Cálculo Numérico - Segunda

05/06/17

Crescimento Exponencial

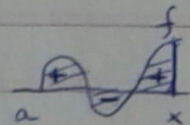
1. primitiva de x^{β}? p/ $\beta \neq -1$

$$\frac{x^{\beta+1}}{\beta+1}$$

E como fica x^{-1}? "fabrico" uma função que tem derivada a x^{-1}.

↳ Teorema Fundamental do Cálculo

Se $F(x) = \int_a^x f$

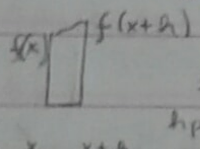


então $F'(x) = f(x)$

Por quê?

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\int_a^{x+h} f - \int_a^x f}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\int_x^{x+h} f}{h}$$

$\int_x^{x+h} f =$



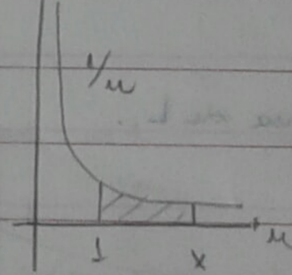
$\underset{h \text{ pequeno}}{\simeq} h \cdot f(x)$

↳ f contínua

$$= \lim \frac{h \cdot f(x)}{h} = f(x)$$

Defina

$$L(x) = \int_1^x \frac{1}{u}\, du$$



Pelo teorema fundamental do cálculo

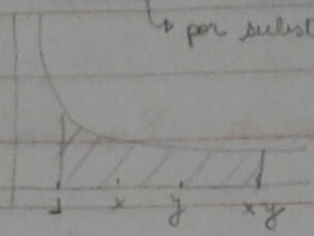
Defina $f(x) = \frac{1}{x}$ e defina $L(x) = \int_1^x f$

$L'(x) = f(x) = \frac{1}{x}$

L é a primitiva que faltava.

segue se $\int_y^{xy} \frac{1}{u}\,du = \int_1^{x} \frac{1}{u}\,du$ 05/06/18

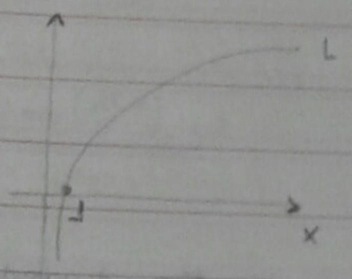
↳ por substituição das variáveis



2. L tem propriedades legais.

$$L(x\cdot y) = L(x) + L(y)$$

$L(1) = 0$, L é crescente



OBS: "Acaba que essa função L é um logaritmo em uma certa base".

Suponha que eu saiba que $L(x) = \log_b x$

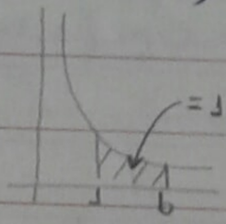
Def. de logaritmo

$$y = \log_b x \text{ se } b^y = x$$

Como descubro b?

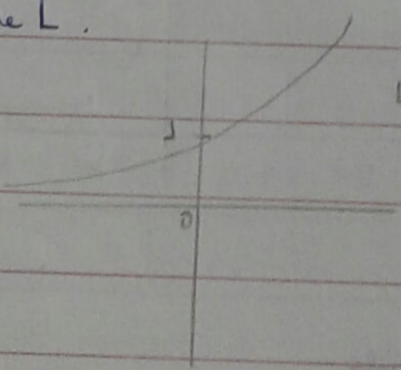
$$L(b) = \log_b b = 1$$

Ou seja, b é solução da equação $L(x) = 1$



A solução vai ser um número irracional 2,718..., conhecido como "e".

3. A inversa de L:



L^{-1} recebe o nome de "exponencial". $\exp(x) \overset{def}{=} L^{-1}(x)$

"acaba que" $\exp(x) = e^x$

05/06/17

Derivadas

$L'(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad\qquad exp'(x) = ?$

$L(exp(x)) = L(L^{-1}(x)) = x$

$\underbrace{\frac{d}{dx} L(exp(x))} = 1$

regra da cadeia: $1 = L'(exp(x)) \cdot exp'(x)$

$1 = \frac{1}{exp(x)} \cdot exp'(x)$

$exp'(x) = exp(x)$

4. Decaimento

t: tempo

$P(t)$: quantidade de isótopo radiativo

Lei de decaimento: $P(t+\Delta t) - P(t) = -$ (isótopos que decaem entre t e $t+\Delta t$)

* a quantidade de isótopos que decaem é proporcional ao tamanho da amostra e ao Δt.

$P(t+\Delta t) - P(t) = -\gamma \cdot \Delta t \cdot P(t)$

$\boxed{P'(t) = -\gamma P(t)}$

5. Vamos resolver: achar $P(t)$

$\frac{P'(t)}{P(t)} = -\gamma$

$\int_{t_0}^{t} \underbrace{\frac{P'(s)}{P(s)}} ds = \int_{t_0}^{t} (-\gamma) ds$

$u = P(s)$ $\qquad = -\gamma (t - t_0)$

$du = P'(s) ds$

$\int_{P(t_0)}^{P(t)} \frac{1}{u} du = -\gamma (t - t_0)$

primitiva de $\frac{1}{u} = L(u)$

$L(P(t)) - L(P(t_0)) = -\gamma (t - t_0)$

* Vamos isolar $P(t)$:

$L(P(t)) = L(P(t_0)) - \gamma (t - t_0)$

* aplicamos L^{-1} dos dois lados:

$L^{-1}(L(P(t))) = L^{-1}(L(P(t_0)) - \gamma (t - t_0))$

$= P(t)$ $\qquad \underset{exp}{\uparrow}$

$= \exp(L(P(t_0)) - \gamma(t-t_0)$

[Propriedade de exp: $\exp(a+b) = \exp(a) + \exp(b)$]

$= \exp(L(P(t_0)) \cdot \exp(-\gamma(t-t_0))$

inversas entre si

$= P(t_0) \cdot e^{-\gamma(t-t_0)}$

$$\boxed{\text{Então: } P(t) = P(t_0) \cdot e^{-\gamma(t-t_0)}}$$

* Verificando que $P'(t) = -\gamma P(t)$

$$\frac{d}{dt}\left[P(t_0) \cdot e^{-\gamma(t-t_0)}\right] = \underbrace{P(t_0) \cdot e^{-\gamma(t-t_0)}}_{P(t)} (-\gamma)$$

$$P'(t) = -\gamma P(t) \,//$$

Suponha $t_0 = 0$

$$P(t) = P_0 \cdot e^{-\gamma t}$$

$t_{1/2}$ é o "t" tal que $P(t) = \frac{1}{2} P_0$ ∴ É só resolver $P_0 \cdot e^{-\gamma t} = \frac{P_0}{2}$

$= e^{-\gamma t} = \frac{1}{2}$

$\ln(e^{-\gamma t}) = \ln\frac{1}{2}$

$-\gamma t = \ln\frac{1}{2}$

$-\gamma t = -\ln 2$

$$\boxed{t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\gamma}}$$

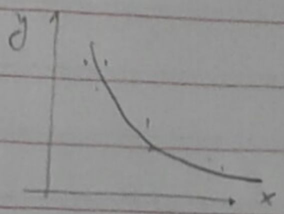
05/06/

Nosso curso:

$y = "P"$ $\quad x = "t"$

$P_0 : a \quad -\gamma : b$

$y = a e^{bx}$



$\ln y = \ln a + \ln(e^{bx})$

$\boxed{\underbrace{\ln y = \ln a}_{\cong \tilde{a}} + bx}$ reta

$1 \cdot \tilde{a} + xb = \ln y$

$$\begin{cases} \langle 1, 1\rangle \tilde{a} + \langle 1, x\rangle b = \langle 1, \ln y\rangle \\ \langle x, 1\rangle \tilde{a} + \langle x, x\rangle b = \langle x, \ln y\rangle \end{cases}$$

$\downarrow$

$(\tilde{a}, b) \qquad a = e^{\tilde{a}}$

— " —

$e^{\lambda t} - 1 \approx \lambda t$