# Testes paramétricos: médias variâncias, testes $t$ e $F$

- Uma questão que aparece frequentemente quando se tem dois conjuntos de dados, ou conjunto e um modelo é se eles diferem em relação à locação e/ou espalhamento.

- Os testes mais conhecidos que lidam com essas questões são o teste *t de student* (comparação de médias) e o teste $F$ (comparação de variâncias). Ambos supões que os dados se distribuem Normalmente.

- Para contrastar os métodos clássicos e bayesianos de teste de hipótese olharemos para o caso mais simples, o de comparação de médias.

- Suporemos também distribuições gaussianas por comodidade.

# Testes paramétricos: médias variâncias, testes $t$ e $F$

- Suponha que temos $n$ dados $X_i$, tirados de uma distribuição gaussiana de média $\mu_x$ e outros conjunto com $m$ dados, com distribuição gaussiana de mesma variância que a anterior, mas de médias $\mu_y$. Calcule a variância comum $\sigma^2$
- O método bayesiano é calcular a distribuição posterior conjunta:

$$prob(\mu_x, \mu_y, \sigma) \propto \frac{1}{\sigma^{n+m+1}} exp\left[-\frac{\sum_i (x_i - \mu_x)^2}{2\sigma^2}\right]\left[-\frac{\sum_i (y_i - \mu_y)^2}{2\sigma^2}\right],$$

  no qual usamos o *a priori* de Jeffreys para a variância ($prob(\sigma) = 1/\sigma$).
- Integrando sobre o parâmetro 'irrelevante '$\sigma$, obtemos a probabilidade conjunta $prob(\mu_x, \mu_y)$ e podemos usar isso, por exemplo, para calcular a probabilidade de $\mu_x$ ser maior do que $\mu_y$.
- A partir disso pode se obter a distribuição de probabilidades de $\mu_x - \mu_y$ (Lee, 2004, cap. 5). O resultado depende dos dados via a quantidade:

$$t' = \frac{(\mu_x - \mu_y) - (\overline{X} - \overline{Y})}{s\sqrt{m^{-1} + n^{-1}}},$$

  onde:

$$s^2 = \frac{nS_x^2 + mS_y^2}{\nu},$$

  com as usuais médias quadráticas $S_x = \sum(X_i - \overline{X})^2/n)$, similarmente para $S_y$ e $\nu = n + m - 2$

# Testes paramétricos: médias variâncias, testes $t$ e $F$

- A distribuição de $t'$ é

$$prob(t') = \frac{\Gamma[\frac{\nu+1}{2}]}{\sqrt{\pi}\Gamma[\nu+1]}\left(1+\frac{t'^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}$$

- Por essa rota não estamos realmente fazendo um teste de hipóteses. Os dados são supostos fixos e $\mu_x - \mu_y$ como a variável e simplesmente calculamos a probabilidade de qualquer diferença nas médias.

- Se ao invés disso usarmos a linha de pensamento clássica não tratamos os $\mu$'s como variáveis. Supomos que a diferença nas médias $\overline{X} - \overline{Y}$ é a estatística que procuramos e calculamos a distribuição da hipótese nula ($\mu_x = \mu_y$)

- Encontramos que:

$$t = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{s\sqrt{m^{-1} + n^{-1}}},$$

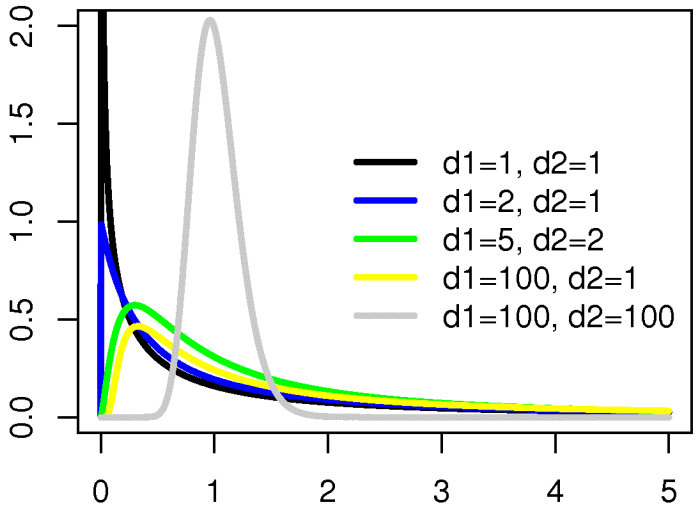
que segue a distribuição $t$ com $\nu$ graus de liberdade.

# Testes paramétricos: médias variâncias, testes $t$ e $F$

- De modo análogo podemos chegar ao teste $F$ para as variâncias. Novamente supondo distribuições gaussianas. A hipótese nula é $\sigma_x = \sigma_y$, os dados são $X_i (i = 1, ..., N)$ e $Y_i (i = 1, ..., N)$ e a estatística teste é:

$$\mathcal{F} = \frac{\sum (X - \overline{X})^2 / (N - 1)}{\sum (Y - \overline{Y})^2 / (M - 1)}$$

- Isso segue uma distribuição $F$ com $N - 1$ e $M - 1$ graus de liberdade e o procedimento de teste é o mesmo do teste *t de Student*.




- Claramente essa estatística é particularmente sensível à hipótese de gaussianidade.

# Testes paramétricos: o teste de Bahrens-Fisher

- É possível derivar a distribuição da diferença entre médias sem a suposição da igualdade da variâncias. A distribuição resultante é chamada de *Bahrens-Fisher*.
- Esse é uma raro exemplo em estatística de uma análise bayesiana sem análogo clássico. Não existe teste clássico para o caso de variâncias diferentes.
- A forma analítica da distribuição de Bahrens-Fisher é complicada e envolve uma integração numérica, de modo que podemos usar o computador já num primeiro momento para fazer o cálculo a partir do teorema de Bayes.
- Suponha que os nossos dados foram gerados a partir de distribuições gaussiana de média $\mu$ e variâncias $\sigma^2$. A distribuição conjunta do posterior, usando o *a priori de Jeffreys em* $\sigma$ é

$$prob(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y) \propto \frac{1}{\sigma^{n_x+1}} exp\left[-\frac{\sum_i (x_i - \mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] \times \frac{1}{\sigma^{n_y+1}} exp\left[-\frac{\sum_i (y_i - \mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right]$$

# Testes paramétricos: o teste de Bahrens-Fisher

- Temos uma integração multidimensional para livrar-nos dos *parâmetros irrelevantes* ($\sigma_x$ e $\sigma_y$) e para nos assegurarmos que a distribuição conjunta resultante está normalizada apropriadamente.

- Até o desenvolvimento, relativamente recente, da técnica de *Monte Carlo - Markov Chain* (MCMC), essa integral para distribuições não-gaussianas era um grande obstáculo ao uso de métodos bayesianos.

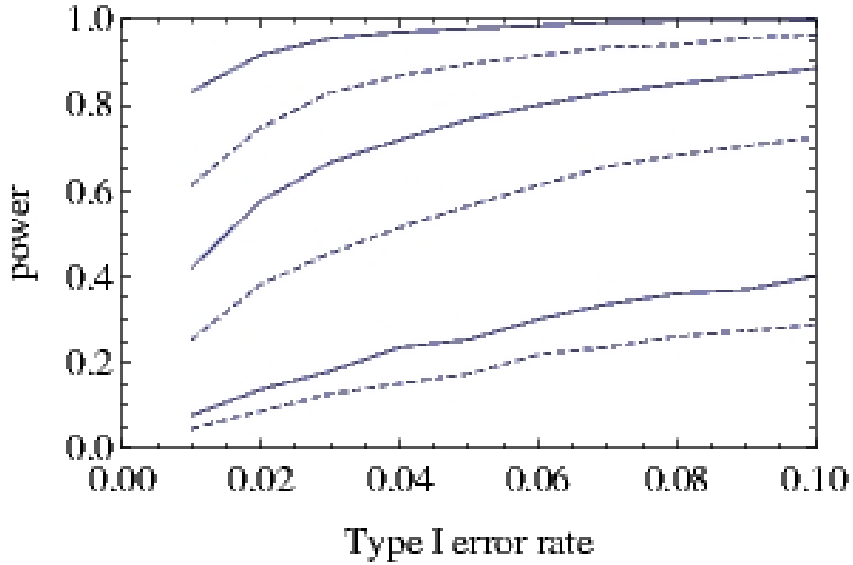
- A derivação analítica da distribuição de Bahrens-Fisher elimina todas, menos uma integração numérica.

- Essa teste ilustra dois pontos. Primeiro de que complicações relativamente inócuas de questões clássicas levem a problemas muito complexos conceitualmente, algebricamente ou ambos. Segundo, que o uso da força-bruta para resolver o teorema de Bayes pode requerem o uso de grandes recursos para resolver as integrações numéricas.

# Testes paramétricos: o teste de Bahrens-Fisher

- Conceitos de erros e força do teste $t$ clássico.

## Exemplo W&J P. 101




Força *versus* erro do tipo I para um teste $t$ simples, onde a diferença verdadeira das médias varia entre 1 (linhas de baixo) e 3 (linhas de cima). As linhas tracejadas corresponder a um aumento de 25% no desvio padrão das gaussiana a partir das quais as amostras foram geradas.

- Até agora, nesse tópico, supusemos apenas medidas sem ruído. Podemos ver o efeito do ruído ao aumentarmos o desvio padrão das distribuições (linhas tracejadas). Nota-se como o ruído aumenta a força do teste e ilustra a utilidade do conceito de força.

# Testes paramétricos: teste paramétrico não-gaussiano

- Quando não se conhece a distribuição dos pontos a suposição usual é que ambos conjuntos de ponto obedecem a uma mesma distribuição, ainda que desconhecida.

- Caso tenhamos alguma informação sobre as distribuições podemos usar métodos bayesianos. O truque é usar uma generalização multiparamétrica de uma distribuição familiar, que tem parâmetros extra para acomodar as distorções em sua forma. Finalmente marginaliza-se sobre esses parâmetros no intervalo de valores que supomos *a priori* que eles se encontram.

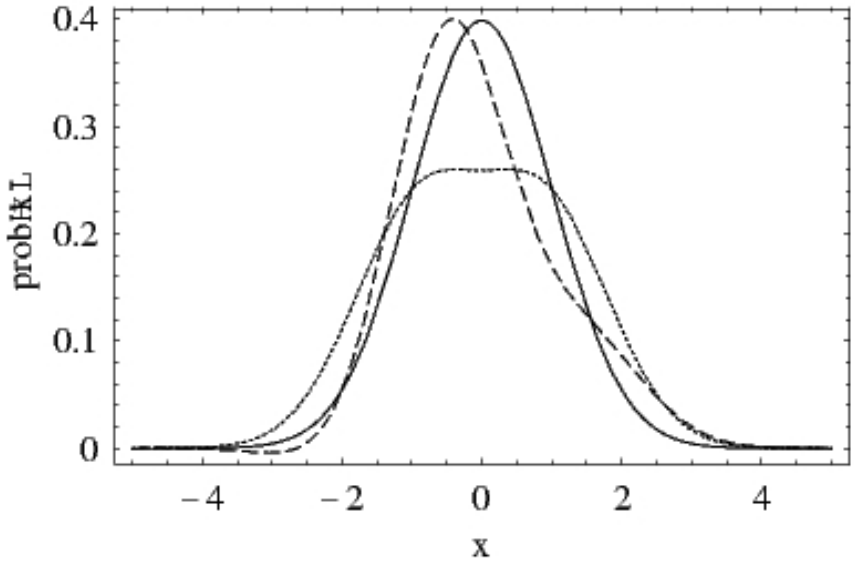
- O exemplo mais comum desse tipo de generalização é a chama da série de Gram-Charlier:

$$exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)\left(1+\sum_i a_i\, H_i(x)\right),$$

onde $H(x)$ são os polinômios de Hermite e os coeficientes $a_i$ são os parâmetros livres.

# Testes paramétricos: teste paramétrico não-gaussiano

- O efeito desses termos extra é o de alargar e distorcer a gaussiana.




Distribuições resultantes do uso de apenas dois termos numa distribuição Gram-Charlier. A curva contínua é uma gaussiana pura.

- *A prioris* nesses parâmetros devem ser ajustados por julgamento. Os polinômios de ordem par tem como efeito mudanças de escala, de modo que o *a priori* de Jeffreys deve ser usado. Os de ordem ímpar mudam ambos, locação e escala, de modo que o procedimento é menos óbvio.

# Testes paramétricos: teste paramétrico não-gaussiano

- Esse procedimento esclarece o problema que os testes não-paramétricos tem que resolver. Suponha que fixemos que nossos dados são realisticamente representados com uma expansão de Gram-Charlier com dois termos.

- Para o conjunto de dados 1 a probabilidade posterior $prob(\mu^{(1)}, \sigma^{(1)}, a_1^{(1)}, a_2^{(1)})$, e de modo similar para o conjunto 2.

- Se a nossa pergunta a esses dados for: "esses dados foram gerados a partir da mesma distribuição?", teríamos que testar várias possibilidades ($2^4$ de fato) tais como: $\mu^{(1)} > \mu^{(2)}$ e $\sigma^{(1)} > \sigma^{(2)}$ e $a_1^{(1)} > a_1^{(2)}$ e $a_2^{(1)} > a_2^{(2)}$, o que seria bastante tedioso.

- Uma pergunta mais simples seria "estão essas distribuições em posições diferentes independentemente de seus espalhamentos?", que requereria a marginalização dos $\sigma$'s e $a_2$'s, já que a localização numa expansão de Gram-Charlier é uma combinação simples de $\mu$ e $a_1$.

- Fim da aula 7