Introdução

PME5425 – Métodos de Elementos Finitos de Alta Ordem com Aplicações em Mecânica dos Fluidos e Transferência de Calor

Prof. Bruno S. Carmo

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

2017

Sumário

As equações básicas da dinâmica dos fluidos e transferência de calor I

Escoamento em um volume de controle ($\not{V}C$) indeformável Ω, limitado por uma superfície de controle $\partial\Omega$ sendo $\boldsymbol{n}$ o versor normal que aponta para fora do domínio.

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\int_{\Omega}\rho\,\mathrm{d}\Omega+\int_{\partial\Omega}\rho\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=0, \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}\rho\mathbf{v}\,\mathrm{d}\Omega+\int_{\partial\Omega}\left[\rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{n})-\boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma}\right]\mathrm{d}S=\int_{\Omega}\mathbf{f}\,\mathrm{d}\Omega, \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}E\,\mathrm{d}\Omega+\int_{\partial\Omega}(E\mathbf{v}-\boldsymbol{\sigma}\mathbf{v}+\mathbf{q})\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S=\int_{\Omega}\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}\Omega. \tag{3}$$

onde $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)=(u,v,w)$ é o campo de velocidades, ρ é a massa específica, $E=\rho(e_i+\frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})$ é a energia total específica, e_i é a energia interna específica, $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor das tensões, $\mathbf{q}$ é o vetor de fluxo de calor e $\mathbf{f}$ representa o vetor resultante das forças externas que atuam sobre o $\not{V}C$.

As equações básicas da dinâmica dos fluidos e transferência de calor II

Para fluidos newtonianos:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\tau}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mu\left[\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^\top\right] + \lambda(\nabla\cdot\mathbf{v})\boldsymbol{I}, \tag{5}$$

onde $\boldsymbol{I}$ é o tensor unitário, e μ e λ são o primeiro e segundo coeficientes de viscosidade, respectivamente, relacionados pela hipótese de Stokes ($2\mu + 3\lambda = 0$).

O vetor de fluxo de calor está relacionado com o gradiente de temperatura pela lei de difusão de Fourier:

$$\mathbf{q} = -k\nabla T,$$

onde $k(T)$ é a condutividade térmica.

As equações integrais (1), (2) e (3) podem ser transformadas em equações diferenciais através da aplicação do teorema de Gauss:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}\mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{f}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (E\mathbf{v} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{v} + \mathbf{q}) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}. \tag{8}$$

As eqs. (7) e (8) podem ser reescritas fazendo o uso da equação da continuidade (6) e das equações constitutivas (4) e (5):

$$\rho \frac{\mathrm{D}\mathbf{v}}{\mathrm{D}t} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \mathbf{f}, \tag{9}$$

$$\rho \frac{\mathrm{D}e_i}{\mathrm{D}t} = -p\nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \tau \cdot \nabla \mathbf{v} \tag{10}$$

As equações básicas da dinâmica dos fluidos e transferência de calor IV

Além das equações de conservação, uma equação de estado também é necessária. Para gases ideais:

$$p = \rho R T. \tag{11}$$

Para um gás ideal com calores específicos constantes, podemos escrever a equação da energia em termos da temperatura:

$$\rho c_v \frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t} = -p\nabla\cdot\mathbf{v} + \nabla\cdot(k\nabla T) + \tau\cdot\nabla\mathbf{v}. \tag{12}$$

O sistema formado pelas equações (6), (9), (11) e (12) são as equações de Navier-Stokes para escoamentos compressíveis e contém seis incógnitas escalares: $(\rho, \mathbf{v}, p, T)$ para seis equações. É um sistema parabólico incompleto, já que não há derivadas de segunda ordem na equação da continuidade.

Equações de Euler I

Se considerarmos um escoamento não viscoso ($\mu = 0$) e sem difusão térmica ($k = 0$), obtemos as equações de Euler, que formam um sistema hiperbólico.

Na ausência de forças externas e fontes de calor, essas equações são:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}\mathbf{v}) = -\nabla p,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot [(E + p)\mathbf{v}] = 0.$$

Equações de Euler II

Este sistema admite soluções descontínuas, podendo descrever a transição de um escoamento subsônico ($|\mathbf{v}| < c$) para supersônico ($|\mathbf{v}| > c$), onde $c = (\gamma RT)^{1/2}$ é a velocidade do som.

Tipicamente, esta transição acontece através de uma onda de choque, que representa uma descontinuidade nas variáveis primitivas do escoamento (velocidades e pressão).

Na região de choques, a forma integral das equações deve ser utilizada.

Escoamento incompressível: equações de Navier–Stokes

Para um escoamento incompressível ($\rho =$ constante), as equações de conservação de massa e quantidade de movimento tornam-se:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

$$\rho \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = -\nabla p + \nabla \cdot \{\mu[\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^\top]\} + \mathbf{f},$$

onde a viscosidade $\mu(\mathbf{x}, t)$ pode variar no espaço e no tempo devido à física do escoamento ou ao modelo de submalha em formulações de simulações de grandes turbilhões (LES). A pressão $p(\mathbf{x}, t)$ não é mais uma grandeza termodinâmica, mas sim uma restrição (multiplicador de Lagrange) que projeta o campo de velocidades $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ num espaço de divergência nula (solenoidal).

Escoamento incompressível: termos de inércia

Os termos de inércia (aceleração) podem ser escritos de diversas maneiras equivalentes, que na forma discreta conservam a quantidade de movimento total $\int_\Omega \mathbf{v}\,\mathrm{d}\Omega$ e a energia cinética total $\int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}\Omega$ na ausência de viscosidade e forças externas. As seguintes formulações são empregadas com frequência:

- forma convectiva: $\mathrm{D}\mathbf{v}/\mathrm{D}t = \partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}$;
- forma conservativa (fluxo): $\mathrm{D}\mathbf{v}/\mathrm{D}t = \partial\mathbf{v}/\partial t + \nabla\cdot(\mathbf{v}\mathbf{v})$;
- forma rotacional:
  $\mathrm{D}\mathbf{v}/\mathrm{D}t = \partial\mathbf{v}/\partial t - \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v}) + 1/2\nabla(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})$;
- forma com distorção simétrica:
  $\mathrm{D}\mathbf{v}/\mathrm{D}t = \partial\mathbf{v}/\partial t + 1/2[(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \nabla\cdot(\mathbf{v}\mathbf{v})]$.

Escoamento incompressível: formulação velocidade–vorticidade

Se tomarmos o rotacional das equações de Navier-Stokes, chegamos à chamada formulação de velocidade–vorticidade:

$$\rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}$$

$$\nabla^2 \mathbf{v} = -\nabla \times \boldsymbol{\omega}$$

Condução de calor em meio sólido

Num meio sólido, as velocidades são nulas e a única equação de conservação que precisa ser resolvida é a equação da energia. Admitindo que a variação de energia neste sólido é dada por $\mathrm{d}e_i = c\,\mathrm{d}T$, onde c é o calor específico do sólido, e também considerando um termo fonte de calor $\dot{q}$ dado em potência por unidade de volume, a equação da energia pode ser escrita:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{q}. \tag{13}$$

Se a condutividade térmica k puder ser considerada constante, a equação (13) pode ser simplificada para

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + \frac{\dot{q}}{k}, \tag{14}$$

onde $\alpha = \rho c / k$ é a difusividade térmica.

Classificação das equações diferenciais parciais

A forma mais geral de uma equação diferencial parcial de segunda ordem com variáveis independentes x e y e variável dependente $u(x, y)$ é

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu + G = 0,$$

com $A, \ldots, G = const$.
Esta equação pode ser classificada segundo o seguinte critério

$B^2 - 4AC < 0$	*elíptica*
$B^2 - 4AC = 0$	*parabólica*
$B^2 - 4AC > 0$	*hiperbólica*

Esta classificação tem implicação direta no comportamento da solução e nos requisitos de condições de contorno e iniciais.

Discretização numérica I

O Método de Elementos Finitos (MEF):

- Construção de uma solução de uma equação diferencial a partir de uma sequência de aproximações locais.
- Desenvolvimento inicial focando em aplicações estruturais (problemas de elasticidade).
- Uso de polinômios de baixa ordem (primeiro ou segundo graus) como base de expansão.
- Em Mecânica dos Fluidos: condição *inf-sup* (Babuska & Brezzi), também conhecida por *div-stability*, é necessária quando se usa a abordagem variacional, o que ocorre tipicamente no estudo de fenômenos modelados com a equação de Stokes (N-S sem o termo convectivo).

Discretização numérica II

Métodos Espectrais (ME):

- Também chamados de métodos espectrais globais.
- Usam uma representação única de uma função $u(x)$ em todo o domínio dada por uma expansão em série truncada

$$u(x) \approx u_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \hat{u}_n \phi_n,$$

onde $\phi_n(x)$ são as funções de base.

- A série é então substituída na equação diferencial e os os coeficientes $\hat{u}_n$ são determinados através de algum procedimento de minimização do resíduo.

Discretização numérica III

Métodos Espectrais (cont.):

- As funções de base mais comuns são modos de Fourier, polinômios de Chebyshev $T_n(x)$, polinômios de Legendre $L_n(x)$ ou algum outro polinômio de Jacobi $P_n^{\alpha,\beta}$.
- Podem ser classificados em dois tipos: pseudo-espectrais, nodais ou de colocação e modais ou de Galerkin.
- Convergência exponencial (propriedade que advém da teoria de problemas de contorno de Sturm-Liouville singulares; as funções de base são soluções deste tipo de problema); depende da regularidade da solução e do domínio.

Discretização numérica IV

O Método de Elementos Espectrais/hp (MEE-hp)

- Ideias básicas derivam do MEF e de ME.
- Do MEF:
  - subdivisão do domínio de interesse Ω em um número de subdomínios não sobrepostos, ou elementos, Ω^e;
  - e construção da solução da equação diferencial a partir de uma sequência de aproximações locais, definidas em cada um dos elementos;
  - aproximações são combinações lineares de funções (as *funções de base*) que pertencem a um conjunto previamente definido, chamado de *base de expansão*;

O Método de Elementos Espectrais/hp (cont.)

- Do MEF (*cont.*):
  - funções da base de expansão são sujeitas a certos requisitos de forma a assegurar algum grau de continuidade da aproximação global;
  - flexibilidade geométrica;
  - refinamento h.
- Do ME:
  - emprego de funções de base de alta ordem;
  - refinamento p.

Por que alta ordem?

Particularmente recomendados em duas situações:

- Problemas com longa integração temporal (os erros espaciais de cada passo de tempo se propagam à medida em que a solução é calculada).
- Problemas que necessitam de alta resolução espacial (acesso a diferentes escalas espaciais no escoamento).

Convergência hp:

- Convergência h = redução do erro através da diminuição do tamanho dos elementos de malha.
- Convergência p = redução do erro através do aumento da base polinomial.