



Elementos não
conformes

Bruno S.
Carmo

Introdução

Interfaces e
implementa-
ção

Costura
iterativa

Vinculação da
aproximação

Mortar
patching

Elementos não conformes

PME5425 – Métodos de Elementos Finitos de Alta Ordem
com Aplicações em Mecânica dos Fluidos e Transferência
de Calor

Prof. Bruno S. Carmo

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

2017



Sumário

Elementos não
conformes

Bruno S.
Carmo

Introdução

Interfaces e
implementação

Costura
iterativa

Vinculação da
aproximação

Mortar
patching

- 1 Introdução
- 2 Condições nas interfaces e implementação
- 3 Costura iterativa
- 4 Vinculação da aproximação
- 5 Mortar patching



Introdução

Elementos não
conformes

Bruno S.
Carmo

Introdução

Interfaces e
implementação

Costura
iterativa

Vinculação da
aproximação

Mortar
patching

- Refinamento local sem a necessidade de propagação global das modificações.
- Até agora tratamos de elementos conformes (vértices de elementos vizinhos são coincidentes).
- Refinamento pode ser do tipo h ou p .
- Em ambos os casos, produz-se uma incompatibilidade geométrica e/ou funcional.
- Desenvolveremos sistemáticas que permitem conexões arbitrárias entre elementos.



Exemplos de discretizações conformes e não conformes I

Elementos não conformes

Bruno S. Carmo

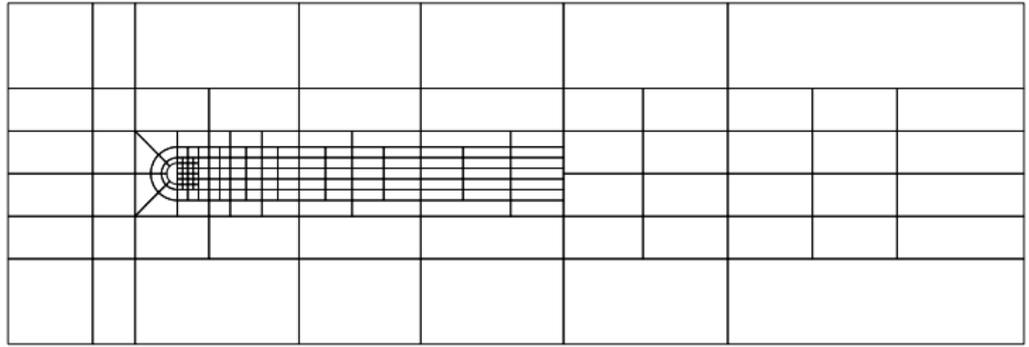
Introdução

Interfaces e implementação

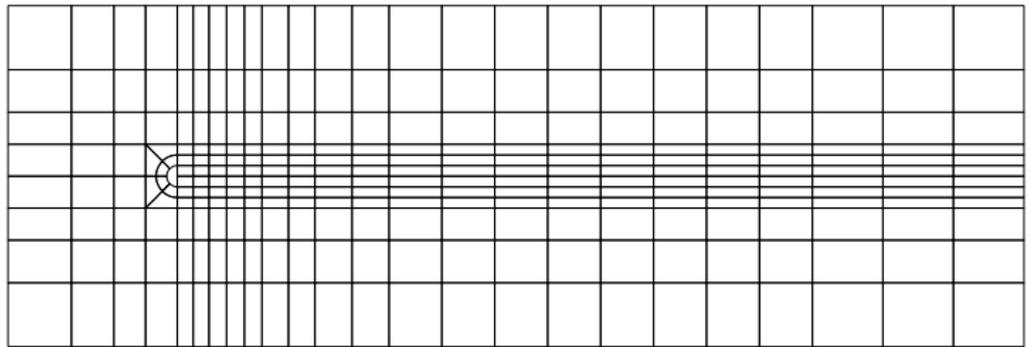
Costura iterativa

Vinculação da aproximação

Mortar patching



(a)



(b)



Exemplos de discretizações conformes e não conformes II

Elementos não conformes

Bruno S. Carmo

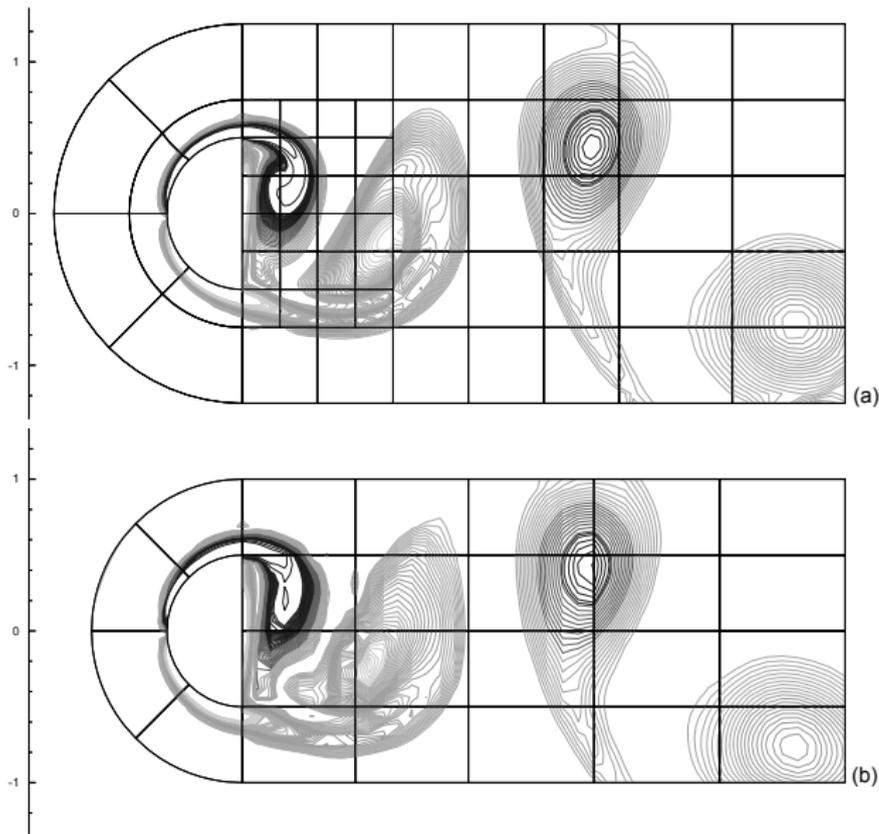
Introdução

Interfaces e implementação

Costura iterativa

Vinculação da aproximação

Mortar patching





Métodos para malhas não conformes I

Elementos não conformes

Bruno S. Carmo

Introdução

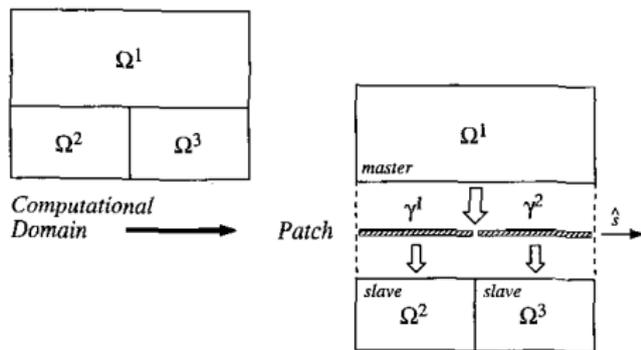
Interfaces e implementação

Costura iterativa

Vinculação da aproximação

Mortar patching

Os métodos desenvolvidos para lidar com malhas não conformes usam a filosofia de *costura* (traduzido livremente do inglês *patching*). A ideia é conectar a solução em dois subdomínios separados por uma interface chamada de costura (patch), como mostrado na figura.





Métodos para malhas não conformes II

Elementos não conformes

Bruno S. Carmo

Introdução

Interfaces e implementação

Costura iterativa

Vinculação da aproximação

Mortar patching

A costura \mathcal{P} é construída a partir de uma sequência de segmentos de linha γ^m associados com um conjunto particular de arestas elementares Γ_i^k ,

$$\mathcal{P} = \{\gamma \mid \gamma = \Gamma_i^k \cap \Gamma_j^l \neq \emptyset, |\gamma_i| = |\Gamma_i^k| \text{ para algum } (i, k) \text{ e } (j, l)\},$$

onde $|\cdot|$ é o comprimento de arco de uma curva.

Esta expressão define um conjunto de interfaces não conformes, onde a restrição convencional de continuidade C^0 não pode ser garantida na solução discreta.

O tratamento da solução ao longo dessas interfaces é o que diferencia o esquema de costura.



Costura iterativa: formulação unidimensional

Elementos não conformes

Bruno S. Carmo

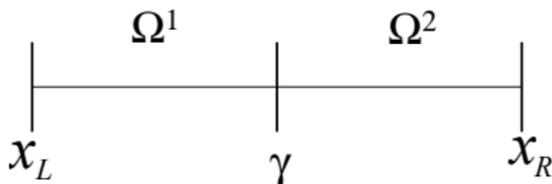
Introdução

Interfaces e implementação

Costura iterativa

Vinculação da aproximação

Mortar patching



Designamos um elemento mestre $\Omega^1 \equiv \Omega^m$, com comprimento l_m , e um elemento escravo $\Omega^2 \equiv \Omega^s$, com comprimento l_s , e a interface entre eles é γ . Queremos resolver o seguinte problema no domínio inteiro, $\Omega = \Omega^m \cup \Omega^s$:

$$\begin{aligned} -u_{xx} + \lambda^2 u &= f(x), \\ u(x_L) &= u(x_R) = 0. \end{aligned}$$

Para isso, empregaremos um esquema que envolve a aplicação de condições de contorno do tipo Dirichlet e Neumann aos domínios mestre e escravo respectivamente.



Costura iterativa: formulação unidimensional – condições de contorno na costura

Elementos não conformes

Bruno S. Carmo

Introdução

Interfaces e implementação

Costura iterativa

Vinculação da aproximação

Mortar patching

Denotando o número da iteração por n ,

Domínio mestre: condição de Dirichlet

$$\begin{aligned} -(u_{xx})_m^n + \lambda^2 u_m^n &= f(x), \\ u(x_L) &= 0, \\ u_m^n(\gamma) &= u_s^{n-1}(\gamma). \end{aligned}$$

Domínio escravo: condição de Neumann

$$\begin{aligned} -(u_{xx})_s^n + \lambda^2 u_s^n &= f(x), \\ u(x_R) &= 0, \\ (u_x)_s^n(\gamma) &= (u_x)_m^k(\gamma). \end{aligned}$$

O índice k pode ter dois valores diferentes, dependendo do tipo de implementação: $k = n$ na versão serial e $k = n - 1$ na versão paralela.



Costura iterativa: formulação unidimensional – relaxação I

Elementos não conformes

Bruno S. Carmo

Introdução

Interfaces e implementação

Costura iterativa

Vinculação da aproximação

Mortar patching

Pode-se mostrar que para que o esquema seja convergente, temos que ter $l_m/l_s > 1$. Esta é uma restrição complicada de se garantir quando partirmos para mais dimensões. Para resolver essa dificuldade, aplica-se uma relaxação na condição de contorno:

$$u_m^n(\gamma) = \theta u_s^{n-1}(\gamma) + (1 - \theta) u_m^{n-1}(\gamma), \quad \theta \in]0, 1]$$

A convergência do algoritmo serial é garantida para

$$0 < \theta < \Theta_S = \frac{2}{1 + G(\lambda)}, \quad G(\lambda) = \begin{cases} \frac{l_s}{l_m}, & \lambda = 0 \\ \frac{\tanh(\lambda l_s)}{\tanh(\lambda l_m)}, & \lambda \neq 0 \end{cases}$$

Para o algoritmo paralelo, basta $\theta < 1$.



Costura iterativa: formulação unidimensional – relaxação II

Elementos não conformes

Bruno S. Carmo

Introdução

Interfaces e implementação

Costura iterativa

Vinculação da aproximação

Mortar patching

Existem escolhas ótimas para o parâmetro de relaxação, isto é, um valor de θ que garante erro nulo após um número finito de iterações.

Para o caso serial,

$$(\theta_S)_{\text{opt}} = \frac{\Theta_S}{2}, \quad n \geq 2,$$

o que significa que o esquema converge depois de duas iterações.

Para o caso paralelo,

$$(\theta_P)_{\text{opt}} = \frac{\epsilon_m^{n-1}(\gamma)}{\epsilon_m^{n-1}(\gamma) + G(\lambda)\epsilon_m^{n-2}(\gamma)}, \quad n \geq 3,$$

onde

$$\epsilon_m^n(x) = u_m^n(x) - u_m^{n-1}(x).$$



Costura iterativa: formulação bidimensional

Elementos não conformes

Bruno S. Carmo

Introdução

Interfaces e implementação

Costura iterativa

Vinculação da aproximação

Mortar patching

$$u_m^n = \theta u_s^{n-1} + (1 - \theta) \mathcal{I}_m^s u_m^{n-1},$$

$$\mathbf{n} \cdot \nabla u_s^n = -\mathcal{I}_s^m \mathbf{n} \cdot \nabla u_m^k,$$

onde \mathcal{I} é um operador geral de interpolação entre os dois lados da interface (\mathcal{I}_s^m interpola do domínio escravo para o mestre). Também aqui $k = n$ para a implementação serial e $k = n - 1$ para a implementação paralela.

O algoritmo serial converge para

$$0 < \theta < \Theta_S = \frac{2}{1 + G(\lambda_q)}, \quad \lambda_q^2 = \lambda^2 + \frac{q^2 \pi^2}{4}, \quad q \geq 1.$$

Para o algoritmo paralelo, basta $\theta < 1$.

Não há parâmetro ótimo para o caso bidimensional.



Vinculação da aproximação

Elementos não conformes

Bruno S. Carmo

Introdução

Interfaces e implementação

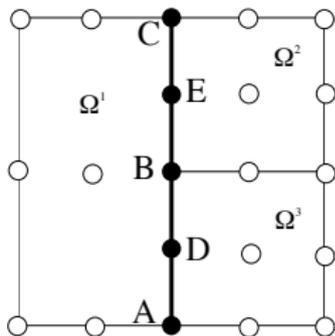
Costura iterativa

Vinculação da aproximação

Mortar patching

A ideia principal é manter a continuidade C^0 nas interfaces elementares através da modificação das funções de base. Espaço de aproximação é ainda H^1 .

Exemplo:



$$u^\delta(D) = \alpha_D u^\delta(A) + \beta_D u^\delta(B) + \gamma_D u^\delta(C),$$

$$u^\delta(E) = \alpha_E u^\delta(A) + \beta_E u^\delta(B) + \gamma_E u^\delta(C).$$

onde α , β e γ são pesos apropriados, que podem ser entendidos como contribuições à matriz de montagem \mathbf{A} .

Vinculação da aproximação: construção sistemática

I

Elementos não conformes

Bruno S. Carmo

Introdução

Interfaces e implementação

Costura iterativa

Vinculação da aproximação

Mortar patching

Separamos os graus de liberdade em ativos, N_{dof}^a , e vinculados, N_{dof}^c . Os graus de liberdade vinculados podem ser entendidos como combinações lineares dos graus de liberdade ativos.

Cada grau de liberdade vinculado, v_i^δ , onde $i \in N_{\text{dof}}^c$, depende de um conjunto de nós $I(i) \subset N_{\text{dof}}^a$. Introduzimos também o conjunto inverso, $J(i) = \{j \in N_{\text{dof}}^a \mid i \in I(j)\}$. A dependência linear é expressa como

$$v_i^\delta = \sum_{j \in I(i)} r_{ij} v_j^\delta. \quad \forall i \in N_{\text{dof}}^c.$$

Assim

$$u^\delta = \sum_{i \in N_{\text{dof}}^a} u_i \phi_i + \sum_{j \in N_{\text{dof}}^c} u_j \phi_j = \sum_{i \in N_{\text{dof}}^a} u_i \phi_i + \sum_{j \in N_{\text{dof}}^c} \sum_{k \in I(j)} r_{ij} u_k \phi_j.$$

Vinculação da aproximação: construção sistemática II

Usando a definição do conjunto inverso,

$$u^\delta = \sum_{i \in N_{\text{dof}}^a} u_i \left[\phi_i + \sum_{j \in J(i)} r_{ji} \phi_j \right] = \sum_{i \in N_{\text{dof}}^a} u_i \tilde{\phi}_i,$$

ou seja, a base da aproximação vinculada é

$$\tilde{\phi}_i = \phi_i + \sum_{j \in J(i)} r_{ji} \phi_j, \quad \forall i \in N_{\text{dof}}^a.$$

- Baseando-se nesta equação, é possível construir o vetor de carregamento e a matriz de rigidez de forma bastante eficiente, utilizando as estruturas de dados apropriadas.
- Os valores específicos de r_{ij} são computados pareando os graus de liberdade entre uma aresta unidimensional que é partida em duas arestas menores.
- O esquema fica mais complexo caso o índice de irregularidade aumente.



Elementos não conformes

Bruno S. Carmo

Introdução

Interfaces e implementação

Costura iterativa

Vinculação da aproximação

Mortar patching



Mortar patching

Elementos não conformes

Bruno S. Carmo

Introdução

Interfaces e implementação

Costura iterativa

Vinculação da aproximação

Mortar patching

- Método introduz um conjunto de funções que une os elementos, assim como o cimento (mortar) une tijolos.
- O método é geral e permite o acoplamento de diferentes discretizações em domínios sem sobreposição. Ou seja, a não conformidade pode ser devida à geometria, ao espaço de aproximação ou a ambos.
- As condições de interface são impostas de forma variacional através de uma condição de minimização de norma L^2 .
- O espaço de aproximação, \mathcal{S}^δ não é mais um subespaço de H^1 , e o objetivo é que o desvio de \mathcal{X}^δ em relação a H^1 seja mínimo.



Funções cimento I

Elementos não conformes

Bruno S. Carmo

Introdução

Interfaces e implementação

Costura iterativa

Vinculação da aproximação

Mortar patching

O espaço das funções cimento é constituído de polinômios contínuos no esqueleto espectral \mathcal{S} que contém todos os segmentos de interfaces não conformes, γ^m

$$\mathcal{W}^\delta = \{w \mid w \in C^0(\mathcal{S}) \text{ e } w|_{\gamma^m} \in \mathcal{P}_P(\gamma^m)\}.$$

As funções cimento são homogêneas nas fronteiras do domínio, $w|_{\partial\Omega} = 0$.

O espaço das funções de aproximação \mathcal{X}^δ é o espaço de funções v^δ que satisfaz as condições de contorno essenciais, e que quando limitadas ao interior de um elemento, $(v^\delta)|_{\Omega^e}$, pertencem a um subespaço de $H^1(\Omega^e)$.



Funções cimento II

Elementos não conformes

Bruno S. Carmo

Introdução

Interfaces e implementação

Costura iterativa

Vinculação da aproximação

Mortar patching

Além disso, as funções v^δ satisfazem as seguintes condições integrais e de vértice:

$$\int_{\Gamma^{e,j}} [(v^\delta)|_{\Omega^e} - w^m] \psi \, ds = 0, \quad \forall \psi \in \mathcal{P}_{P-2}(\Gamma^{e,j}),$$

$$[(v^\delta)|_{\Gamma^{e,j}} - w^m]|_{s=0, \bar{\gamma}^m} = 0,$$

onde $s = 0, \bar{\gamma}^m$ são os pontos extremos dos segmentos γ^m e o sobrescrito m corresponde ao par elemento/aresta (e, j) .

Note que, porque usamos duas condições de vértice nos extremos do segmento γ^m , é necessário reduzir em 2 a ordem das funções de teste $\psi(s)$.



Funções cimento III

Elementos não conformes

Bruno S. Carmo

Introdução

Interfaces e implementação

Costura iterativa

Vinculação da aproximação

Mortar patching

- Ao impor a condição integral para todo $\psi \in \mathcal{P}_{P-2}(\Gamma^{e,j})$, estamos efetivamente resolvendo um problema de minimização da norma L^2 do salto dos valores das funções ao longo da interface não conforme.
- A imposição da condição de vértice, combinada com a imposição de continuidade C^0 nas interfaces conformes, implica que as funções cimento são C^0 ao longo de uma interface.
- Consistentemente com a condição de vértice, as funções de teste devem satisfazer $\psi(0) = \psi(\bar{\gamma}^m) = 0$.
- A combinação dessas duas condições é, na prática, equivalente a uma projeção H^1 .



Outros aspectos numéricos do mortar patching

Elementos não conformes

Bruno S. Carmo

Introdução

Interfaces e implementação

Costura iterativa

Vinculação da aproximação

Mortar patching

Definindo uma norma local ('quebrada'), ou seja, uma norma global que é a soma das normas locais nos elementos, pode-se mostrar que

- O erro da aproximação depende apenas da regularidade local da solução exata em cada um dos subdomínios Ω^e ;
- Um problema de segunda ordem, tal como as equações de Laplace ou Helmholtz, discretizado com o método é bem posto e tem solução única;
- O limite do erro da aproximação é similar àquele de discretizações conformes.



Mortar patching: implementação I

Elementos não conformes

Bruno S. Carmo

Introdução

Interfaces e implementação

Costura iterativa

Vinculação da aproximação

Mortar patching

A função cimento w^m é simplesmente u^δ restrito à aresta do elemento, e pode ser expresso com interpolantes de Lagrange,

$$u^{e,l} = u^m = \sum_{i=0}^P u_i h_i(s).$$

Denotando as coordenadas locais cartesianas por ξ_i , a função de teste é

$$\psi = \sum_{i=1}^{P-1} \psi_i g_i^{P-2}(s), \quad \text{onde } g_i^{P-2}(s) = (-1)^{P-i} \frac{L'_P(s)}{\xi_i - s}.$$

Inserindo este conjunto de funções de base na condição integral, obtemos o sistema algébrico,

$$\sum_{j=1}^{P-1} \mathbf{M}^m[i][j] \mathbf{u}^{e,l}[j] = \sum_m \sum_{j=0}^P \mathbf{P}^m[i][j] \mathbf{w}^m[j].$$



Mortar patching: implementação II

Elementos não conformes

Bruno S. Carmo

Introdução

Interfaces e implementação

Costura iterativa

Vinculação da aproximação

Mortar patching

As matrizes de massa, $\mathbf{M}^m[i][j] \rightarrow \int_{\Gamma^{e,l}} v_i \psi_j ds$, e de projeção, $\mathbf{P}^m[i][j] \rightarrow \int_{\Gamma^{e,l}} w_i |_{\gamma^m} \psi_j ds$, são obtidas com as seguintes expressões,

$$\mathbf{M}^m[i][j] = \frac{|\Gamma^{e,l}|}{2} (-1)^{P-i} [-L_P''(\xi_i)] \rho_i \delta_{ij},$$

$$\mathbf{P}^m[i][j] = \frac{|\gamma^m|}{2} g_i^{P-2}(\xi_j) \rho_j - \frac{|\Gamma^{e,l}|}{2} g_i^{P-2}(-1) \rho_0 \delta_{0j},$$

onde ρ_i são os pesos das quadraturas.

Resolvendo para as velocidades incógnitas,

$$\mathbf{u}^{e,l} = (\mathbf{M}^m)^{-1} \sum_m \mathbf{P}^m \mathbf{w}^m = \sum_m \mathbf{Z}^m \mathbf{w}^m,$$

onde a soma em m indica integração em todas as interfaces não conformes.



Mortar patching: implementação III

Elementos não conformes

Bruno S. Carmo

Introdução

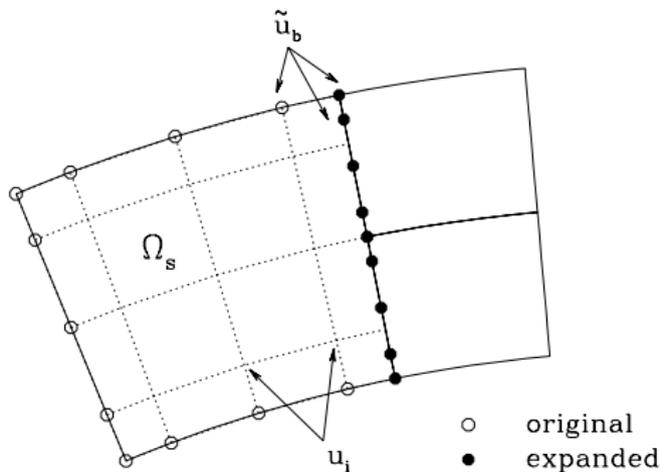
Interfaces e implementação

Costura iterativa

Vinculação da aproximação

Mortar patching

Para um elemento mestre, \mathbf{Z}^m é a matriz identidade. Para um elemento escravo, a base é expandida de modo a englobar também os pontos de fronteira do elemento mestre, ou seja, ela passa a ser composta por $\tilde{\mathbf{u}}_b$ (graus de liberdade conformes + cimento) e por \mathbf{u}_i .





Mortar patching: implementação IV

Elementos não conformes

Bruno S. Carmo

Introdução

Interfaces e implementação

Costura iterativa

Vinculação da aproximação

Mortar patching

Montando a matriz global $\tilde{\mathbf{Z}}$ a partir das elementares,

$$\tilde{\mathbf{Z}} = \mathcal{A}_m \mathbf{Z}^m,$$

podemos relacionar os coeficientes nodais de um elemento não conforme aos coeficientes conformes pela equação matricial,

$$\mathbf{u}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Z}} & \\ & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_b \\ \mathbf{u}_i \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{Z}}^e \tilde{\mathbf{u}}^e.$$

Assim, se o sistema local para um elemento conforme é dado por

$$\mathbf{H}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{M}^e \mathbf{f}^e,$$

o sistema correspondente para um elemento com interfaces não conformes é

$$(\hat{\mathbf{Z}}^e)^\top \mathbf{H}^e \hat{\mathbf{Z}}^e \tilde{\mathbf{u}}^e = (\hat{\mathbf{Z}}^e)^\top \mathbf{M}^e \mathbf{f}^e.$$



Mortar patching: implementação V

Elementos não conformes

Bruno S. Carmo

Introdução

Interfaces e implementação

Costura iterativa

Vinculação da aproximação

Mortar patching

Portanto, as formulações conformes e não conformes podem ser misturadas livremente no domínio computacional, e as matrizes globais são formadas através de uma operação de montagem (soma) das matrizes locais,

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}^T \underbrace{(\hat{\mathbf{Z}}^e)^T \mathbf{H}^e \hat{\mathbf{Z}}^e}_{\mathbf{H}^e} \mathbf{A},$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{A}^T \underbrace{(\hat{\mathbf{Z}}^e)^T \mathbf{M}^e \mathbf{f}^e}_{\mathbf{M}^e}.$$

onde $\hat{\mathbf{Z}}^e$ é uma matriz identidade para todos os elementos, exceto os escravos.

A matriz \mathbf{H} ainda é simétrica e positiva definida, porém com uma banda um pouco maior do que uma matriz conforme pura. Esta banda maior aparece porque o acoplamento entre os elementos de interfaces não conformes se estende para todos os elementos que dividem a interface, e não somente para os diretamente vizinhos.



Mortar patching: condicionamento da matriz laplaciana

Elementos não conformes

Bruno S. Carmo

Introdução

Interfaces e implementação

Costura iterativa

Vinculação da aproximação

Mortar patching

Assim como as discretizações conformes, o número de condicionamento da matriz laplaciana cresce com P^3 .

