

Introdução à Modelagem e ao Método dos Elementos Finitos (MEF)

Prof. Alfredo Gay Neto
Prof. Miguel Bucalem

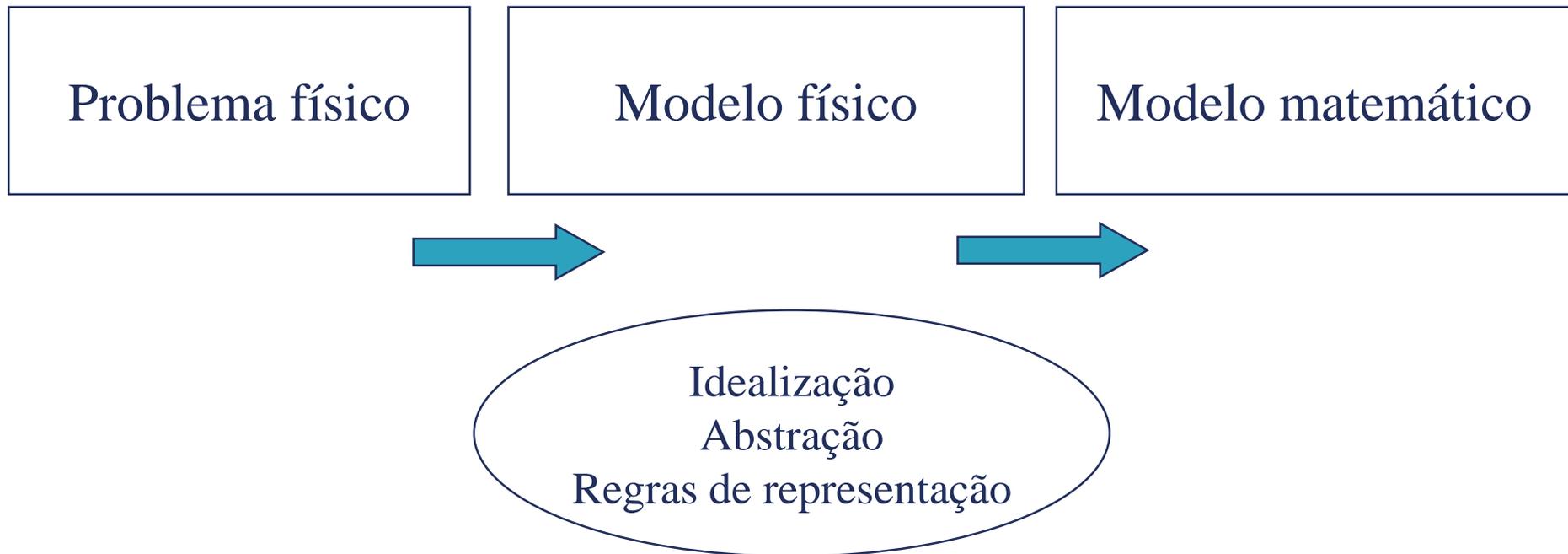


PEFUSP

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA
DE ESTRUTURAS E GEOTÉCNICA

PEF 5716
2017

- ▶ Um modelo é uma representação aproximada da realidade



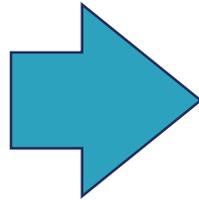
- ▶ Na engenharia sempre se recorre à modelagem para previsão de falhas/eventos
- ▶ Todo modelo possui hipóteses simplificadoras, ainda que sejam mais ou menos restritivas

- ▶ Seja uma situação em que você deseja atravessar um rio, utilizando-se para tal de um tronco de árvore como “ponte”.
- ▶ Propor diferentes modelos para esse problema.
 - Estimar carga máxima a ser colocada.
 - Elencar as hipóteses simplificadoras adotadas



- ▶ Consiste na escolha sucessiva de modelos, de acordo com a necessidade(s) e pergunta(s) a serem respondidas
 - Modelos analíticos
 - Modelos numéricos

Problema Físico



Modelo Matemático 1

Modelo Matemático 2

Modelo Matemático 3

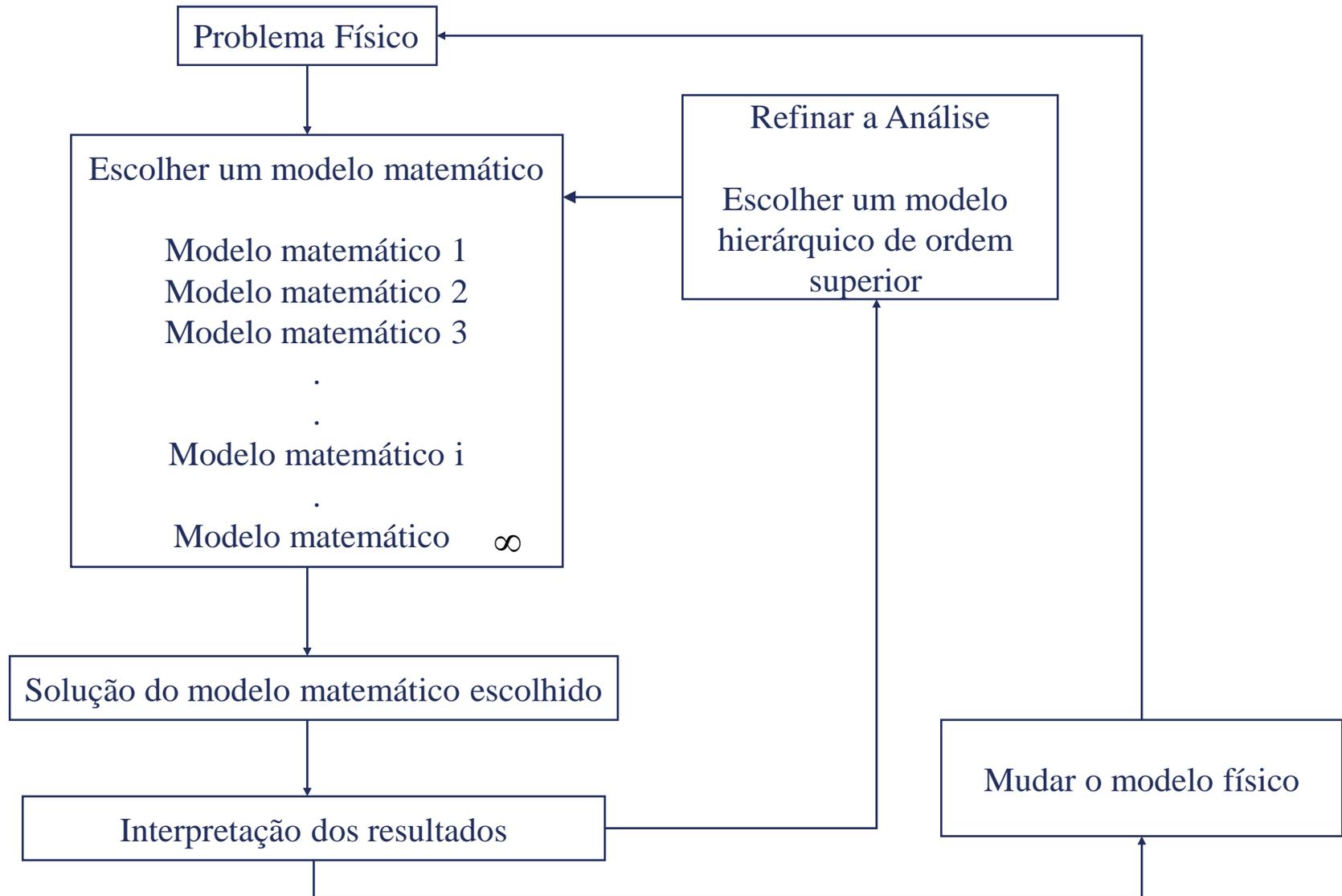
.

Modelo Matemático i

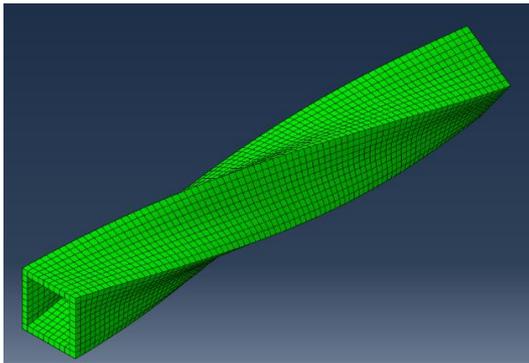
.

Modelo Matemático ∞

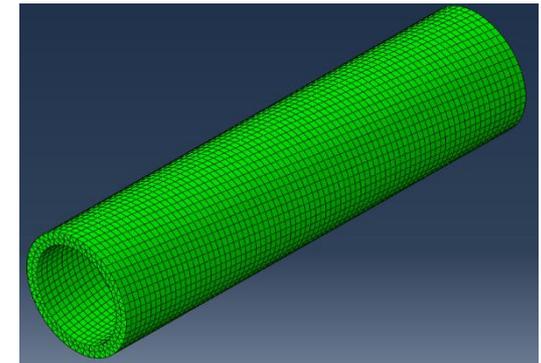
Loop de modelagem hierárquica



- ▶ Um modelo sólido 3D representa um problema físico da forma mais exata possível
 - Não são feitas simplificações na cinemática a priori
 - É possível representar um nível muito fiel de detalhamento geométrico



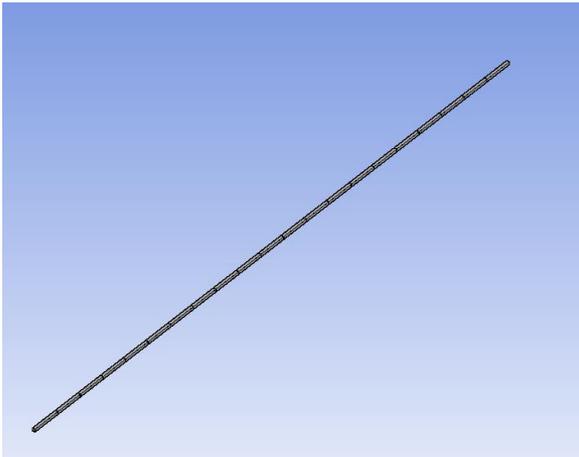
Exemplo: problema de torção modelado com elementos sólidos 3D - MEF
O empenamento surge naturalmente!



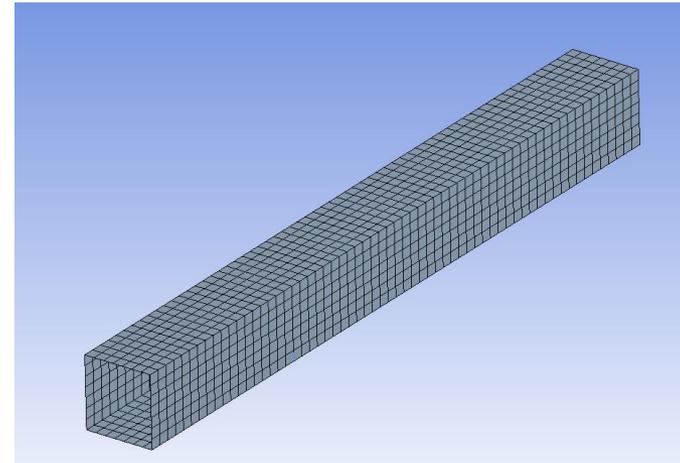
- ▶ É possível realizar algumas simplificações cinemáticas, levando aos chamados modelos sólidos 2D
 - Estado Plano de Tensão
 - Estado Plano de Deformação
 - Modelos axi-simétricos

- ▶ Um modelo estrutural é aquele que possui suas bases nas hipóteses cinemáticas de alguma teoria estrutural, tais como:
 - Barras (Euler–Bernoulli ou Timoshenko)
 - Placas (Kirchhoff–Love ou Mindlin–Reissner)
 - Membranas
 - Cascas

Exemplo: o mesmo sólido do exemplo anterior modelado com elementos de barra e placa 3D – MEF



Barra: somente o eixo é representado na geometria do modelo



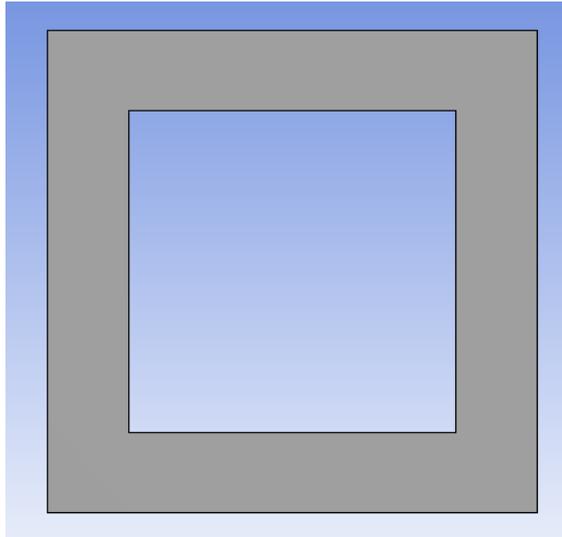
Placa: a superfície média de cada placa é representada no modelo

- ▶ Ao realizar um modelo estrutural, sempre alguma simplificação geométrica é inserida
 - Barras: somente a geometria do eixo é inserida
 - Placas/cascas: somente a superfície média ou equivalente é inserida
- ▶ Em programas de elementos finitos, o usuário deve inserir dados adicionais que permitam que o programa “entenda” o que se deseja modelar
 - Barras: é necessário introduzir a informação da seção transversal
 - Placas/cascas: é necessário introduzir a informação da espessura

- ▶ **Placas:**
 - elementos estruturais planos em sua configuração indeformada
 - possuem uma das dimensões muito menor do que as outras (espessura)
 - trabalham sob flexão

Obs.: frequentemente em programas de MEF utilizamos o modelo estrutural de **casca** para modelagem de placas (a casca é capaz de modelar os efeitos de placa e membrana, sendo um modelo estrutural mais elaborado que a placa)

Exemplo: linha elástica de viga bi-engastada



Seção de viga do tipo caixão

$E = 200 \text{ GPa}$ (aço estrutural)

$I = 541.666.666,7 \text{ mm}^4$

$L = 10 \text{ m}$

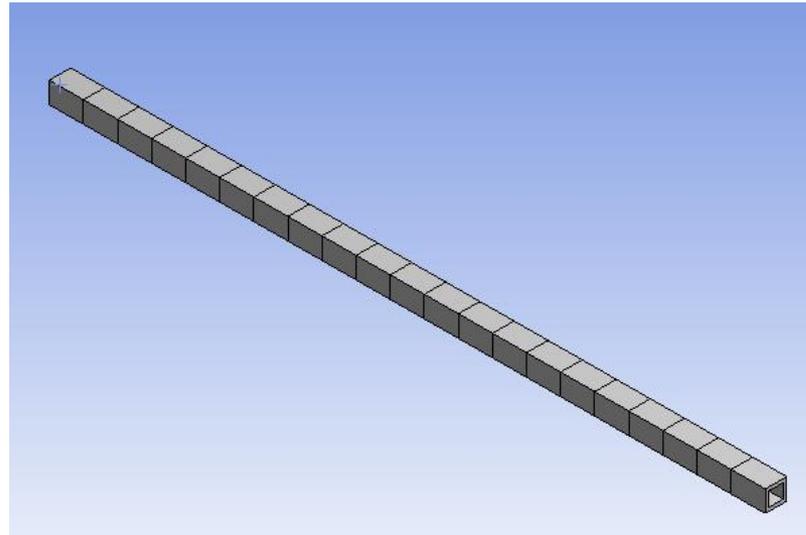
Condições de contorno:

bi-engastamento

Carregamento:

Carga uniformemente distribuída

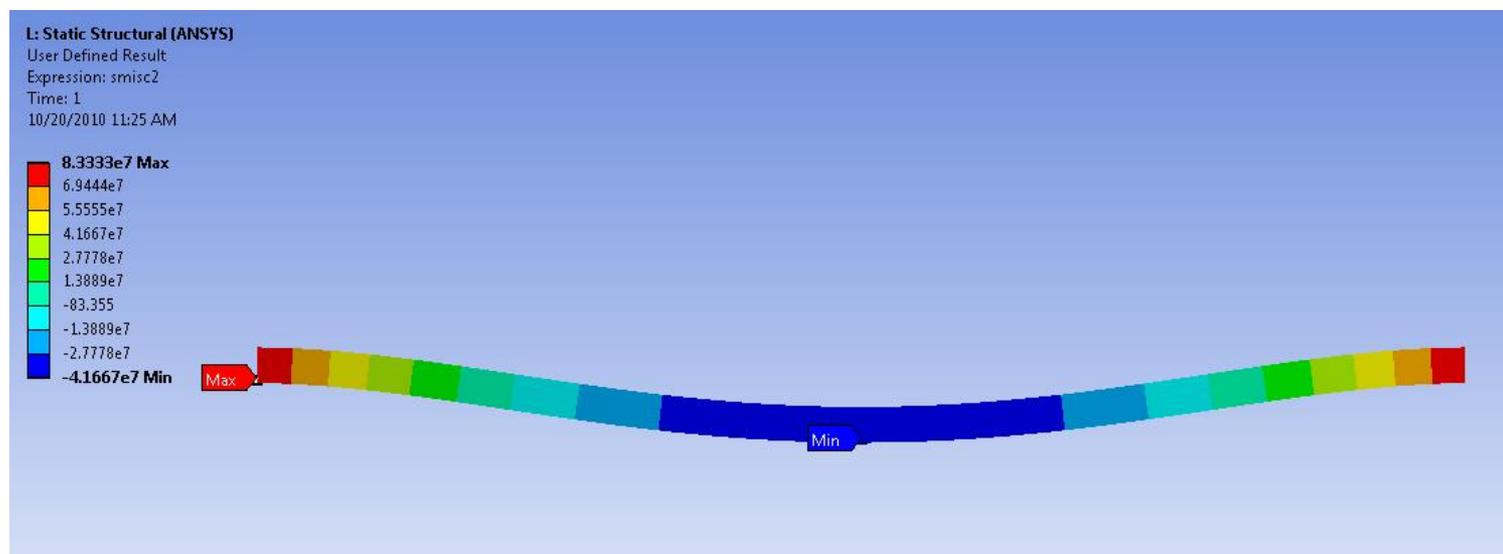
$q = 10 \text{ N/mm}$



Solução dos momentos fletores nas extremidades A e B e no centro:

$$M_A = M_B = -\frac{qL^2}{12} = -\frac{10 \cdot (10.000)^2}{12} \approx -83.333.333 \text{ N.mm}$$

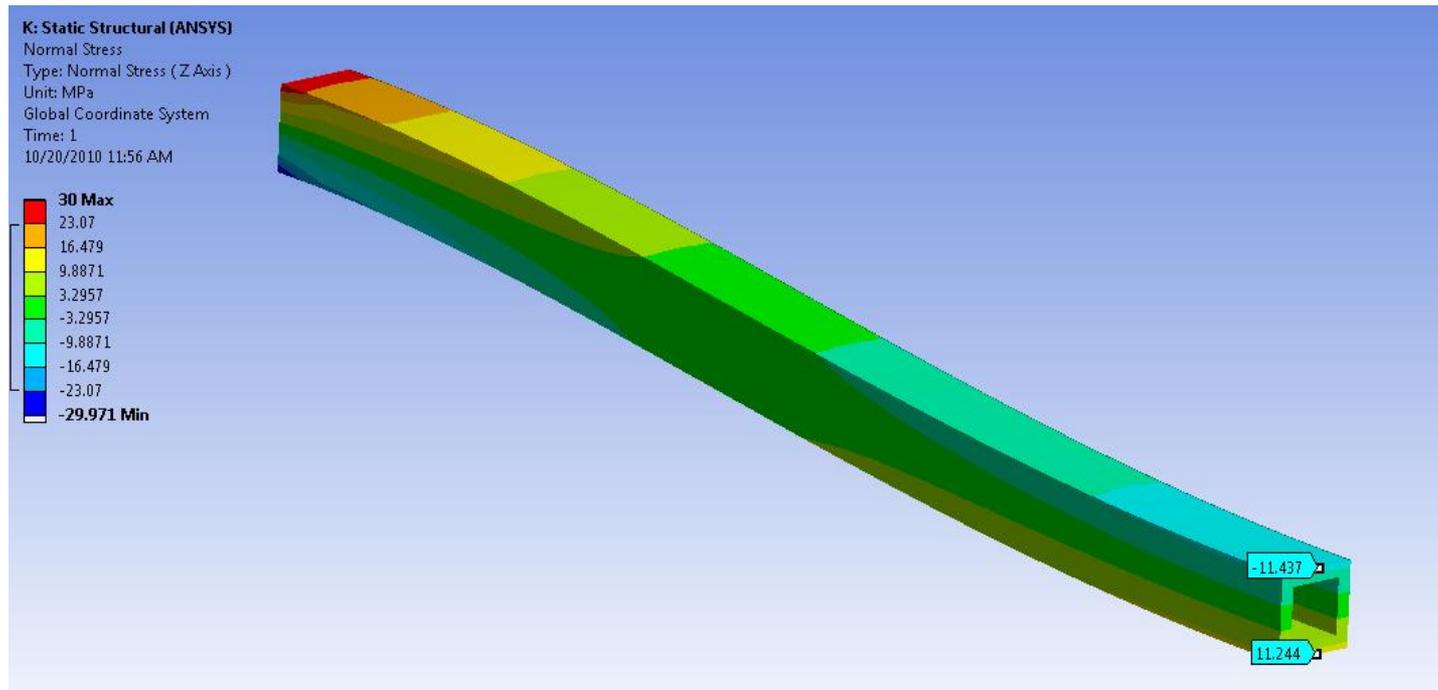
$$M_{centro} = \frac{qL^2}{24} \approx 41.666.666 \text{ N.mm}$$



Formulações analíticas retiradas de “Formulas for Stress and Strain”
(Roark e Young)

$$\sigma_A = \sigma_B = \frac{|M_A|y}{I} = \frac{83.333.333 \cdot 150}{541.666.666,7} = 23,07 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\text{centro}} = 11,54 \text{ MPa}$$

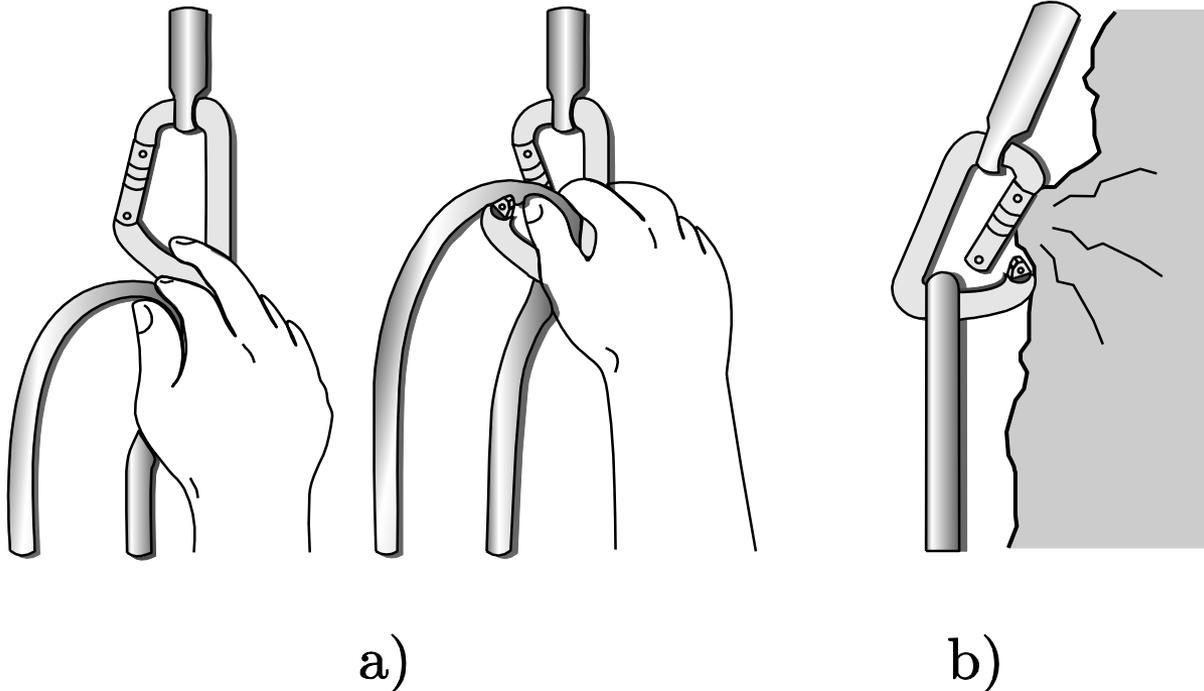


(viga em corte)

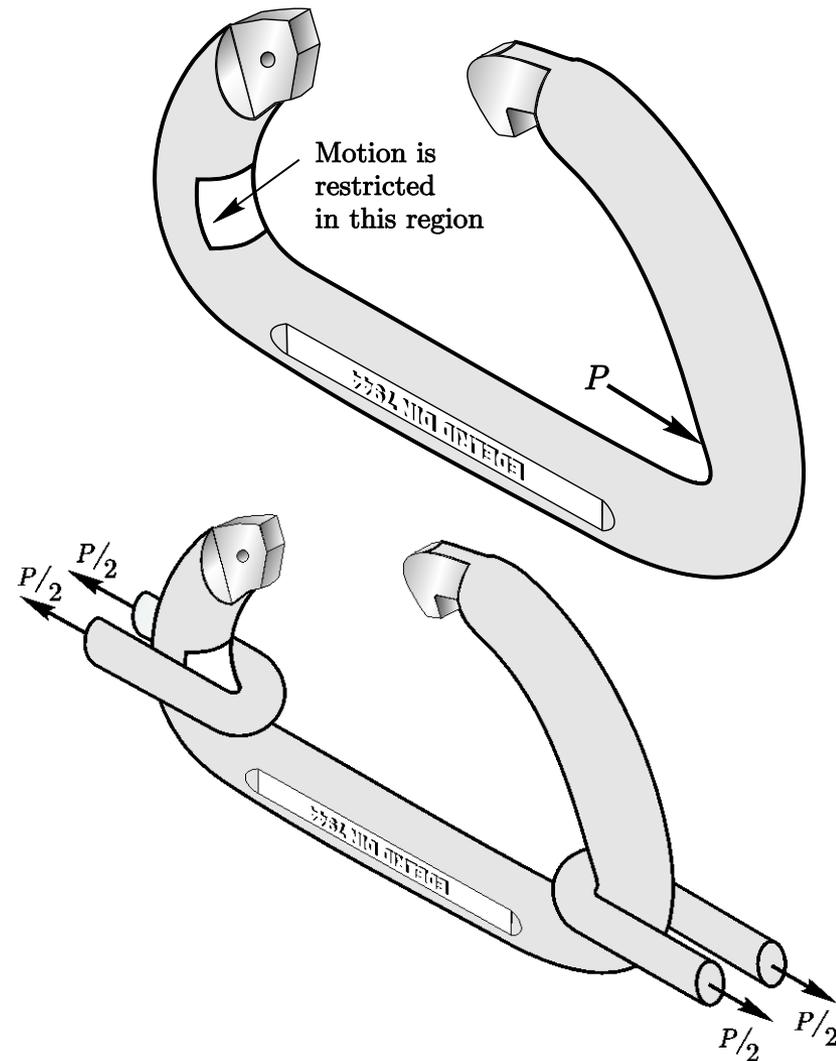
- ▶ Deseja-se analisar os esforços mecânicos na estrutura abaixo
 - Ela suporta até qual carga?
 - Do que dependem os esforços nessa estrutura?



- ▶ a) Fixação da corda
- ▶ b) Utilização e contato/interação com a rocha da montanha
- ▶ É necessário propor um modelo físico para o estudo de determinada situação de interesse

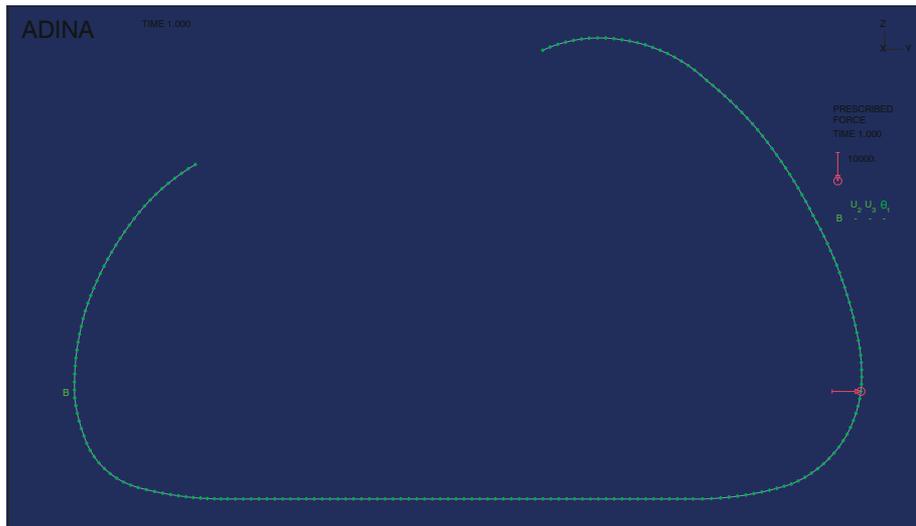


- ▶ A proposta de um modelo físico é um processo que remete à observação da física
- ▶ A percepção do profissional de modelagem é essencial para a concepção de um bom modelo físico
 - Que seja capaz de representar a realidade com a precisão necessária

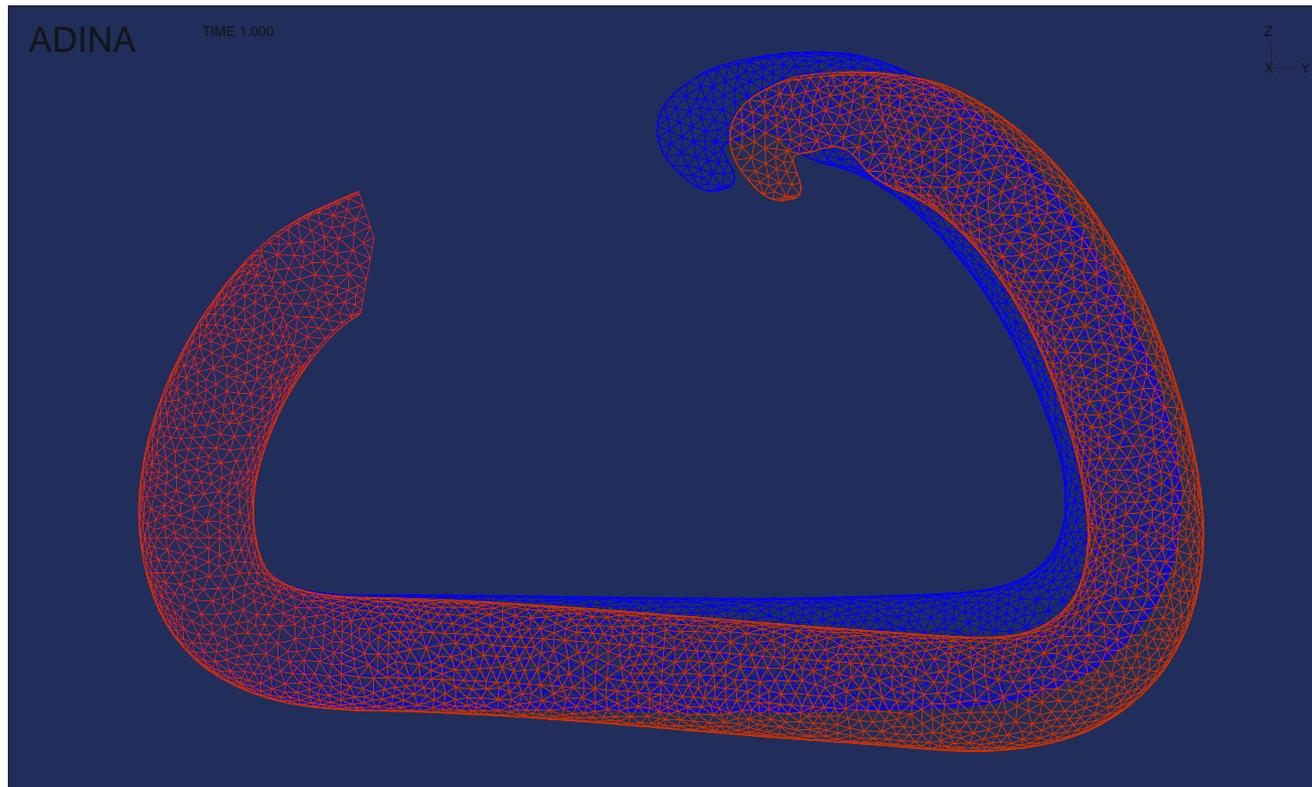


▶ Modelo com barras

- Representação do eixo de barras
- Modelo estrutural (possui hipóteses associadas a alguma teoria estrutural)



- ▶ Modelo sólido
 - Representação da geometria do problema de forma realista
 - Não há hipóteses de nenhuma teoria estrutural

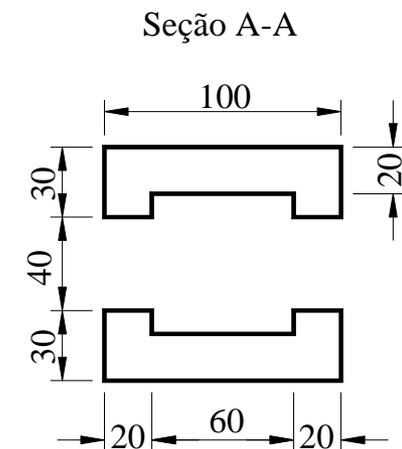
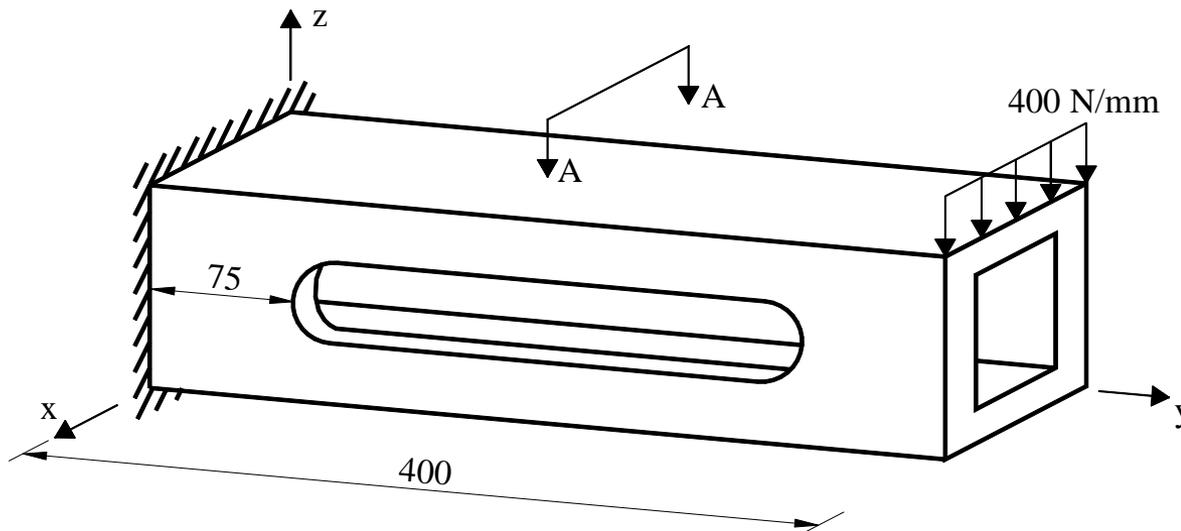


Comentários gerais sobre modelos estruturais vs. sólidos

- ▶ Elementos finitos estruturais representam uma alternativa muito importante quando comparados a modelos sólidos 3D/2D
- ▶ Geralmente há economia significativa de graus de liberdade para representação de um modelo com boa representatividade
- ▶ É necessário que o sólido a ser analisado obedeça as hipóteses da teoria estrutural adotada, caso contrário a solução não é confiável

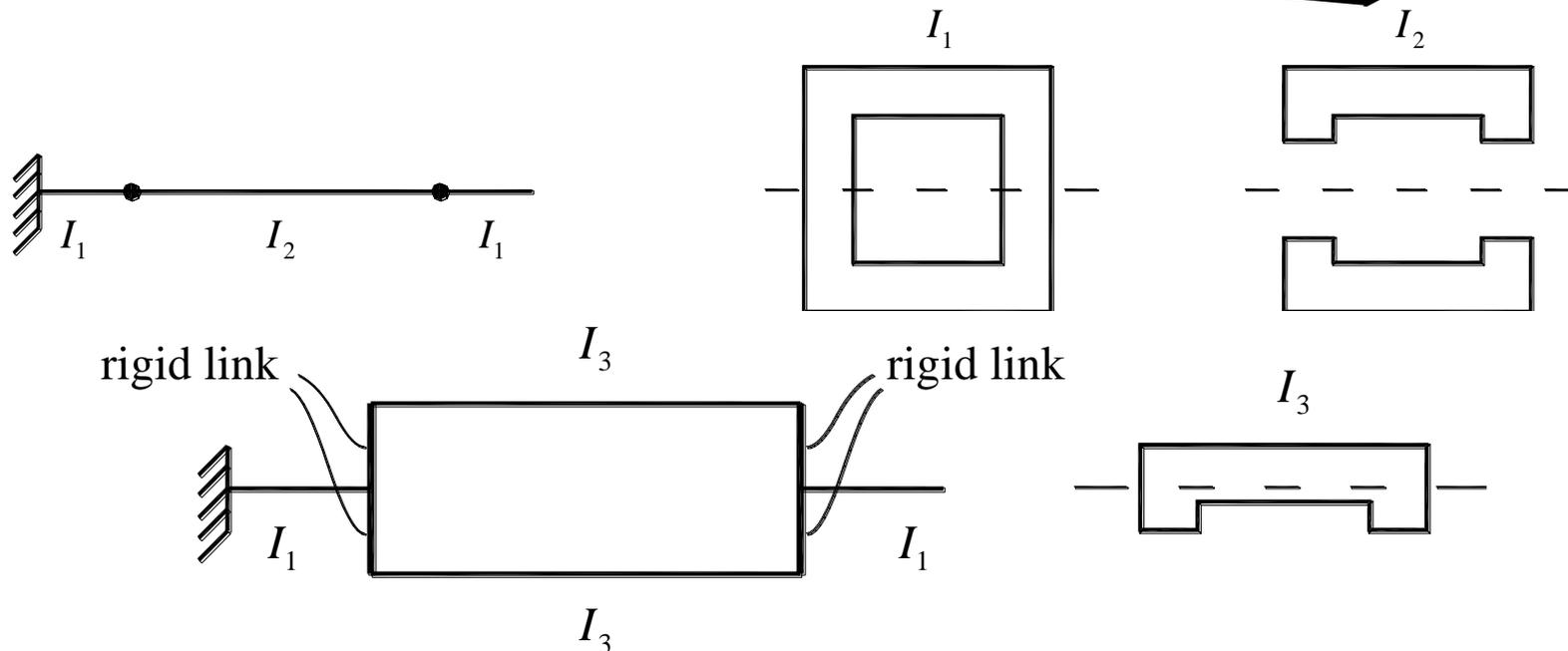
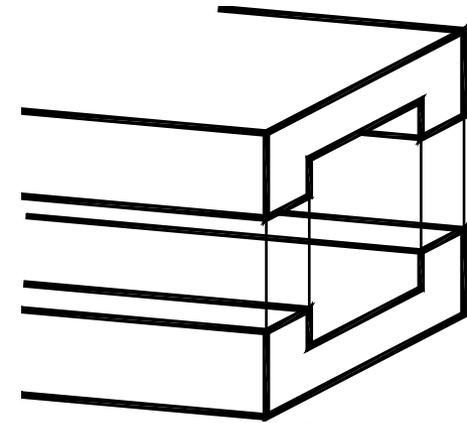
Exemplo: modelagem de uma ferramenta de manufatura

- ▶ Modelos hierárquicos:
 - Viga de Bernoulli-Euler com ligações rígidas
 - Casca
 - Sólido 3D



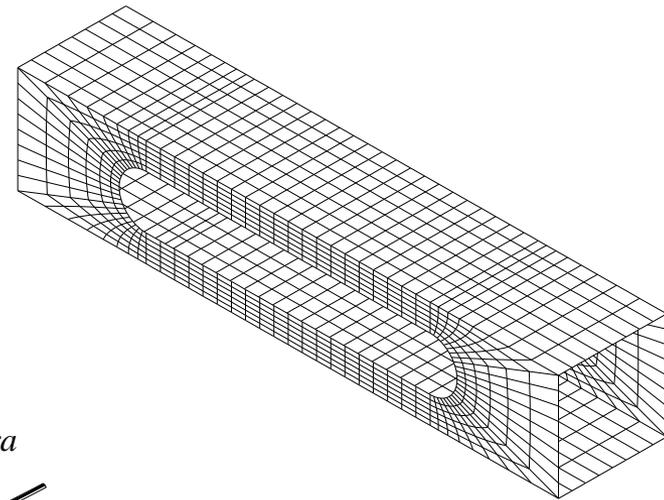
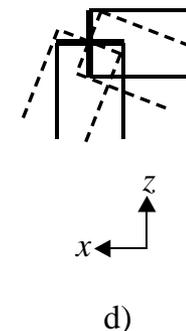
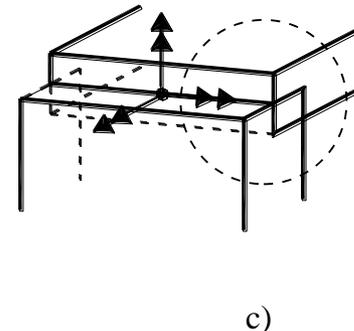
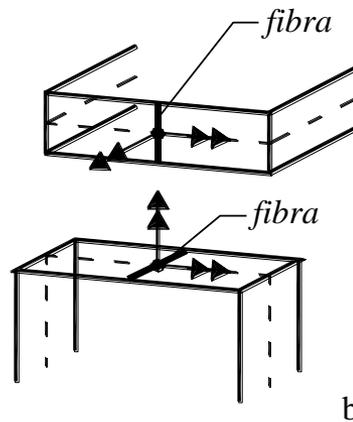
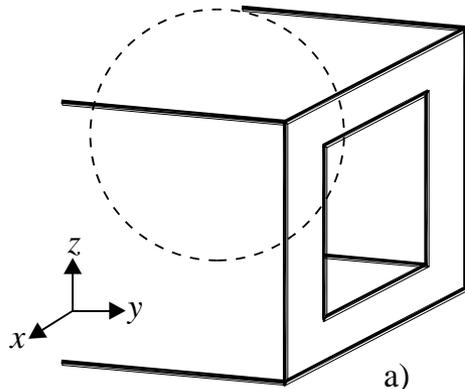
Unidades em milímetros

- ▶ Não representa adequadamente o comportamento físico na região do furo
- ▶ As seções transversais na região do furo não se comportam como uma seção de viga



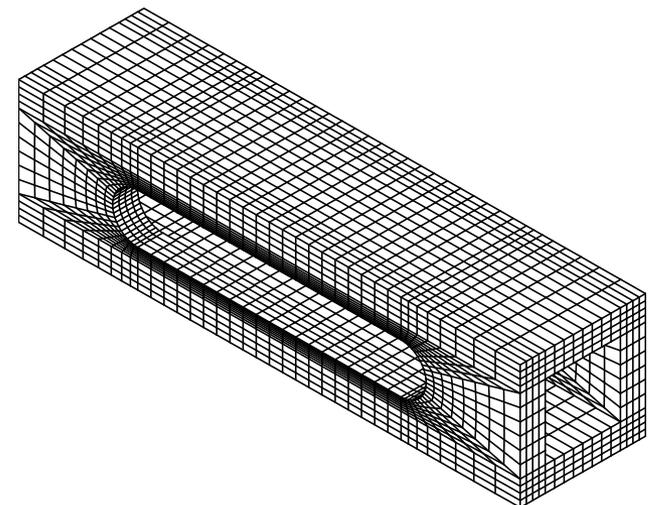
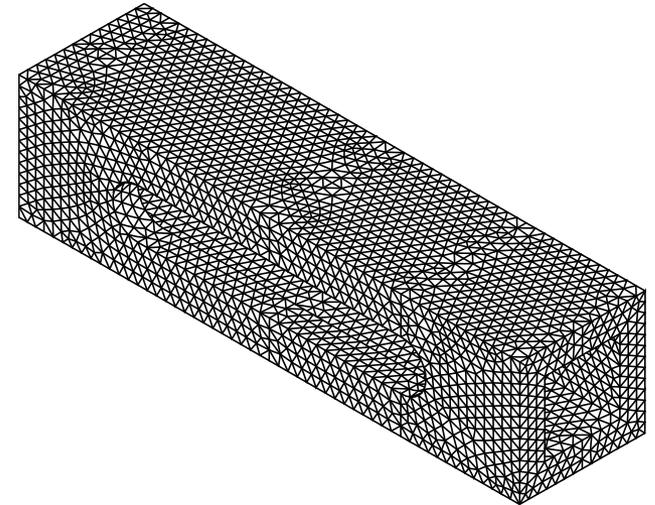
- ▶ Representa a estrutura considerando seu plano médio
- ▶ Há várias teorias e hipóteses disponíveis
 - Espessuras finas
 - Espessuras moderadas
 - Materiais compósitos

- Simplificações (cantos):

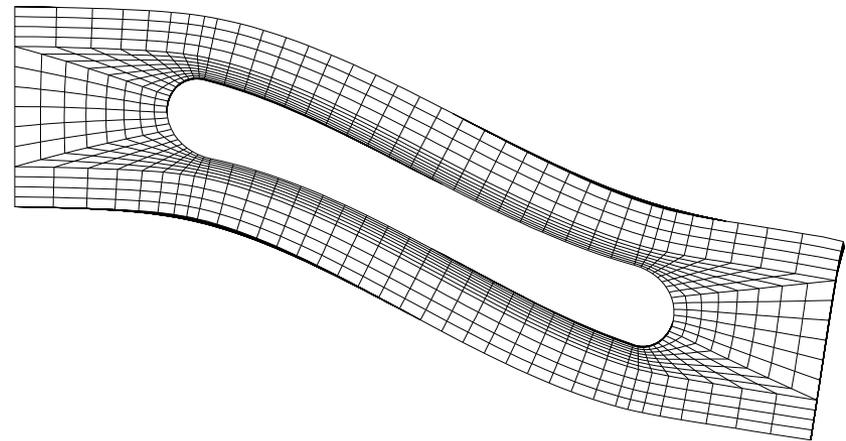
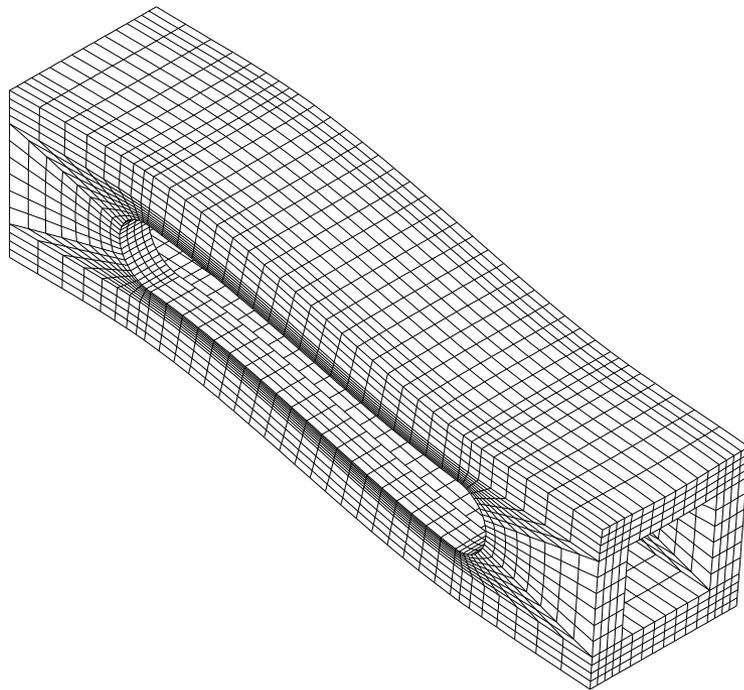


- ▶ **Malha tetraédrica livre**
 - Em geral necessita de mais graus de liberdade para apresentar convergência
 - Versátil e fácil de gerar em qualquer geometria

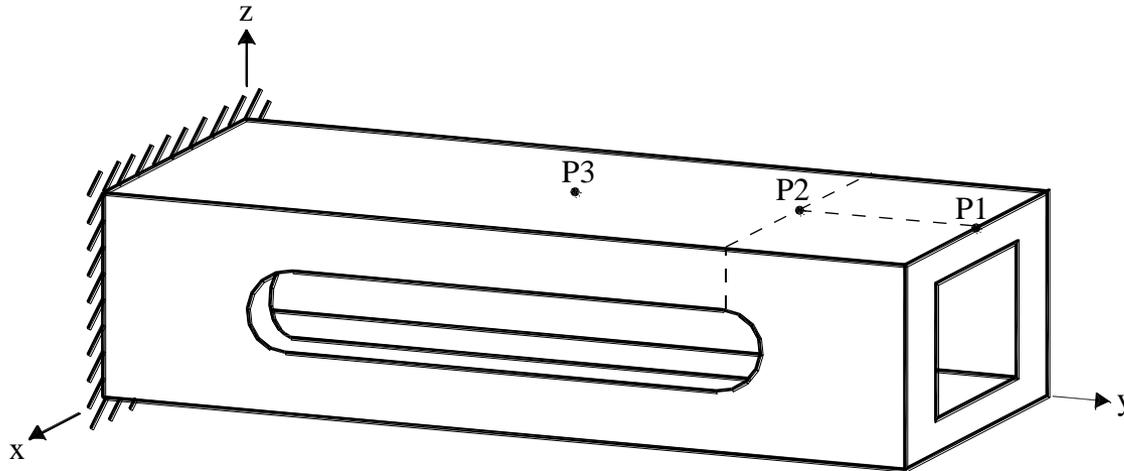
- ▶ **Malha hexaédrica mapeada**
 - Em geral necessita de menos graus de liberdade para apresentar convergência
 - Menos versátil e mais difícil de gerar
 - Requer subdivisões geométricas



- ▶ Configuração deformada



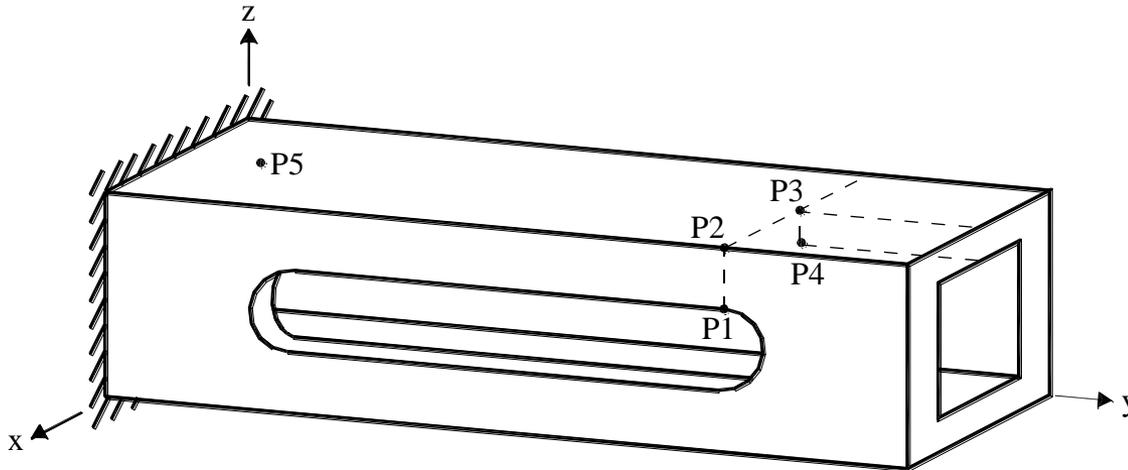
Comparação entre modelos: deslocamento na direção z



Modelo	P1	P2	P3
Viga	-0.569	-0.370	-0.177
Viga c/ ligações rígidas	-1.358	-1.158	-0.582
Casca	-1.448	-1.175	-0.607
Sólido 3-D (malha <i>advancing-front</i>)	-1.637	-1.335	-0.688
Sólido 3-D (malha <i>mapped</i>)	-1.635	-1.336	-0.688

Modelo	P1	P2	P3
Viga	0.348	0.277	0.257
Viga c/ ligações rígidas	0.831	0.867	0.846
Casca	0.886	0.879	0.882
Sólido 3-D (malha <i>advancing-front</i>)	1.001	0.999	1.000
Sólido 3-D (malha <i>mapped</i>)	1.000	1.000	1.000

Comparação entre modelos: tensão normal

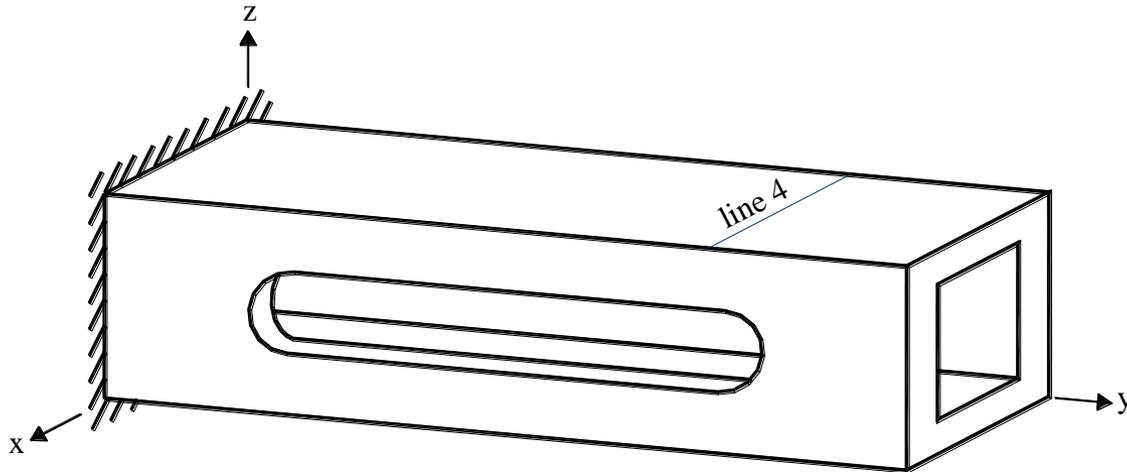
 σ_{yy}


Modelo	P1	P2	P3	P4	P5
Viga	10,79	26,99	26,99	16,19	104,78
Viga c/ ligações rígidas	276,04	-128,34	-128,34	141,24	104,78
Casca	274,26	-91,12	-86,57	92,97	104,60
Sólido 3-D (malha <i>advancing-front</i>)	305,49	-127,11	-94,47	118,57	118,37
Sólido 3-D (malha <i>mapped</i>)	301,64	-128,20	-94,92	118,93	117,88

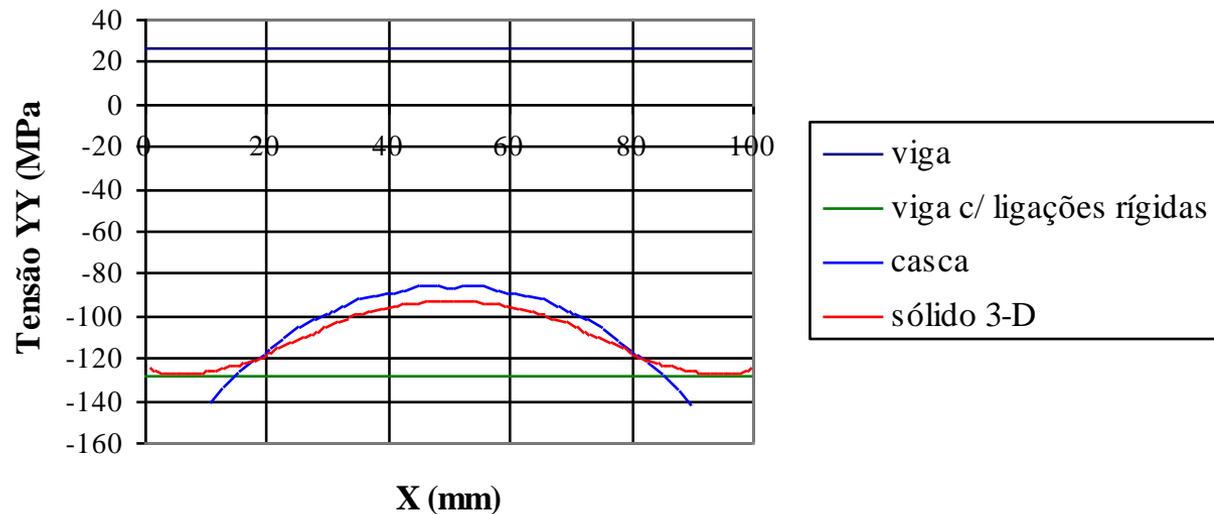
Modelo	P1	P2	P3	P4	P5
Viga	0,036	-0,211	-0,284	0,136	0,889
Viga c/ ligações rígidas	0,915	1,001	1,352	1,188	0,889
Casca	0,909	0,711	0,912	0,782	0,887
Sólido 3-D (malha <i>advancing-front</i>)	1,013	0,991	0,995	0,997	1,004
Sólido 3-D (malha <i>mapped</i>)	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

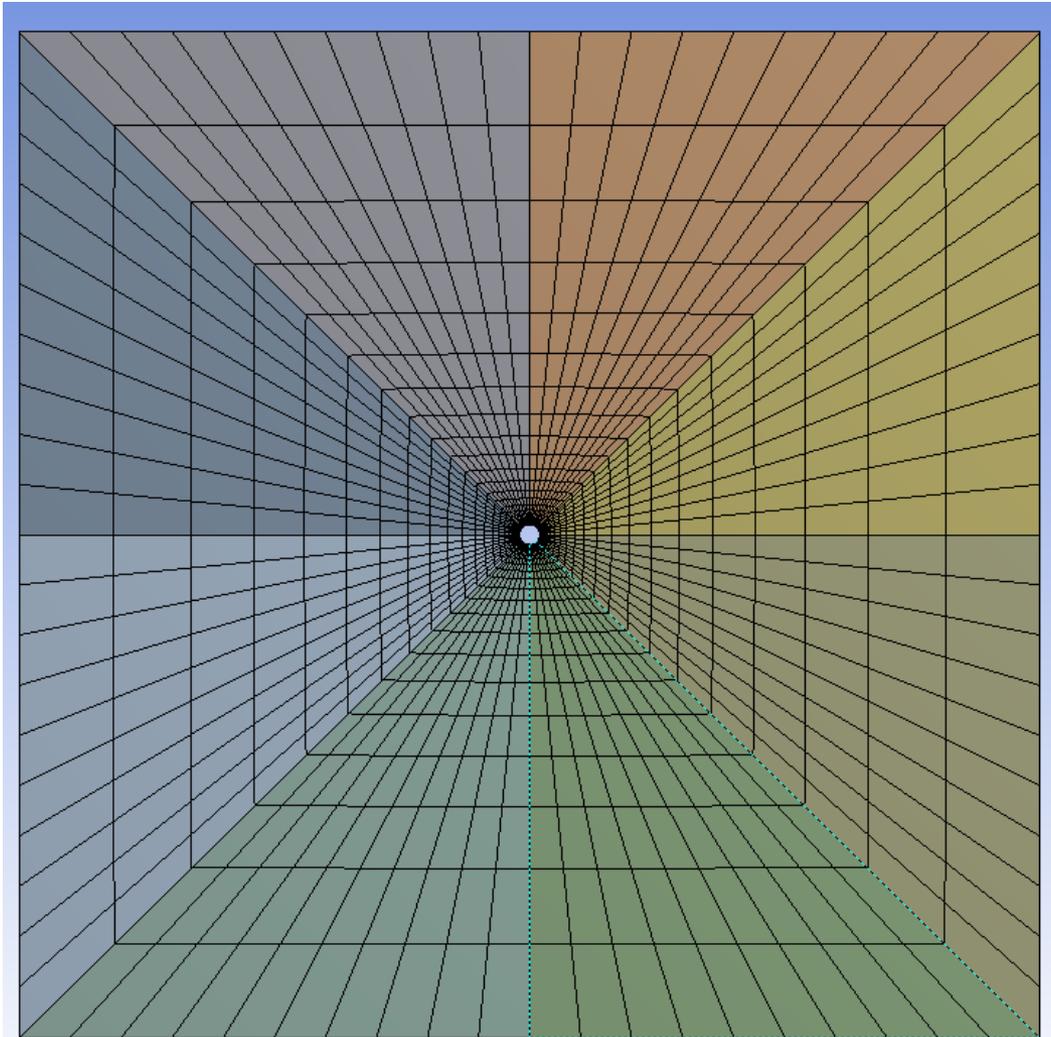
Comparação entre modelos: tensão normal

σ_{yy}



Tensão YY - Linha 4





$$\sigma_r = \frac{S}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{S}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cdot \cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{S}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{S}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cdot \cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{S}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \cdot \sin 2\theta$$

Particularizando para a tensão circunferencial na linha que passa pelo bordo do orifício, tem-se:

$$\sigma_\theta = S - 2S \cos(2\theta)$$

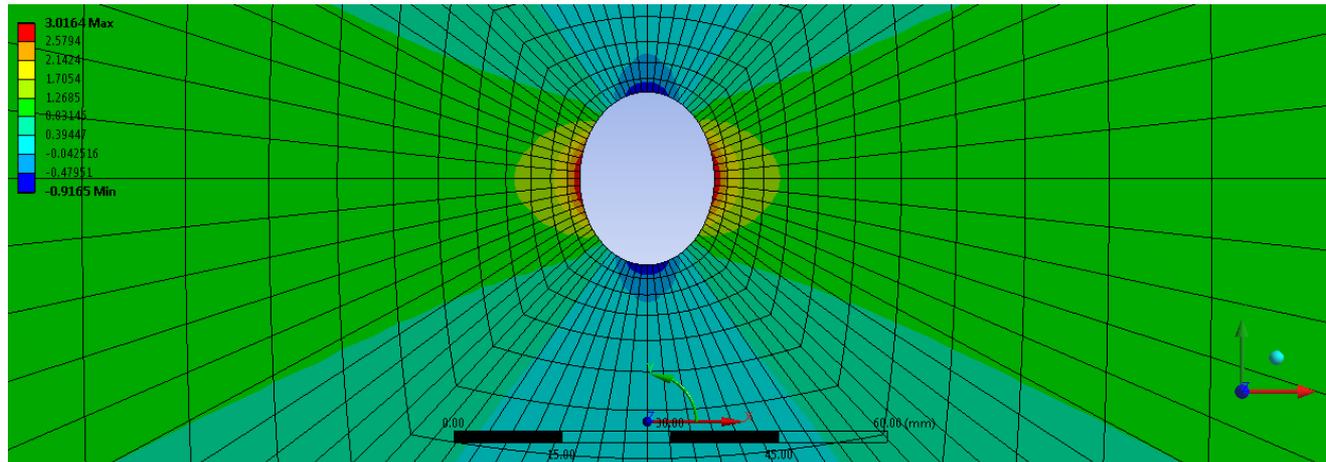
$$\theta = 90^\circ \Rightarrow \sigma_{\theta_{\max}} = 3S \quad (\text{tração})$$

$$\theta = 0^\circ \Rightarrow \sigma_{\theta_{\min}} = -S \quad (\text{compressão})$$

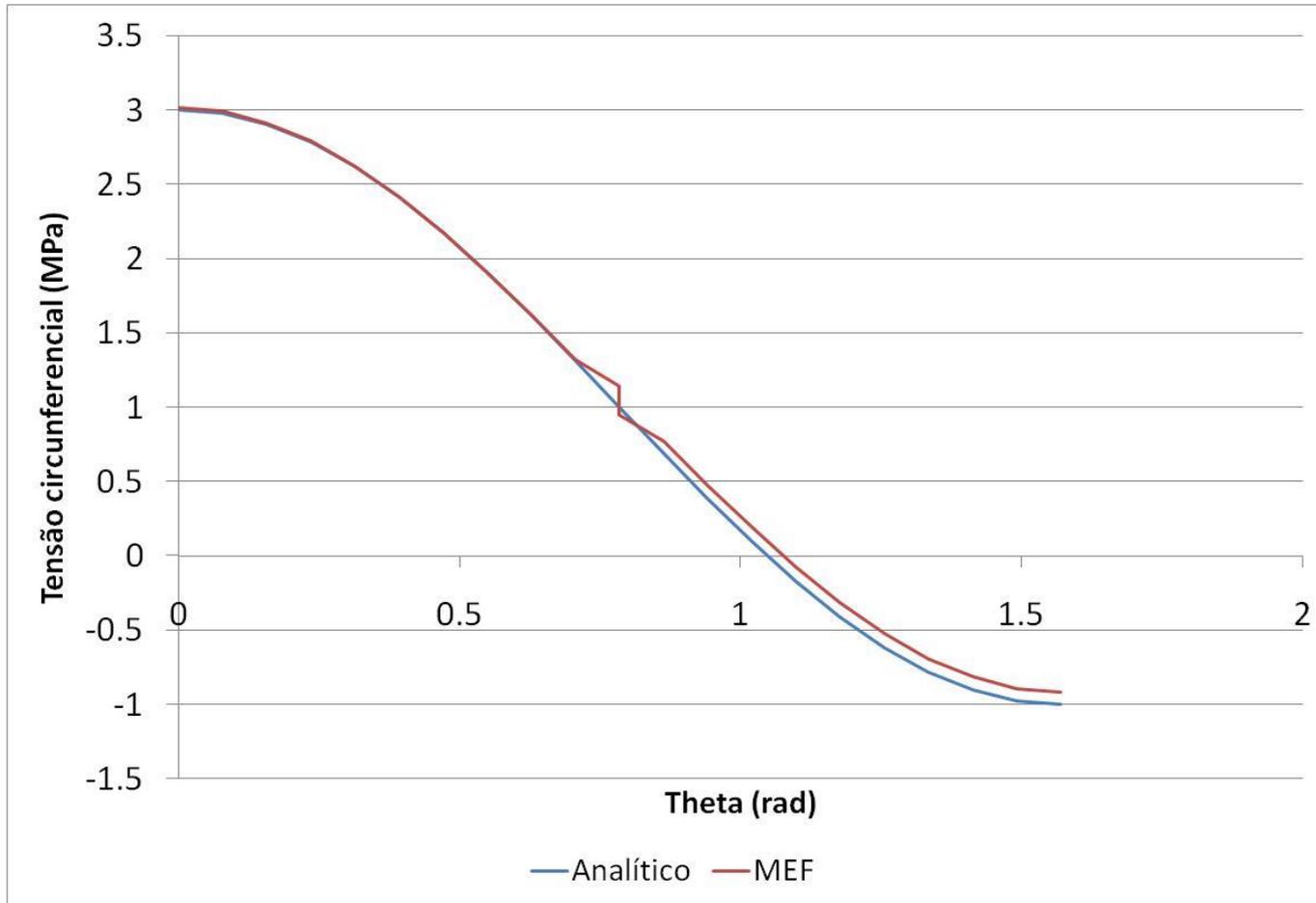
- ▶ Espessura da chapa: $t = 10 \text{ mm}$
- ▶ Diâmetro do furo: $a = 20 \text{ mm}$
- ▶ Quadrado externo: $L = 1000 \text{ mm}$
- ▶ Força aplicada = 10 kN

Resulta na tensão ao longe:

$$S = 10.000 \text{ N} / (10\text{mm} \times 1000\text{mm}) = 1 \text{ MPa}$$



Problema de Kirsch – Distribuição de tensão circunferencial



- ▶ Podem ser considerados modelos de:

- Parede fina

$$\sigma_{\theta} = \frac{pr_m}{t}$$

$$\sigma_z = \frac{pr_m}{2t}$$

- Parede espessa (a e b são os raios externo e interno, respectivamente)

$$\sigma_{\theta} = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left[\frac{b^2}{r^2} + 1 \right] p$$

$$\sigma_r = -\frac{a^2}{b^2 - a^2} \left[\frac{b^2}{r^2} - 1 \right] p$$

- ▶ Diâmetro médio
 - $D = 1000 \text{ mm}$
- ▶ Espessura
 - $t = 100 \text{ mm}$
- ▶ Pressão interna
 - $p = 0,1 \text{ MPa}$

Vaso em aço estrutural $E = 200 \text{ GPa}$

Considerando vaso de parede fina:

$$\sigma_{\theta} = \frac{pr_m}{t} = \frac{0,1\text{MPa} \cdot 500\text{mm}}{100\text{mm}} = 0,5\text{MPa}$$

$$\sigma_z = \frac{pr_m}{2t} = 0,25\text{MPa}$$

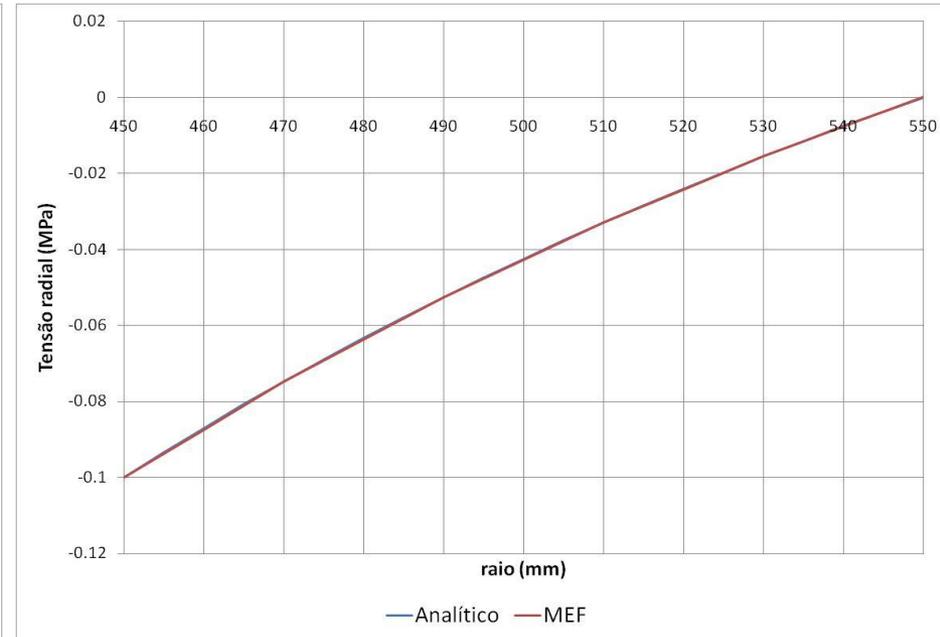
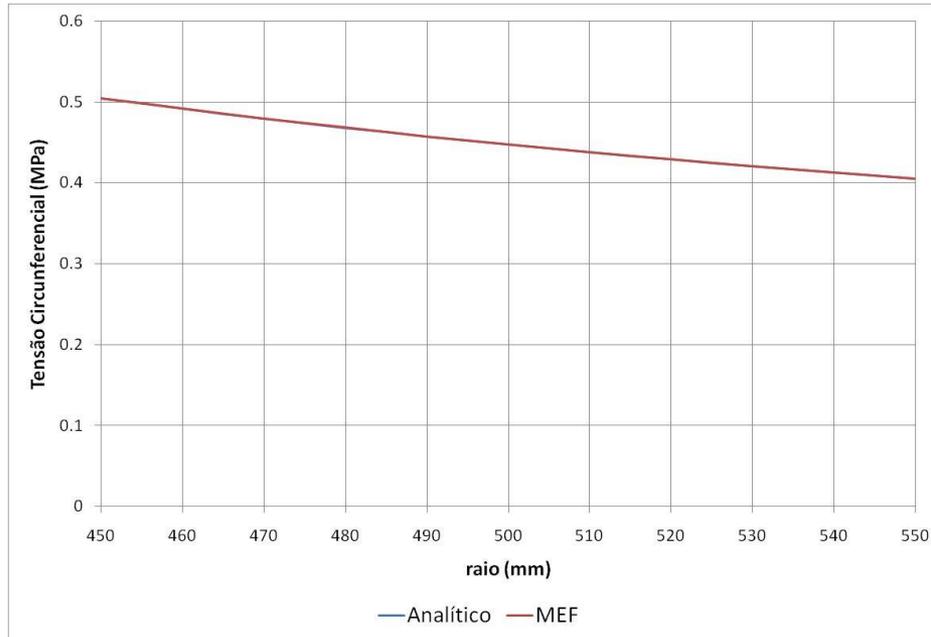
Considerando vaso de parede espessa:

$$\sigma_{\theta} = \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left[\frac{b^2}{r^2} + 1 \right] p = \frac{450^2}{550^2 - 450^2} \left[\frac{550^2}{r^2} + 1 \right] 0,1 \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_r = -\frac{a^2}{b^2 - a^2} \left[\frac{b^2}{r^2} - 1 \right] p = -\frac{450^2}{550^2 - 450^2} \left[\frac{550^2}{r^2} - 1 \right] 0,1 \text{ [MPa]}$$

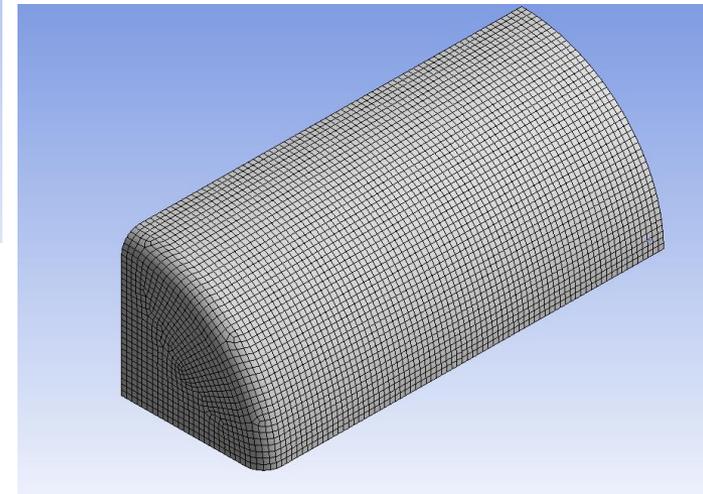
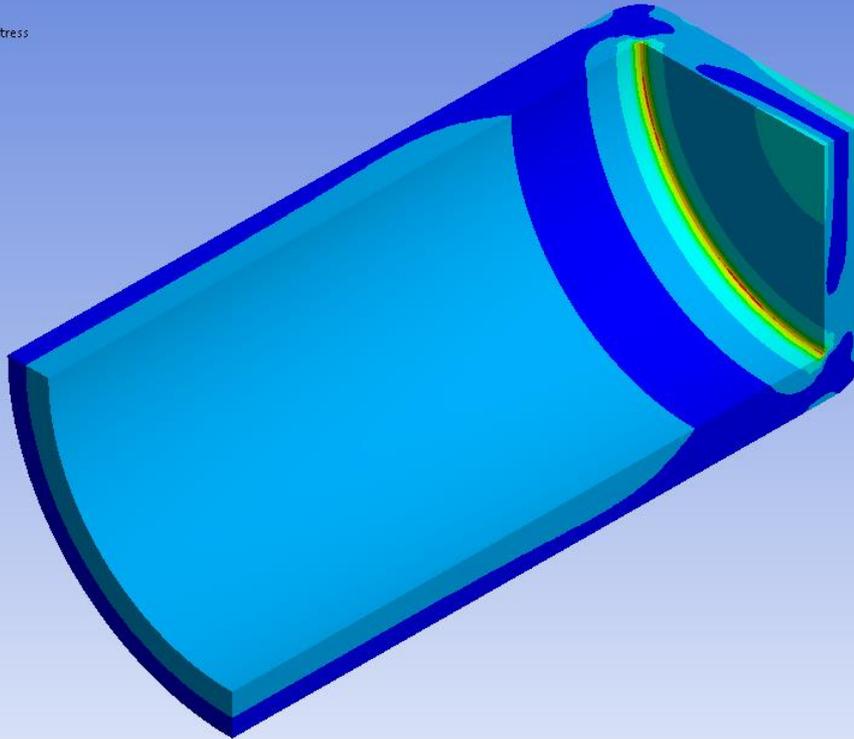
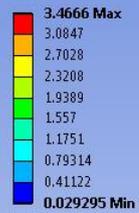
$$\sigma_z = \frac{a^2 p}{(b^2 - a^2)} = \frac{450^2 \cdot 0,1}{(550^2 - 450^2)} = 0,2025 \text{ [MPa]}$$

Caso considerado



Discussão – “end cap”

E: Static Structural (ANSYS)
Tensões de von Mises
Type: Equivalent (von-Mises) Stress
Unit: MPa
Time: 1
10/20/2010 11:05 PM



- ▶ Modelos estruturais/sólidos
 - Treliça
 - Viga (Timoshenko ou Euler–Bernoulli)
 - Placas/Cascas (Kirchhoff–Love ou Mindlin–Reissner)
 - Sólido 2D (estado plano de tensão, deformação ou axi–simétrico)
 - Sólido 3D (compressível ou incompressível)
- ▶ Tipo de análise
 - Estática (quase–estática)
 - Dinâmica (transiente/superposição modal)
 - Modal (com ou sem pré–tensão)
 - Linear eigenvalue buckling (flambagem)
- ▶ Cinemática
 - Pequenos deslocamentos/pequenas rotações
 - Grandes deslocamentos/rotações finitas
- ▶ Carregamentos
 - Seguidor/não seguidor

- ▶ Comportamento constitutivo
 - Elástico/não elástico (plástico)
 - Linear/não linear
 - Isotrópico/Ortotrópico/Anisotrópico
- ▶ Interação entre corpos (contato)
 - Corpos colados (bonded)
 - Sem atrito/com atrito
 - Adesão
 - Interface coesiva (Cohesive zone modeling)
- ▶ Condições de contorno
 - Recalques (deslocamentos/rotações prescritos)
 - Rigidez de apoio

- Modelos de baixa ordem permitem o entendimento do comportamento físico e a possibilidade de realizar estudos paramétricos.
- Modelos de alta ordem levam a previsões mais realistas.
- A modelagem deve ser cuidadosa:
 - É difícil julgar a resposta de modelos de alta ordem sem previamente ter resolvido modelos de baixa ordem.
 - Procedimentos de elementos finitos devem ser confiáveis.

Exemplo prático: modelando um problema utilizando-se de um programa de MEF

- ▶ Escolher um problema para ser modelado
- ▶ Propor alguns modelos
- ▶ Resolver utilizando-se de um pacote comercial de MEF
- ▶ Analisar resultados