



DG para eqs.
elípticas e
parabólicas

Bruno S.
Carmo

Introdução

Problemas
difusivos

Form. inconsistente
Form. consistente

Tipos de
fluxos
difusivos

Formulação de Galerkin descontínuo para problemas elípticos e parabólicos

PME5425 – Métodos de Elementos Finitos de Alta Ordem
com Aplicações em Mecânica dos Fluidos e Transferência
de Calor

Prof. Bruno S. Carmo

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

2017



Sumário

DG para eqs.
elípticas e
parabólicas

Bruno S.
Carmo

Introdução

Problemas
difusivos

Form. inconsistente
Form. consistente

Tipos de
fluxos
difusivos

1 Introdução

2 Problemas difusivos

- Formulação inconsistente
- Formulação consistente

3 Tipos de fluxos difusivos



Introdução

DG para eqs.
elípticas e
parabólicas

Bruno S.
Carmo

Introdução

Problemas
difusivos

Form. inconsistente
Form. consistente

Tipos de
fluxos
difusivos

- Embora os métodos de Galerkin descontínuo (DG) tenham sido originalmente aplicados a problemas hiperbólicos, mais recentemente formulações apropriadas para problemas elípticos e parabólicos têm sido desenvolvidas.
- A principal motivação para isso é resolver as equações do escoamento viscoso compressível com uma única formulação, facilitando a paralelização do código.
- Apresentaremos as diferentes formulações de fluxo difusivo desenvolvidas e compararemos seus desempenhos.



Fluxo difusivo – formulação inconsistente I

DG para eqs.
elípticas e
parabólicas

Bruno S.
Carmo

Introdução

Problemas
difusivos

Form. inconsistente

Form. consistente

Tipos de
fluxos
difusivos

Equação de difusão unidimensional: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Admitindo condições de contorno periódicas, aplicamos o método dos resíduos ponderados e fazemos a integração por partes. Para um elemento Ω_j com centro geométrico em $x = 0$, temos então,

$$\int_{\Omega_j} \frac{\partial u}{\partial t} v \, dx + \int_{\Omega_j} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx - \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right)_R v_R^- + \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right)_L v_L^+ = 0. \quad (1)$$

Assumindo a condição inicial,

$$u(x, 0) = u^- + H(x)(u^+ - u^-), \quad H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/2 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$



Fluxo difusivo – formulação inconsistente II

DG para eqs.
elípticas e
parabólicas

Bruno S.
Carmo

Introdução

Problemas
difusivos

Form. inconsistente
Form. consistente

Tipos de
fluxos
difusivos

Temos a solução analítica

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(u^+ + u^-) + \frac{1}{2}(u^+ - u^-) \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right)$$

Em $x = 0$, $u(0, t) = \frac{1}{2}(u^+ + u^-)$, $\forall t > 0$. Assim, uma escolha natural para o fluxo numérico é a média dos valores à esquerda e à direita da descontinuidade, ou seja,

$$\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}\right)_R = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_R^- + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_R^+ \right].$$

Substituindo a expressão do fluxo na expressão (1), temos a seguinte expressão semidiscreta para uma malha equispçada

$$\frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial t} + \frac{1}{\Delta x^2} [\mathbf{A} \mathbf{u}_{j-1} + \mathbf{B} \mathbf{u}_j + \mathbf{C} \mathbf{u}_{j+1}] = 0$$



Fluxo difusivo – formulação inconsistente III

DG para eqs.
elípticas e
parabólicas

Bruno S.
Carmo

Introdução

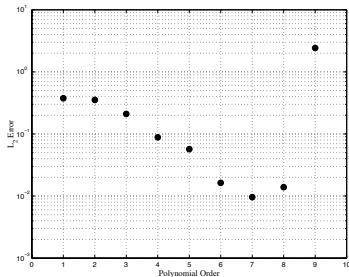
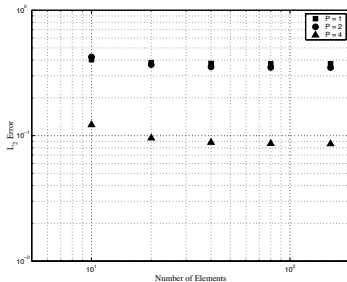
Problemas
difusivos

Form. inconsistente

Form. consistente

Tipos de
fluxos
difusivos

Essa formulação, embora seja estável, é inconsistente. Por exemplo, tomando $P = 0$, teremos $\frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial t} = 0$.



Convergência da solução numérica da equação de difusão com condição inicial $u(x, 0) = \sin x$, em um domínio $x \in [0, 2\pi]$.



Fluxo difusivo – formulação consistente I

DG para eqs.
elípticas e
parabólicas

Bruno S.
Carmo

Introdução

Problemas
difusivos

Form. inconsistente
Form. consistente

Tipos de
fluxos
difusivos

Nos concentraremos especificamente no fluxo devido a um operador de segunda ordem (laplaciano), por isso, consideraremos o problema modelo:

$$\begin{aligned} -\nabla^2 u &= f && \text{em } \Omega, \\ u &= 0 && \text{em } \partial\Omega \end{aligned}$$

Reescrevemos o problema como um sistema de primeira ordem

$$\begin{aligned} \sigma &= \nabla u && \text{em } \Omega, \\ \nabla \cdot \sigma &= f && \text{em } \Omega, \\ u &= 0 && \text{em } \partial\Omega \end{aligned}$$



Fluxo difusivo – formulação consistente II

DG para eqs.
elípticas e
parabólicas

Bruno S.
Carmo

Introdução

Problemas
difusivos

Form. inconsistente

Form. consistente

Tipos de
fluxos
difusivos

Multiplicando essas equações respectivamente pelas funções de teste τ e v e integrando num elemento Ω^e e aplicando o teorema da divergência nos termos dos lados direitos:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^e} \sigma \tau dx &= - \int_{\Omega^e} u \nabla \tau dx + \int_{\partial \Omega^e} u \tau \mathbf{n} ds, \\ \int_{\Omega^e} \sigma \nabla v dx &= \int_{\Omega^e} f v dx + \int_{\partial \Omega^e} \sigma v \mathbf{n} ds.\end{aligned}$$

Os espaços de funções apropriados são:

$$\begin{aligned}V_h &:= \{v \in L^2(\Omega) : v|_{\Omega^e} \in \mathcal{P}_p(\Omega^e) \quad \forall \Omega^e\}, \\ \Sigma_h &:= \{\tau \in [L^2(\Omega)]^2 : \tau|_{\Omega^e} \in [\mathcal{P}_p(\Omega^e)]^2 \quad \forall \Omega^e\}.\end{aligned}$$



Fluxo difusivo – formulação consistente III

DG para eqs.
elípticas e
parabólicas

Bruno S.
Carmo

Introdução

Problemas
difusivos

Form. inconsistente
Form. consistente

Tipos de
fluxos
difusivos

Podemos então aproximar os termos de fronteira com *fluxos numéricos* $\tilde{u}$ e $\tilde{\sigma}$:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^e} \sigma \tau dx &= - \int_{\Omega^e} u \nabla \tau dx + \int_{\partial\Omega^e} \tilde{u} \tau \mathbf{n} ds, \\ \int_{\Omega^e} \sigma \nabla v dx &= \int_{\Omega^e} f v dx + \int_{\partial\Omega^e} \tilde{\sigma} v \mathbf{n} ds.\end{aligned}$$

A escolha do fluxo afeta a estabilidade e acurácia do método, assim como a esparsidade e simetria das matrizes.



Fluxo difusivo – consistência e conservação

DG para eqs.
elípticas e
parabólicas

Bruno S.
Carmo

Introdução

Problemas
difusivos

Form. inconsistente
Form. consistente

Tipos de
fluxos
difusivos

O fluxo numérico é *consistente* se

$$\tilde{u}(v) = v|_{\partial\Omega^e}, \quad \tilde{\sigma}(v, \nabla v) = \nabla v|_{\partial\Omega^e}$$

sempre que v for uma função suave que satisfaça condições de contorno do tipo Dirichlet.

Os fluxos numéricos $\tilde{u}$ e $\tilde{\sigma}$ serão *conservativos* se $\tilde{u}(\cdot)$ e $\tilde{\sigma}(\cdot, \cdot)$ tem valor único em $\partial\Omega^e$.



Fluxo difusivo – média e salto I

DG para eqs.
elípticas e
parabólicas

Bruno S.
Carmo

Introdução

Problemas
difusivos

Form. inconsistente
Form. consistente

Tipos de
fluxos
difusivos

Para uma variável q , definimos a média $\{q\}$ e o salto $\llbracket q \rrbracket$ de q numa aresta e compartilhada pelos elementos Ω^1 e Ω^2 , cujas normais n_1 e n_2 de e apontam para o exterior de Ω^1 e Ω^2 respectivamente:

$$\{q\} = \frac{1}{2}(q_1 + q_2), \quad \llbracket q \rrbracket = q_1 n_1 + q_2 n_2.$$

Se q for escalar, o salto $\llbracket q \rrbracket$ é um vetor paralelo à normal da aresta. Se q for um vetor, o salto é um escalar.

Temos a seguinte identidade:

$$\int_{\partial\Omega^e} q_e \varphi_e \mathbf{n}_e ds = \int_{\partial\Omega^e} \llbracket q \rrbracket \{\varphi\} ds + \int_{\partial\Omega^e} \{q\} \llbracket \varphi \rrbracket ds$$



Fluxo difusivo – média e salto II

DG para eqs.
elípticas e
parabólicas

Bruno S.
Carmo

Introdução

Problemas
difusivos

Form. inconsistente
Form. consistente

Tipos de
fluxos
difusivos

Portanto, podemos escrever:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^e} \sigma \tau \, dx &= - \int_{\Omega^e} u \nabla \tau \, dx + \int_{\partial \Omega^e} [\![\tilde{u}]\!] \{\tau\} \mathbf{n} \, ds + \int_{\partial \Omega^e} \{\tilde{u}\} [\![\tau]\!] \mathbf{n} \, ds, \\ \int_{\Omega^e} \sigma \nabla v \, dx &= \int_{\Omega^e} f v \, dx + \int_{\partial \Omega^e} [\![\tilde{\sigma}]\!] \{v\} \mathbf{n} \, ds + \int_{\partial \Omega^e} \{\tilde{\sigma}\} [\![v]\!] \mathbf{n} \, ds.\end{aligned}$$

Ou, alternativamente:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^e} \nabla u \nabla v \, dx &+ \int_{\partial \Omega^e} ([\![\tilde{u} - u]\!] \{\nabla v\} - \{\sigma\} [\![v]\!]) \, ds + \\ &+ \int_{\partial \Omega^e} (\{\tilde{u} - u\} [\![\nabla v]\!] - [\![\tilde{\sigma}]\!] \{v\}) \, ds = \int_{\Omega^e} f v \, dx.\end{aligned}$$



Fluxo difusivo – operadores auxiliares

DG para eqs.
elípticas e
parabólicas

Bruno S.
Carmo

Introdução

Problemas
difusivos

Form. inconsistente
Form. consistente

Tipos de
fluxos
difusivos

Operadores de “lifting” r e l :

$$\int_{\Omega^e} r(\varphi) \tau \, dx = - \int_{\partial\Omega^e} \varphi \{\tau\} \, ds, \quad \int_{\Omega^e} l(q) \tau \, dx = - \int_{\partial\Omega^e} q \llbracket \tau \rrbracket \, ds$$

$$\alpha^j(u, v) = \int_{\partial\Omega^e} \mu \llbracket u \rrbracket \cdot \llbracket v \rrbracket \, ds.$$

onde μ é uma penalidade.

$$\alpha^r(u, v) = \int_{\Omega^e} \eta r(\llbracket u \rrbracket) \cdot r(\llbracket v \rrbracket) \, dx.$$

onde η é um número positivo.



Tipos de fluxos difusivos - formulação escalonada

DG para eqs.
elípticas e
parabólicas

Bruno S.
Carmo

Introdução

Problemas
difusivos

Form. inconsistente
Form. consistente

Tipos de
fluxos
difusivos

Method	$\hat{u}_K$	$\hat{\sigma}_K$
Bassi–Rebay [10]	$\{u_h\}$	$\{\sigma_h\}$
Brezzi et al. [22]	$\{u_h\}$	$\{\sigma_h\} - \alpha_r(\llbracket u_h \rrbracket)$
LDG [41]	$\{u_h\} - \beta \cdot \llbracket u_h \rrbracket$	$\{\sigma_h\} + \beta \llbracket \sigma_h \rrbracket - \alpha_j(\llbracket u_h \rrbracket)$
IP [50]	$\{u_h\}$	$\{\nabla_h u_h\} - \alpha_j(\llbracket u_h \rrbracket)$
Bassi et al. [13]	$\{u_h\}$	$\{\nabla_h u_h\} - \alpha_r(\llbracket u_h \rrbracket)$
Baumann–Oden [15]	$\{u_h\} + n_K \cdot \llbracket u_h \rrbracket$	$\{\nabla_h u_h\}$
NIPG [64]	$\{u_h\} + n_K \cdot \llbracket u_h \rrbracket$	$\{\nabla_h u_h\} - \alpha_j(\llbracket u_h \rrbracket)$
Babuška–Zlámal [7]	$(u_h _K) _{\partial K}$	$-\alpha_j(\llbracket u_h \rrbracket)$
Brezzi et al. [23]	$(u_h _K) _{\partial K}$	$-\alpha_r(\llbracket u_h \rrbracket)$



Tipos de fluxos difusivos - formulação primitiva

DG para eqs.
elípticas e
parabólicas

Bruno S.
Carmo

Introdução

Problemas
difusivos

Form. inconsistente
Form. consistente

Tipos de
fluxos
difusivos

Method	$B_h(w, v)$
Bassi–Rebay [10]	$g - \langle \{\nabla_h w\}, \llbracket v \rrbracket \rangle - \langle \llbracket w \rrbracket, \{\nabla_h v\} \rangle + (r(\llbracket w \rrbracket), r(\llbracket v \rrbracket))$
Brezzi et al. [22]	$g - \langle \{\nabla_h w\}, \llbracket v \rrbracket \rangle - \langle \llbracket w \rrbracket, \{\nabla_h v\} \rangle + (r(\llbracket w \rrbracket), r(\llbracket v \rrbracket)) + \alpha^r(w, v)$
LDG [41]	see (3.27)
IP [50]	$g - \langle \{\nabla_h w\}, \llbracket v \rrbracket \rangle - \langle \llbracket w \rrbracket, \{\nabla_h v\} \rangle + \alpha^j(w, v)$
Bassi et al. [13]	$g - \langle \{\nabla_h w\}, \llbracket v \rrbracket \rangle - \langle \llbracket w \rrbracket, \{\nabla_h v\} \rangle + \alpha^r(w, v)$
Baumann–Oden [15]	$g - \langle \{\nabla_h w\}, \llbracket v \rrbracket \rangle + \langle \llbracket w \rrbracket, \{\nabla_h v\} \rangle$
NIPG [64]	$g - \langle \{\nabla_h w\}, \llbracket v \rrbracket \rangle + \langle \llbracket w \rrbracket, \{\nabla_h v\} \rangle + \alpha^j(w, v)$
Babuška–Zlámal [7]	$g + \alpha^j(w, v)$
Brezzi et al. [23]	$g + \alpha^r(w, v)$

$$\begin{aligned}
 B_h(u_h, v) = & \int_{\Omega} \nabla_h u_h \cdot \nabla_h v \, dx - \int_{\Gamma} (\llbracket u_h \rrbracket \cdot \{\nabla_h v\} + \{\nabla_h u_h\} \cdot \llbracket v \rrbracket) \, ds \\
 & + \int_{\Gamma^0} (\beta \cdot \llbracket u_h \rrbracket \llbracket \nabla_h v \rrbracket + \llbracket \nabla_h u_h \rrbracket \beta \cdot \llbracket v \rrbracket) \, ds \\
 & + \int_{\Omega} [r(\llbracket u_h \rrbracket) + l(\beta \cdot \llbracket u_h \rrbracket)] \cdot [r(\llbracket v \rrbracket) + l(\beta \cdot \llbracket v \rrbracket)] \, dx + \alpha^j(u_h, v).
 \end{aligned}$$



Fluxos difusivos – Consistência e estabilidade

DG para eqs.
elípticas e
parabólicas

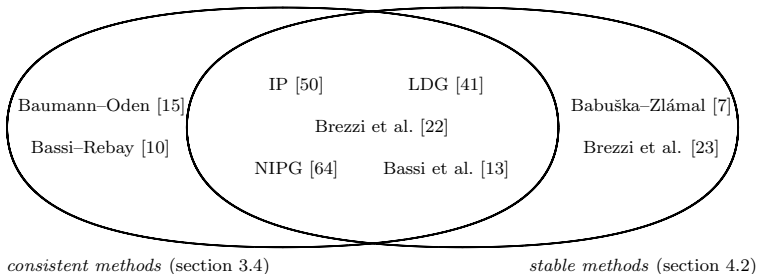
Bruno S.
Carmo

Introdução

Problemas
difusivos

Form. inconsistente
Form. consistente

Tipos de
fluxos
difusivos





Fluxos difusivos - resumo

DG para eqs.
elípticas e
parabólicas

Bruno S.
Carmo

Introdução

Problemas
difusivos

Form. inconsistente

Form. consistente

Tipos de
fluxos
difusivos

Method	Cons.	A.C.	Stab.	Type	Cond.	H^1	L^2
Brezzi et al. [22]	✓	✓	✓	α^r	$\eta_0 > 0$	h^p	h^{p+1}
LDG [41]	✓	✓	✓	α^j	$\eta_0 > 0$	h^p	h^{p+1}
IP [50]	✓	✓	✓	α^j	$\eta_0 > \eta^*$	h^p	h^{p+1}
Bassi et al. [13]	✓	✓	✓	α^r	$\eta_0 > 3$	h^p	h^{p+1}
NIPG [64]	✓	×	✓	α^j	$\eta_0 > 0$	h^p	h^p
Babuška–Zlámal [7]	×	×	✓	α^j	$\eta_0 \approx h^{-2p}$	h^p	h^{p+1}
Brezzi et al. [23]	×	×	✓	α^r	$\eta_0 \approx h^{-2p}$	h^p	h^{p+1}
Baumann–Oden ($p = 1$)	✓	×	×	-	-	×	×
Baumann–Oden ($p \geq 2$)	✓	×	×	-	-	h^p	h^p
Bassi–Rebay [10]	✓	✓	×	-	-	$[h^p]$	$[h^{p+1}]$