}{\nu} = \dfrac{10}{5} \Longrightarrow \lambda = 2$ m

Lucy V. C. Assali

(b) Equação da corda: $y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \delta) = 0,03\cos(\pi x - 10\pi t + \delta)$, pois $\omega = 2\pi\nu = 10\pi$ rad/s e $k = \frac{\omega}{v} = \frac{10\pi}{10} = \pi$ rad/m
De acordo com o problema, temos, em $t = 0$ e $x = 0$, $y = 1,5$ cm $= 0,015$ m. Substituindo na equação da corda:

$$y(0,0) = 0,015 = 0,03\cos\delta \Longrightarrow \cos\delta = \frac{1}{2} \Longrightarrow \delta = \frac{\pi}{3}$$

$$\Longrightarrow \boxed{y(x,t) = 0,03\cos(\pi x - 10\pi t + \pi/3)}$$

(c) A intensidade I representa o fluxo médio de energia através de um ponto qualquer da corda, ou seja, a intensidade é dada como o valor da potência média sobre um período. Assim: $I = \dfrac{1}{2}\,\nu\, v\, \omega^2\, A^2 \Longrightarrow I = 0,44$ W