

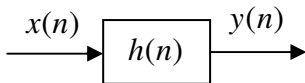
PSI3460 – Laboratório de Circuitos Eletrônicos

Magno T. M. Silva

Escola Politécnica da USP

Maio de 2017

0 Relação entrada-saída



- ▶ Somatório de convolução

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

1 Sistemas FIR e IIR causais

- ▶ Sistemas FIR (*Finite Impulse Response*)

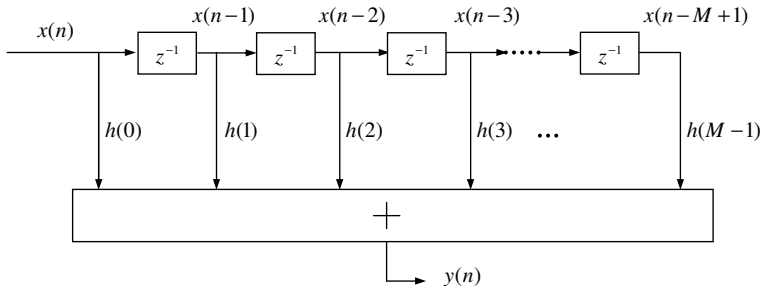
$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k)$$

- ▶ Sistemas IIR (*Infinite Impulse Response*)

$$y(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

2 Estrutura de implementação de um sistema FIR

$$y(n] = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n - k]$$



3 Sistemas descritos por equações de diferenças

- ▶ Equação de diferença linear com coeficientes constantes

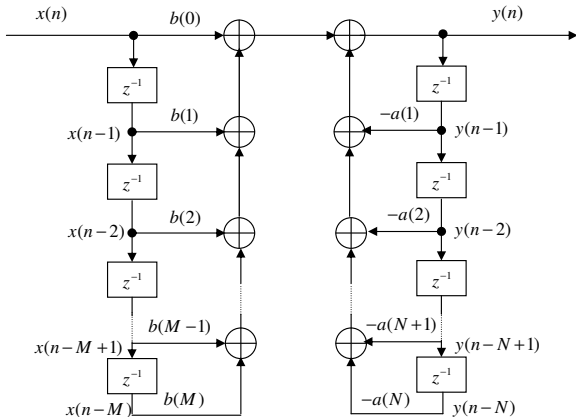
$$\sum_{k=0}^N a(k)y(n-k) = \sum_{\ell=0}^M b(\ell)x(n-\ell)$$

- ▶ Formulação recursiva

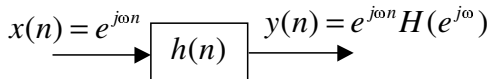
$$y(n) = \frac{1}{a(0)} \left(- \sum_{k=1}^N a(k)y(n-k) + \sum_{\ell=0}^M b(\ell)x(n-\ell) \right)$$

4 Estrutura de implementação de um sistema IIR

$$a(0) = 1 : y(n) = \sum_{\ell=0}^M b(\ell)x(n - \ell) - \sum_{k=1}^N a(k)y(n - k)$$



5 Resposta em frequência



$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{j\omega(n-k)} \\ &= e^{j\omega n} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-j\omega k}}_{H(e^{j\omega})} = e^{j\omega n} H(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Resposta em frequência (TFTD)

5 Resposta em frequência

- ▶ É 2π -periódica:

$$H\left(e^{j(\omega+2k\pi)}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \underbrace{e^{-j(\omega+2k\pi)n}}_{e^{-j\omega n}} = H(e^{j\omega})$$

- ▶ É uma função complexa de ω :

$$H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\theta(\omega)}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})} \quad (\text{módulo})$$

$$\theta(\omega) = \text{arctg} \frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})} \quad (\text{fase})$$

5 Sistema com resposta ao pulso unitário real

- ▶ O complexo conjugado de $H(e^{j\omega})$ é

$$H^*(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h^*(k)e^{j\omega k}$$

- ▶ Se o $h(n)$ for real, então:

$$H^*(e^{j\omega}) = H(e^{-j\omega})$$

$$\theta(\omega) = -\theta(-\omega)$$

$$|H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})|$$

Fase: função ímpar

Módulo: função par

5 Exemplo: Sistema de média móvel

$$y(n) = \frac{1}{3} [x(n-1) + x(n) + x(n+1)]$$

- ▶ Resposta ao pulso unitário

$$h(n) = (1/3) [\delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-1)]$$

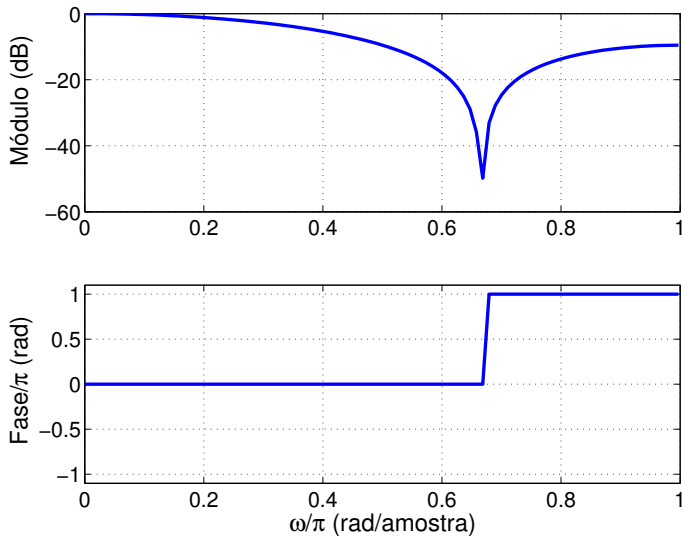
- ▶ Resposta em frequência

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-1}^{k=1} h(k) e^{-j\omega k} = \frac{1}{3} [e^{-j\omega(-1)} + e^{-j\omega 0} + e^{-j\omega 1}]$$

- ▶ Módulo: $|H(e^{j\omega})| = (1/3) |2 \cos(\omega) + 1|$

- ▶ Fase: $\theta(\omega) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \omega \leq 2\pi/3 \\ \pi, & 2\pi/3 \leq \omega \leq \pi \end{cases}$

5 Resposta em frequência: módulo e fase



6 Sistema descrito por equação de diferenças

$$y(n) = \sum_{\ell=0}^M b(\ell)x(n-\ell) - \sum_{k=1}^N a(k)y(n-k)$$

Entrada $x(n) = e^{j\omega n}$

Saída $y(n) = e^{j\omega n} H(e^{j\omega}) = x(n)H(e^{j\omega})$

Resposta em frequência:
$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{\ell=0}^M b(\ell)e^{-j\omega\ell}}{1 + \sum_{k=1}^N a(k)e^{-j\omega k}}$$

7 Resposta em frequência a partir de polos e zeros

- ▶ Função de transferência racional

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

- ▶ M zeros: z_1, z_2, \dots, z_M
- ▶ N polos: p_1, p_2, \dots, p_N

7 Resposta em frequência a partir de polos e zeros

- ▶ Função de transferência racional, reescrita em função dos polos e zeros

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{b_0}{a_0} z^{N-M} \frac{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_M)}{(z - p_1)(z - p_2) \cdots (z - p_N)} \\ &= \frac{b_0}{a_0} z^{N-M} \frac{\prod_{k=1}^M (z - z_k)}{\prod_{k=1}^N (z - p_k)} \end{aligned}$$

7 Resposta em frequência a partir de polos e zeros

- ▶ $(z - z_k) = r_k e^{j\varphi_k}$ pode ser interpretado como um vetor do ponto z_k no plano z ao ponto $z = e^{j\omega}$ da circunferência unitária.
- ▶ Analogamente, $(z - p_\ell) = d_\ell e^{j\phi_\ell}$ pode ser interpretado com um vetor de p_ℓ a $z = e^{j\omega}$
- ▶ Assim, podemos escrever

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{|b_0| r_1 r_2 \cdots r_M}{|a_0| d_1 d_2 \cdots d_N} = \frac{|b_0| \prod_{k=1}^M r_k}{|a_0| \prod_{k=1}^N d_k}$$

$$\begin{aligned}\theta(\omega) &= \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_M - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_N + (N - M)\omega \\ &= \sum_{k=1}^M \varphi_k - \sum_{k=1}^N \phi_k + (N - M)\omega\end{aligned}$$

- ▶ O termo $(N - M)\omega$ é uma fase linear que representa um atraso de $N - M$ amostras.

7 Resposta em frequência a partir de polos e zeros

Exemplo

Dada a função de transferência

$$H(z) = \frac{2 + 2z^{-2}}{1 - 0.9482z^{-1} + 0.4900z^{-2}}.$$

Calcule o valor de $H(e^{j\pi/4})$ a partir do diagrama de polos e zeros.

Solução

Calculando-se os polos e zeros do sistema, obtêm-se

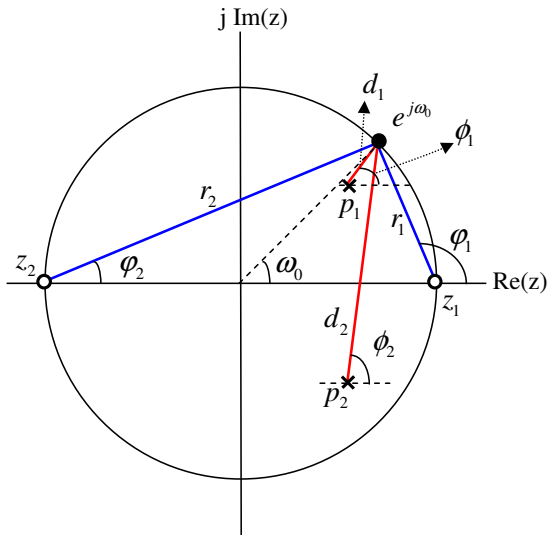
$$z_1 = 1, \quad z_2 = -1,$$

$$p_1 = 0,4741 + j0,5150 = 0,7e^{j0,2631\pi}$$

$$p_2 = 0,4741 - j0,5150 = 0,7e^{-j0,2631\pi}$$

7 Resposta em frequência a partir de polos e zeros

Exemplo (continuação): $\omega_0 = \pi/4$



7 Resposta em frequência a partir de polos e zeros

Exemplo (continuação)

- ▶ Para $z = e^{j\pi/4}$, pode-se calcular

$$(z - z_1) = e^{j\pi/4} - 1 = -0,2929 + j0,7071 \Rightarrow r_1 e^{j\varphi_1} = 0,7654 e^{j1,9635}$$

$$(z - z_2) = e^{j\pi/4} + 1 = +1,7071 + j0,7071 \Rightarrow r_2 e^{j\varphi_2} = 1,8478 e^{j0,3927}$$

$$(z - p_1) = e^{j\pi/4} - 0,4741 - j0,5150 \Rightarrow d_1 e^{j\phi_1} = 0,3020 e^{j0,6895}$$

$$(z - p_2) = e^{j\pi/4} - 0,4741 + j0,5150 \Rightarrow d_2 e^{j\phi_2} = 1,2441 e^{j1,3824}$$

- ▶ Notando que $a_0 = 1$ e $b_0 = 2$, o módulo e a fase da resposta em frequência em $e^{j\omega_0} = e^{j\pi/4}$ valem

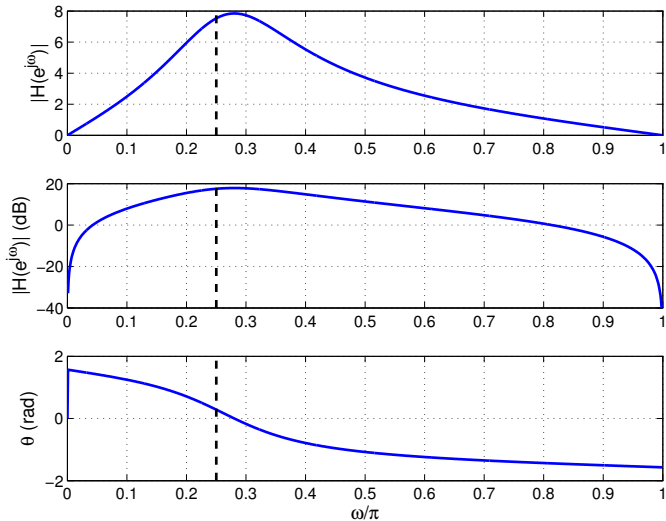
$$|H(e^{j\pi/4})| = \frac{b_0 r_1 r_2}{a_0 d_1 d_2} = 7,5282$$

e

$$\varphi(\pi/4) = \varphi_1 + \varphi_2 - \phi_1 - \phi_2 = 0,2843 \text{ rad.}$$

7 Resposta em frequência a partir de polos e zeros

Exemplo (continuação)



8 Projeto de filtros *notch*

- ▶ Relação entre frequência angular de tempo contínuo e frequência angular de tempo discreto

$$\omega = \Omega T_a$$

- ▶ Critério de Nyquist

$$f_a \geq 2f_M$$

em que f_M é a frequência máxima do sinal

- ▶ Para $f_a = 2f_M$ temos

$$\omega_M = 2\pi f_M T_a = 2\pi \frac{f_a}{2} T_a = \pi$$

- ▶ π está relacionado com a metade da frequência de amostragem, ou seja, $f_a/2$

8 Projeto de filtros *notch* – Exemplo

Um eletrocardiógrafo sofre interferência indesejada em 60 Hz. Para eliminar essa interferência, projete um filtro com coeficientes reais de menor ordem possível e que tenha magnitude unitária ($|H(e^{j\omega})| = 1$) em $\omega = 0$. Assuma que a frequência de amostragem é igual a $f_a = 360$ Hz. Pede-se:

- Projete um filtro *notch* do tipo FIR, obtendo a função de transferência em potências negativas de z .
- Projete um filtro *notch* do tipo IIR, obtendo a função de transferência em potências negativas de z e assumindo que o módulo dos polos é igual 0,9.
- Para cada filtro, esboce o módulo da resposta em frequência em função da frequência em Hz.

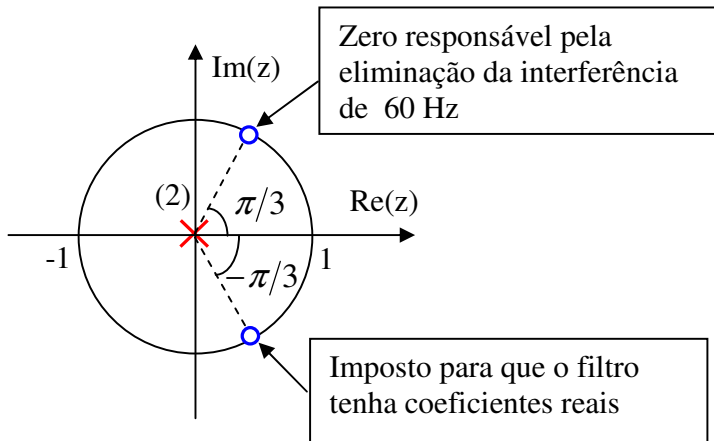
8 Projeto de filtros *notch* – Exemplo

Filtro FIR

- ▶ a frequência $\omega = \pi$ radianos/amostra corresponde a $f_a/2 = 180$ Hz.
- ▶ a interferência de 60 Hz corresponderá a $\pi/3$ radianos (ou 60°)
- ▶ para que ele tenha coeficientes reais, ele deve ter zero em $z_1 = e^{j\pi/3}$ e outro em $z_2 = z_1^* = e^{-j\pi/3}$.

8 Projeto de filtros *notch* – Exemplo

Filtro FIR – diagrama de polos e zeros



8 Projeto de filtros *notch* – Exemplo

Filtro FIR – função de transferência

$$\begin{aligned}H(z) &= b_0(1 - z_1z^{-1})(1 - z_2z^{-1}) \\ &= b_0(1 - e^{j\pi/3}z^{-1})(1 - e^{-j\pi/3}z^{-1}) \\ &= b_0(1 - z^{-1} + z^{-2})\end{aligned}$$

Neste caso, para que $|H(e^{j0})| = |H(z = 1)| = 1$, tem-se que $b_0 = 1$.

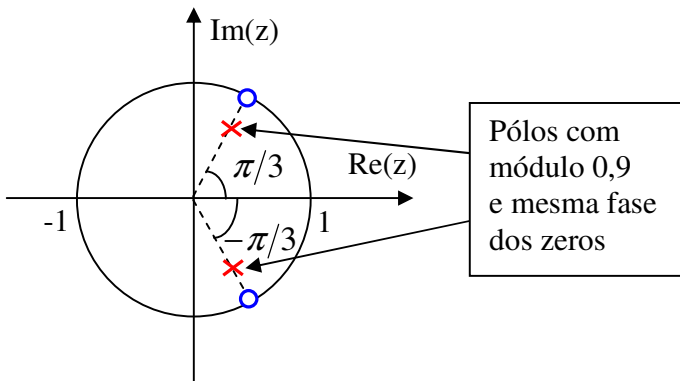
$$H(z) = 1 - z^{-1} + z^{-2}$$

8 Projeto de filtros *notch* – Exemplo

Filtro IIR – diagrama de polos e zeros

Além dos zeros do filtro FIR, o filtro IIR deverá ter polos iguais a

$$p_1 = 0,9e^{j\pi/3} \text{ e } p_2 = 0,9e^{-j\pi/3}$$



8 Projeto de filtros *notch* – Exemplo

Filtro IIR – função de transferência

$$H(z) = b_0 \frac{1 - z^{-1} + z^{-2}}{D(z)}$$

Note que o polinômio do numerador veio do projeto do filtro FIR e

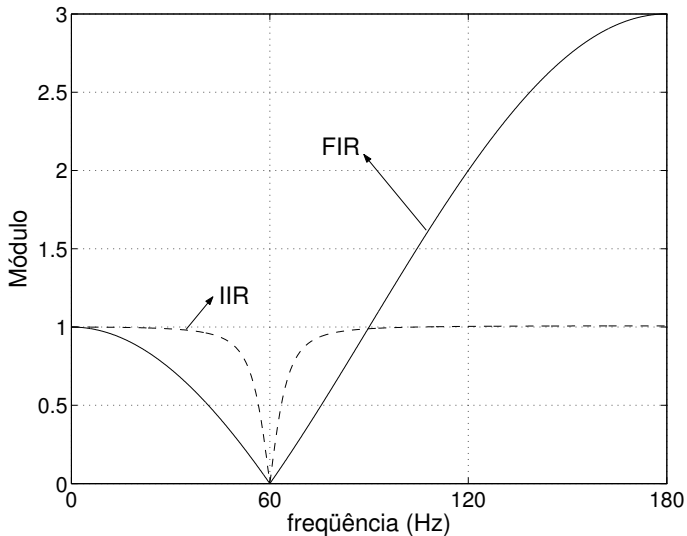
$$\begin{aligned} D(z) &= (1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1}) \\ &= (1 - 0,9e^{j\pi/3} z^{-1})(1 - 0,9e^{-j\pi/3} z^{-1}) \\ &= 1 - 0,9z^{-1} + 0,81z^{-2}. \end{aligned}$$

Neste caso, para que $|H(e^{j0})| = |H(z = 1)| = 1$, tem-se que $b_0 = (1 - 0,9 + 0,81)/(1 - 1 + 1) = 0,91$.

$$H(z) = 0,91 \frac{1 - z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0,9z^{-1} + 0,81z^{-2}}$$

8 Projeto de filtros *notch* – Exemplo

Filtros FIR e IIR – módulos da resposta em frequência



9 Efeitos em sinais de áudio

Eco simples

- ▶ O som direto e um eco simples pode ser gerado por um filtro FIR, caracterizado pela equação de diferenças

$$y(n) = x(n) + \alpha x(n - R), \quad |\alpha| < 1,$$

o que leva à função de transferência

$$H(z) = 1 + \alpha z^{-R}$$

- ▶ R representa o atraso em número de amostras: tempo que o som leva para se propagar da fonte até o ouvinte devido a uma reflexão
- ▶ α ($|\alpha| < 1$) representa a perda do sinal causada pela propagação e reflexão

9 Efeitos em sinais de áudio

Ecoss múltiplos

- ▶ Para gerar um número fixo de ecos espaçados de R amostras com um decaimento exponencial de amplitudes, pode-se usar um filtro FIR com função de transferência

$$H(z) = 1 + \alpha z^{-R} + \alpha^2 z^{-2R} + \dots + \alpha^{N-1} z^{-(N-1)R}$$

- ▶ Note que essa função de transferência pode ser reescrita como

$$H(z) = \frac{1 - \alpha^N z^{-NR}}{1 - \alpha z^{-R}}$$

que é uma realização IIR para o mesmo filtro.

9 Efeitos em sinais de áudio

Ecoss múltiplos

- ▶ Um número infinito de ecos espaçados de R amostras com decaimento exponencial de amplitudes pode ser gerado pelo filtro

$$H(z) = 1 + \alpha z^{-R} + \alpha^2 z^{-2R} + \dots = \frac{1}{1 - \alpha z^{-R}}$$

9 Efeitos em sinais de áudio

Reverberação

- ▶ Um reverberador mais realista pode ser criado com um filtro passa-tudo

$$H(z) = \frac{\alpha + z^{-R}}{1 + \alpha z^{-R}}$$

- ▶ Em regime, o balanço espectral do som não se altera devido ao fato da resposta em frequência do passa-tudo ser constante.

Há outros efeitos como *flanging*, *chorus*, etc. Quem tiver interesse, consultar

S. K. Mitra, *Digital Signal Processing: a computer based approach*, McGraw Hill, 2006.

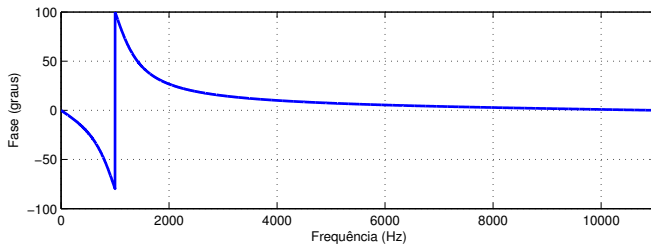
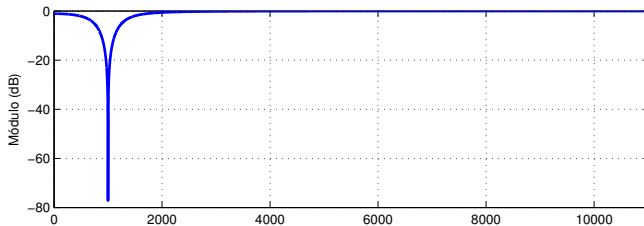
10 Projeto 1

Filtro Notch

- ▶ Considere o sinal da rádio amostrado com $f_a = 22050$ Hz e uma interferência senoidal de 1000 Hz.
- ▶ Projete um filtro notch IIR para eliminar essa interferência do sinal. Considere, por exemplo que os polos têm módulo igual a 0,9.

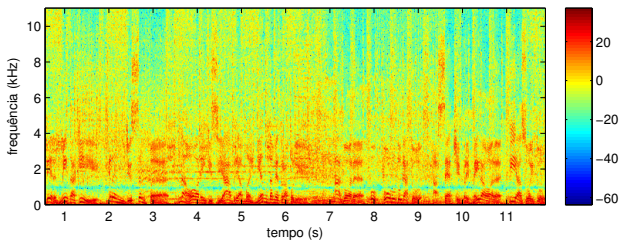
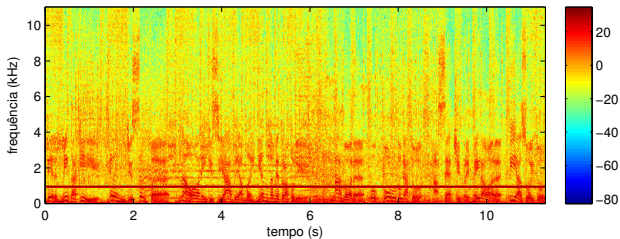
10 Projeto 1

Filtro Notch – Resposta em frequência



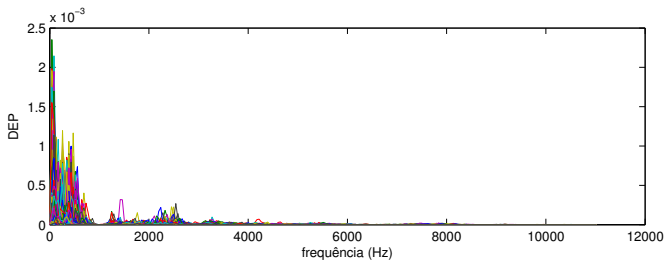
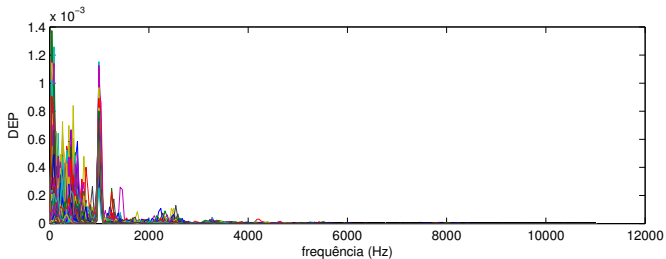
10 Projeto 1

Filtro Notch – Espectrograma do sinal antes e depois da filtragem



10 Projeto 1

Filtro Notch – Densidade Espectral de Potência antes e depois da filtragem



10 Projeto 2

Efeitos em sinais de áudio

- ▶ Projete um filtro FIR para inserir no sinal da rádio o efeito de eco simples
- ▶ Projete um filtro IIR para inserir no sinal da rádio o efeito de ecos múltiplos e/ou reverberação