

Momentos de dipolo magnético

(Parênteses eletromagnético)

Modelo de Bohr: e^- circulando em torno do núcleo, produzindo uma corrente.

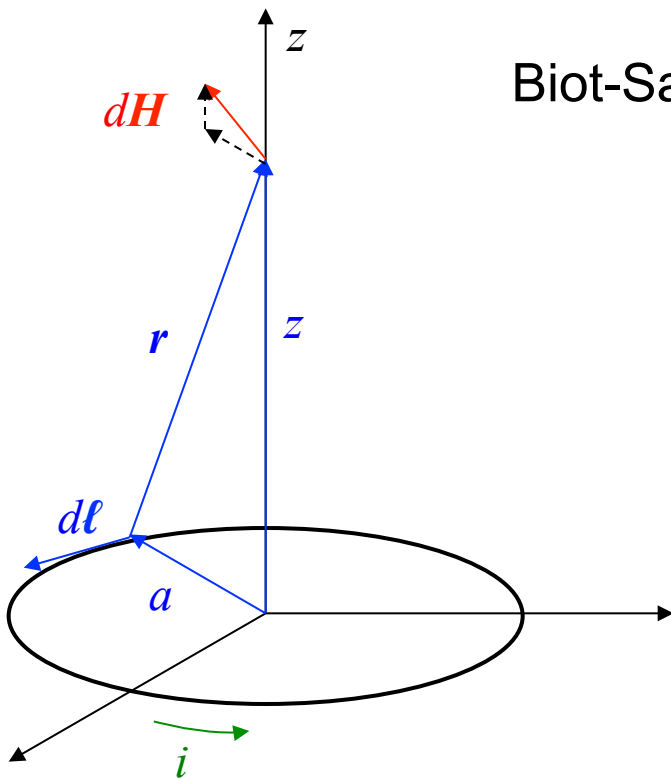
$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r}$$

Uma espira de corrente produz um campo magnético, a grandes distâncias, igual ao de um dipolo magnético localizado no seu centro e orientado perpendicularmente:

Biot-Savart: $d\vec{H} = \frac{id\vec{\ell} \times \hat{r}}{4\pi r^2}$, mas $d\vec{\ell} = a d\phi \hat{\phi}$ e

$$\vec{r} = -a\hat{\rho} + z\hat{z} \Rightarrow \hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{-a\hat{\rho} + z\hat{z}}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

$$\begin{aligned} \therefore d\vec{H} &= \frac{id\phi \hat{\phi} \times (-a\hat{\rho} + z\hat{z})}{4\pi(a^2 + z^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{ia^2 d\phi \hat{z}}{4\pi(a^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{iaz d\phi \hat{\rho}}{4\pi(a^2 + z^2)^{3/2}} \Rightarrow \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \vec{H} = \frac{2\pi i a^2 \hat{z}}{4\pi(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{i\vec{A}}{2\pi(a^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\vec{\mu}}{2\pi(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

No limite de grandes distâncias da espira:

$$\vec{H}(z) = \frac{\vec{\mu}}{2\pi(a^2 + z^2)^{3/2}} \xrightarrow{z \gg a} \vec{H}(z) = \frac{\vec{\mu}}{2\pi z^3} \quad \text{Fim do parênteses}$$

e^- em órbita também tem momento angular: $\vec{L}$; $L = mvr$

$$\text{Mas } \mu_\ell = iA = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{evr}{2} \Rightarrow \frac{\mu_\ell}{L} = \frac{evr}{2mvr} = \frac{e}{2m}$$

Só constantes universais!

$$\text{Outra forma: } \mu_\ell = iA = e \frac{A}{T} \text{ mas, pela Lei de Kepler: } \frac{A}{T} = \frac{L}{2m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_\ell = \frac{e}{2m} L \Rightarrow \frac{\mu_\ell}{L} = \frac{e}{2m}. \quad \text{Vetorialmente: } \vec{\mu}_\ell = \frac{e}{2m} \vec{L}$$

Relação não depende da geometria da órbita

Sonda eletromagnética para perceber momento angular!

Quanticamente: $L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar \Rightarrow \mu_\ell = \frac{e}{2m} L = \frac{e}{2m} \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar$

Podemos definir uma unidade microscópica de momento magnético, o magneton de Bohr, como:

$$\mu_b = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,274 \times 10^{-23} \text{ (A m}^2 \equiv \text{J/T)} = 5,788 \times 10^{-9} \text{ eV/Gauss}$$

Assim, podemos escrever o momento magnético do átomo como:

$$\mu_\ell = \frac{e}{2m} L = \frac{g_\ell \mu_b}{\hbar} L = \frac{g_\ell \mu_b}{\hbar} \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar = g_\ell \mu_b \sqrt{\ell(\ell+1)}$$

A proporcionalidade entre μ e L é uma propriedade geral de cargas em rotação. Os momentos magnético e angular de um corpo qualquer, de massa M e carga Q , em rotação, sempre satisfazem a relação $\vec{\mu} = g \frac{Q}{2M} \vec{L}$. Os detalhes da distribuição determinam o valor do fator g .

Componente z No caso, $g_\ell = 1$, fator g orbital.

$$\mu_{\ell z} = -\frac{g_\ell \mu_b}{\hbar} L_z = -\frac{g_\ell \mu_b}{\hbar} m_\ell \hbar = -g_\ell \mu_b m_\ell$$

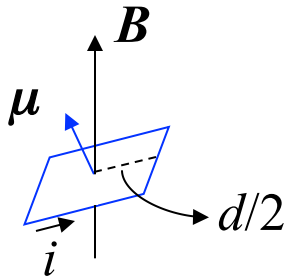
$\vec{\mu}_\ell$ e $\vec{L}$ são anti-paralelos no caso do elétron

(Parênteses eletromagnético)

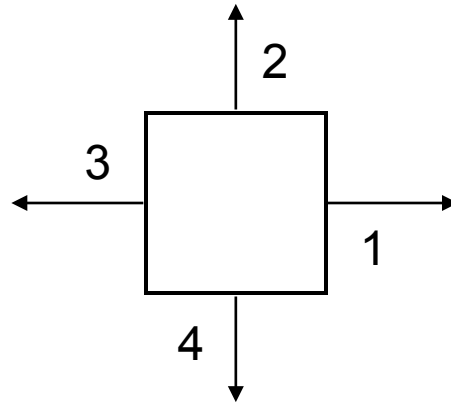
Dipolo magnético submetido a um campo magnético externo sofre um torque:

$$\vec{\tau} = \vec{\mu}_\ell \times \vec{B}$$

Consideremos uma espira quadrada, de lado d , com corrente i , submetida a um campo magnético externo $\vec{B}$.



$$d\vec{F} = i d\vec{\ell} \times \vec{B}$$



$$F_1 = F_3 = iBd$$

$$F_2 = F_4 = iBd \sin \theta$$

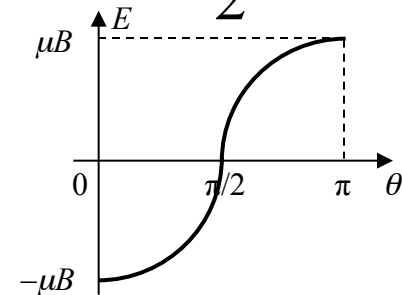
$$\sum_n \vec{F}_n = 0$$

Mas F_1 e F_3 produzem torque:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{d}{2} F_1 \sin \theta + \frac{d}{2} F_3 \sin \theta = (F_1 + F_3) \frac{d}{2} \sin \theta = 2idB \frac{d}{2} \sin \theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau = id^2 B \sin \theta$$



Mas $id^2 = \mu_\ell \Rightarrow \tau = \mu_\ell B \sin \theta \Rightarrow \vec{\tau} = \vec{\mu}_\ell \times \vec{B}$

Trabalho: $W = \int_{\text{ângulo}} \tau d\theta$ Convecionando que $E(\theta = 90^\circ) = 0$, temos:

$$\Delta E = \int_{90^\circ}^{\theta} \mu_\ell B \sin \theta d\theta = -\mu_\ell B \cos \theta \Big|_{90^\circ}^{\theta} = -\mu_\ell B \cos \theta = -\vec{\mu}_\ell \cdot \vec{B}$$

EXEMPLO 8-1 Eisberg, pág. 348

Suponha que um dipolo magnético, de intensidade de momento μ_I , está alinhado paralelamente com um campo magnético externo de intensidade B . Considere que $\mu_I = 1$ magnéton de Bohr (valor típico para o momento de dipolo magnético de um átomo) e que $B = 1$ tesla (campo comumente produzido por um eletroímã razoavelmente potente). Calcule a energia necessária para girar o dipolo magnético de modo a colocá-lo antiparalelo ao campo.

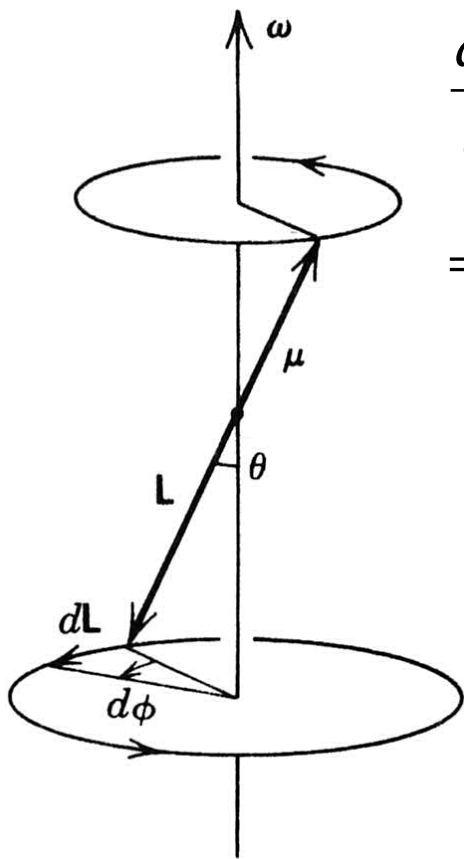
Segundo (8-13), a energia potencial orientacional vale $-\mu_I B$, quando o dipolo é paralelo ao campo e $+\mu_I B$ quando o dipolo é antiparalelo ao campo. A energia necessária para girar o dipolo será então

$$\begin{aligned} 2\mu_I B &= 2 \times 0,927 \times 10^{-23} \text{ amp-m}^2 \times 1 \text{ joule/amp-m}^2 \\ &= 1,85 \times 10^{-23} \text{ joule} = 1,16 \times 10^{-4} \text{ eV} \end{aligned}$$

Embora essa energia seja muito pequena, mesmo para a escala atômica, o dipolo só poderá girar se tal valor de energia lhe for cedido. Inversamente, se o dipolo estiver originalmente alinhado antiparalelamente ao campo, ele só poderá girar para se tornar paralelo ao campo se ele puder ceder este mesmo valor de energia. ▲

Caso não existam formas de dissipar a energia, μ_ℓ não pode mudar sua orientação em relação a B . Nesse caso, μ_ℓ precessiona em torno da direção de B , mantendo o ângulo entre eles constante.

$$\left. \begin{aligned} \vec{\tau} &= \vec{\mu}_\ell \times \vec{B} = -\frac{g_\ell \mu_b}{\hbar} \vec{L} \times \vec{B} \\ \text{Mas } \vec{\tau} &= \frac{d\vec{L}}{dt} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = -\frac{g_\ell \mu_b}{\hbar} \vec{L} \times \vec{B}$$



$$\frac{dL}{dt} = L \sin \theta \frac{d\phi}{dt} = L \omega \sin \theta = \tau = -\frac{g_\ell \mu_b}{\hbar} LB \sin \theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{g_\ell \mu_b}{\hbar} B = \frac{e}{2m} B$$

Frequência de Larmor

Tratamento quântico: mesmos resultados, só que para os valores esperados das grandezas.

O módulo de $\vec{L}$ permanece constante:

$$\frac{d}{dt} L^2 = \frac{d}{dt} \vec{L} \cdot \vec{L} = 2\vec{L} \cdot \frac{d}{dt} \vec{L} = 0$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -\frac{g_\ell \mu_b}{\hbar} \vec{L} \times \vec{B}$$

$$d\phi = \frac{dL}{L \sin \theta} \Rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{L \sin \theta} \frac{dL}{dt} = \frac{\omega L \sin \theta}{L \sin \theta} = \omega$$

$$\omega = \frac{eB}{2m} \Rightarrow \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{eB}{4\pi m} \quad \begin{array}{c} \text{Lorentz} \\ \longleftrightarrow \\ \text{clássico} \end{array} \quad \delta\nu = \frac{eB}{4\pi m_e}$$

Voltando ao efeito Zeeman: suponhamos um átomo monoelétrônico em um estado estacionário descrito por uma autofunção $\Psi_{n\ell m}$ na ausência de campo magnético. Então:

$\langle L^2 \rangle = \ell(\ell + 1)\hbar^2$ O momento magnético tem amplitude:

$$\sqrt{\langle \mu^2 \rangle} = \frac{g\mu_b}{\hbar} \sqrt{\langle L^2 \rangle} = g\mu_b \sqrt{\ell(\ell + 1)}$$

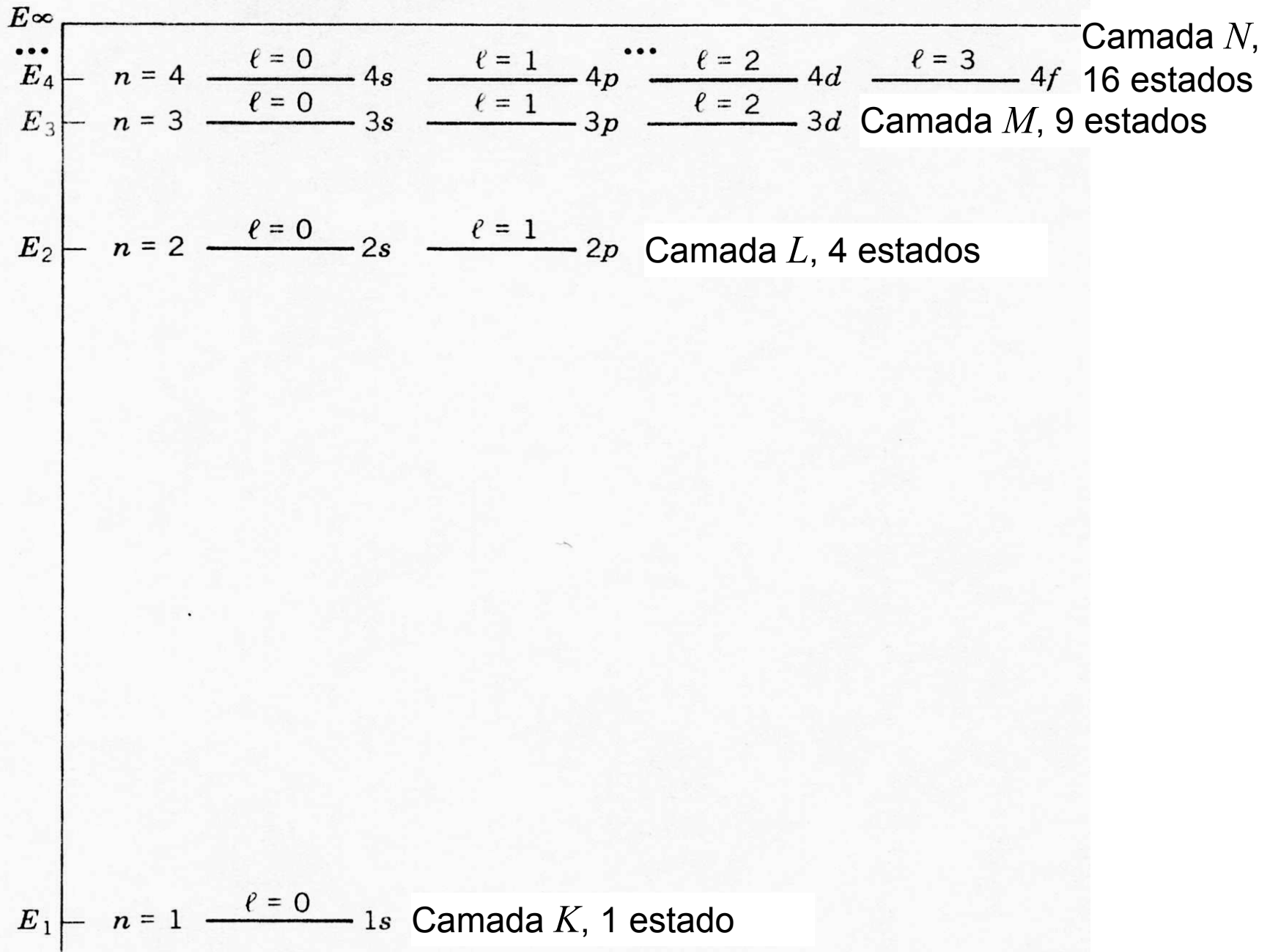
A componente z de $\mathbf{L}$ é dada por:

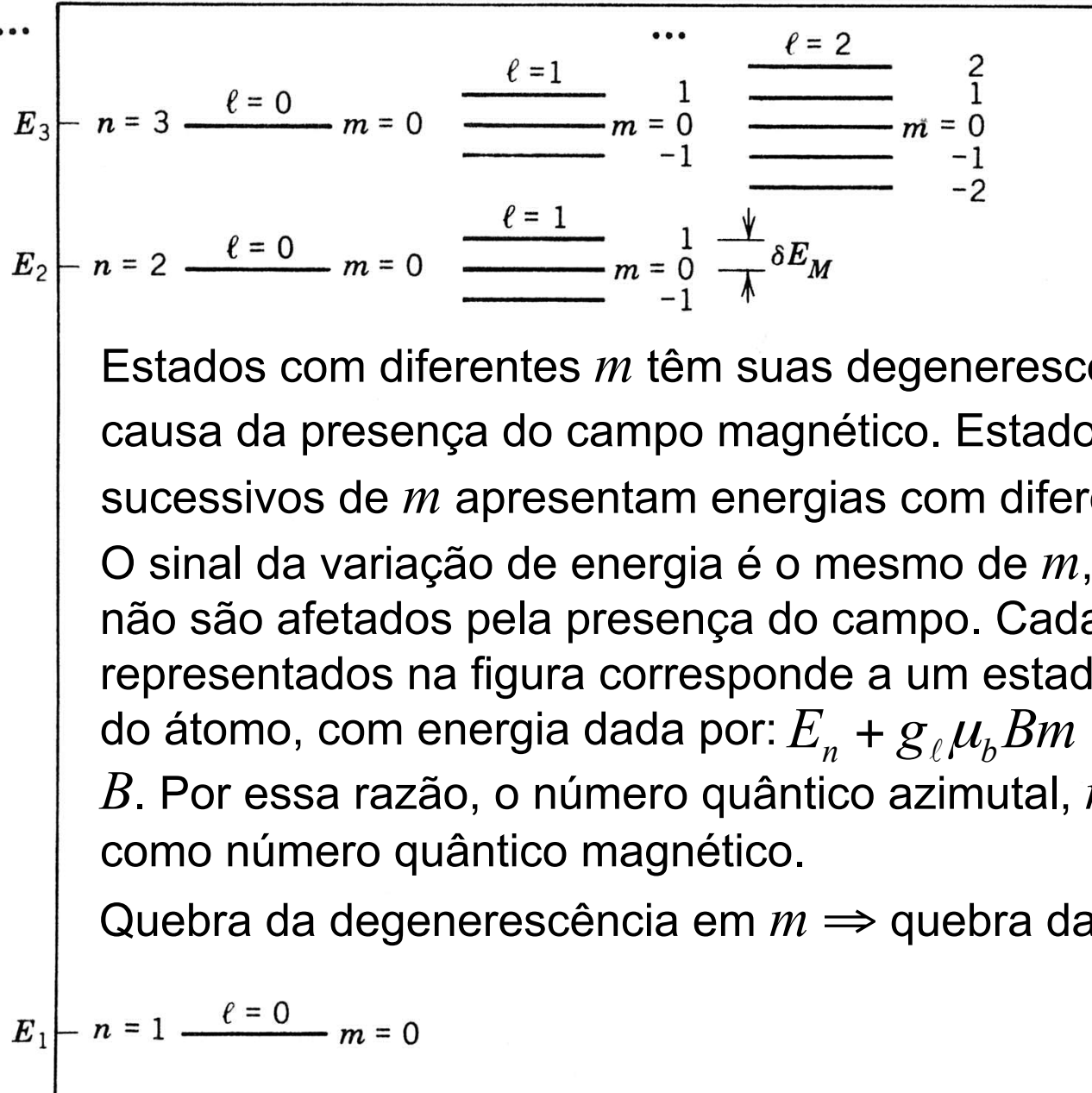
$$\langle L_z \rangle = m\hbar \Rightarrow \langle \mu_z \rangle = -\frac{g\mu_b}{\hbar} \langle L_z \rangle = -g\mu_b m$$

Se aplicamos um campo magnético constante, ele passa a definir uma direção privilegiada no espaço, que podemos escolher como o eixo z . A energia de interação com o campo é dada por: $V_M = -\mu_z B \Rightarrow \langle V_M \rangle = -\langle \mu_z \rangle B = g\mu_b B m$

A quantidade $\langle V_M \rangle$ representa a energia adicional adquirida pelo átomo no estado $\Psi_{n\ell m}$ devido à presença do campo aplicado.

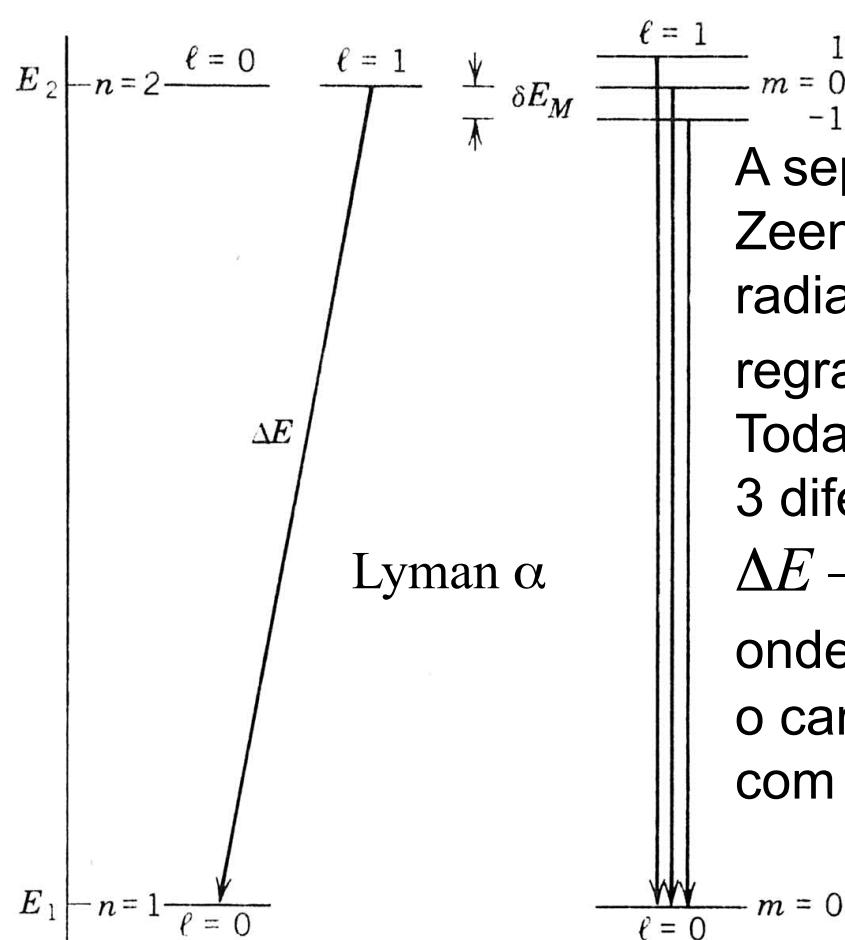
Essa energia depende do valor de m e da intensidade do campo.





Estados com diferentes m têm suas degenerescências quebradas por causa da presença do campo magnético. Estados $(n\ell)$ com valores sucessivos de m apresentam energias com diferenças de: $\delta E_M = g_\ell \mu_b B$. O sinal da variação de energia é o mesmo de m , e os estados com $m = 0$ não são afetados pela presença do campo. Cada um dos níveis representados na figura corresponde a um estado de precessão diferente do átomo, com energia dada por: $E_n + g_\ell \mu_b B m$ na presença do campo B . Por essa razão, o número quântico azimutal, m , é também conhecido como número quântico magnético.

Quebra da degenerescência em $m \Rightarrow$ quebra da simetria rotacional



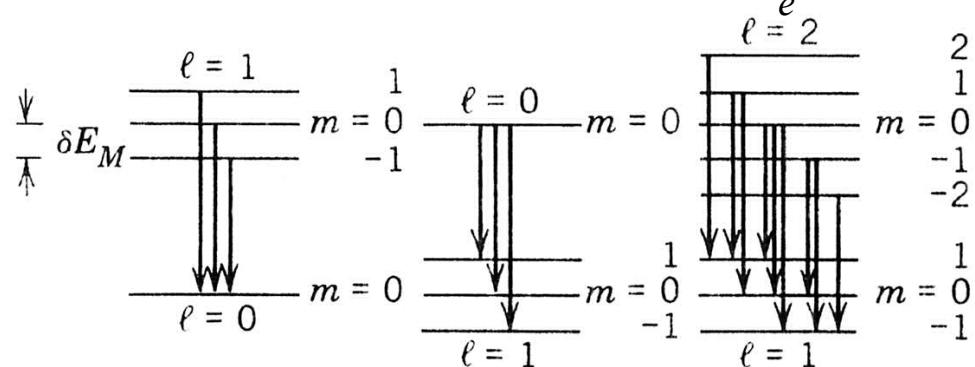
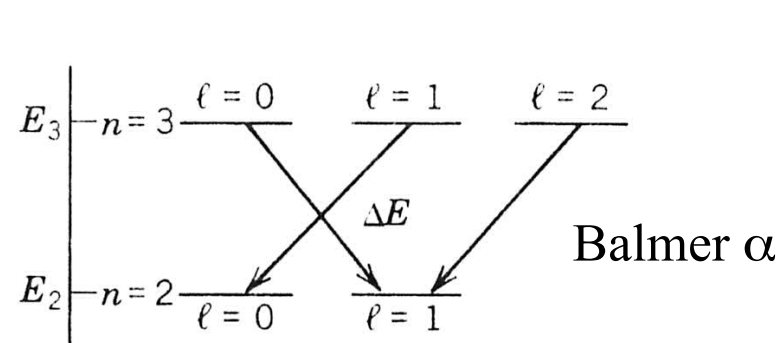
A separação dos níveis provocada pelo efeito Zeeman produz mudanças na frequência da radiação emitida pelo átomo nas transições $\Rightarrow$ regras de seleção: $\Delta\ell = \pm 1$ e $\Delta m = 0$ ou ± 1 . Todas as transições indicadas envolvem apenas 3 diferentes energias de fótons emitidos:

$$\Delta E - \delta E_M; \Delta E; \text{ e } \Delta E + \delta E_M$$

onde ΔE representa a energia de transição sem o campo aplicado. Aparece então um tripleto, com variação de frequência dada por:

$$\delta\nu = \frac{\delta E_M}{h} = \frac{g\mu_b B}{2\pi\hbar} = \frac{eB}{4\pi m_e}$$

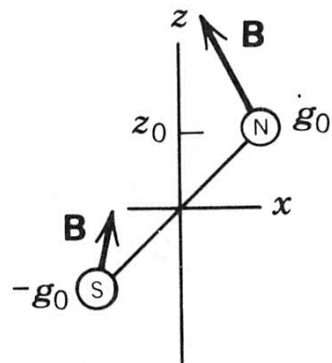
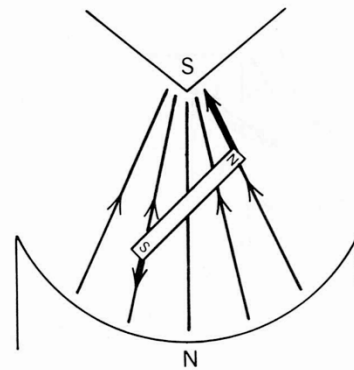
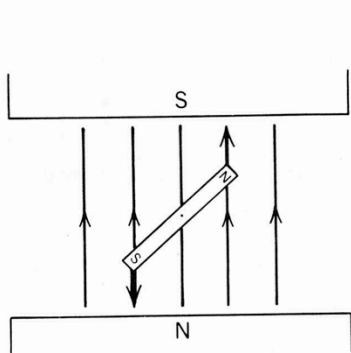
Resultado clássico!



Em 1920 já se sabia que havia separação das linhas espectrais mesmo sem a presença de campos magnéticos externos (estrutura fina). Fenômeno então atribuído a processos internos ao átomo: “caroço magnético” responsável por produzir campo e interagir com os elétrons mais externos.

1922: experiência de Stern&Gerlach

Vamos imaginar que temos um feixe de pequenos ímãs, que atravessam uma região com campo magnético, como ilustrado na figura abaixo:



A componente z do campo, na posição dos polos N e S, pode ser escrita, em 1ª ordem, como:

$$B_z(N) = B_{z0} + z_0 \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad \text{e} \quad B_z(S) = B_{z0} - z_0 \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

onde B_{z0} e $\partial B_z / \partial z$ são, respectivamente, os valores do campo e de seu gradiente sobre o eixo do dipolo. Se considerarmos que os polos (hipotéticos) têm intensidades $\pm g_0$, a força pode ser escrita como:

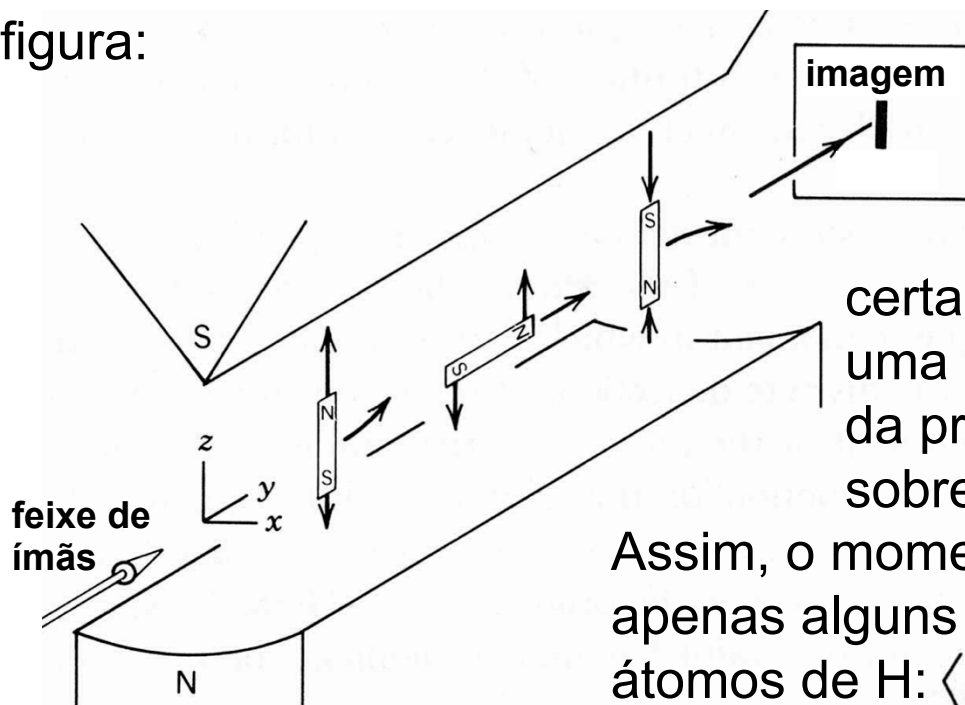
$$F_z = g_0 B_z(N) - g_0 B_z(S) = 2g_0 z_0 \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$= \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

4300376
Aula 2

Força depende de μ_z !

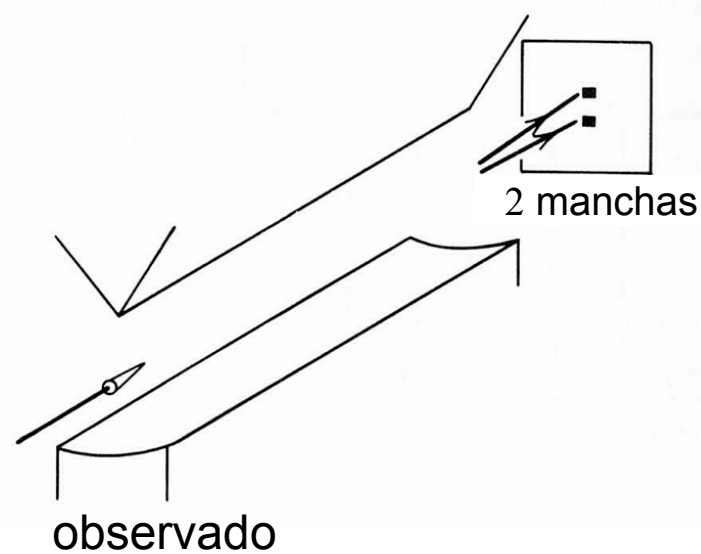
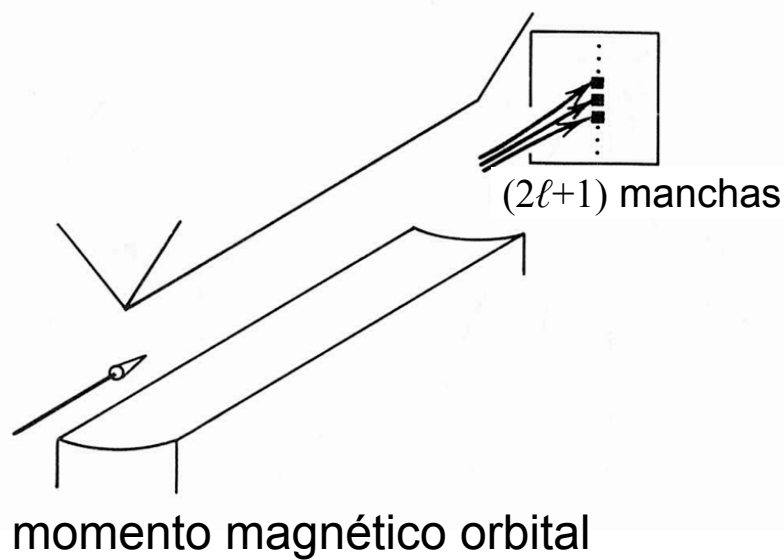
Essa é a força responsável pela deflexão vertical do feixe, dependendo do sinal de μ_z . Classicamente, μ_z varia continuamente, por conta da orientação aleatória dos ímãs. Isso deve resultar numa imagem contínua, conforme a figura:



Resultados muito diferentes são obtidos se substituirmos o feixe de ímãs por um feixe de átomos, pois, nesse caso, cada átomo tem uma certa probabilidade de ser encontrado com uma certa orientação, definida pelo valor da projeção de seu momento angular sobre o eixo z .

Assim, o momento de dipolo magnético, μ_z , pode ter apenas alguns valores. No caso de um feixe de átomos de H: $\langle \mu_z \rangle = -g\mu_B m$ com $m = -\ell, \dots, \ell$

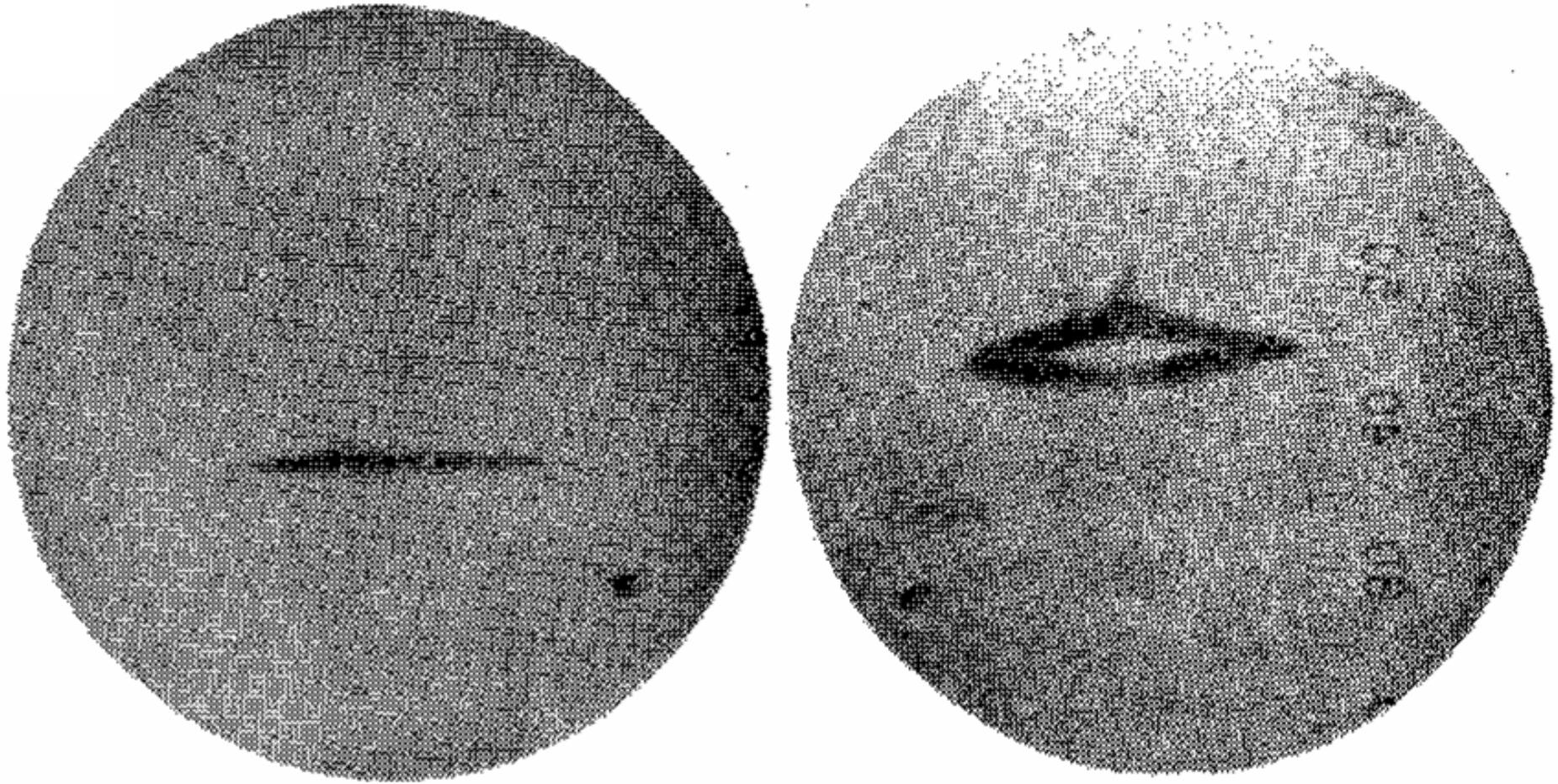
Assim, diferentes valores de μ_z vão sofrer forças distintas e deflexões diferentes, conforme ilustrado na figura abaixo:



O experimento original de Stern&Gerlach usou um feixe de átomos neutros de Ag, obtidos por evaporação em um forno. Depois de atravessarem o campo eles eram depositados em uma placa de vidro. [\(Episódio do charuto, PT56v12\(2003\)53\)](#). Resultado observado concordava com o que se esperava pelo modelo do “caroço magnético” para a Ag. No entanto, um experimento análogo feito com átomos de H – para os quais não era esperada deflexão – obteve os mesmos resultados. O “caroço magnético” não podia explicar esses resultados, pois, no H, o “caroço” é só o núcleo, cujo momento magnético é 3 ordens de grandeza menor que o do elétron.

$$\mu_b = \frac{e\hbar}{2m_e} \Rightarrow m_e \leftrightarrow m_p \Rightarrow \mu_e \gg \mu_p$$

Resultados de Stern & Gerlach



1924: Pauli sugere que as estruturas dos multipletos e as anomalias no efeito Zeeman poderiam ser explicadas se um novo grau de liberdade, formal, com 2 valores, fosse associado ao elétron.

Goudsmit e Uhlenbeck (estudantes de pós, ver Eisberg, pág. 356) propõem uma variável, quantizada, com 2 valores, com propriedades de momento angular.

Eles supuseram um movimento de rotação do elétron em torno de seu próprio eixo (como a Terra: gira em torno do Sol e de seu próprio eixo).

Analogia com o momento angular orbital $\Rightarrow \begin{cases} L^2 \rightarrow \hbar^2 \ell(\ell + 1) & \text{e} & L_z \rightarrow \hbar m_\ell \\ S^2 \rightarrow \hbar^2 s(s + 1) & \text{e} & S_z \rightarrow \hbar m_s. \end{cases}$

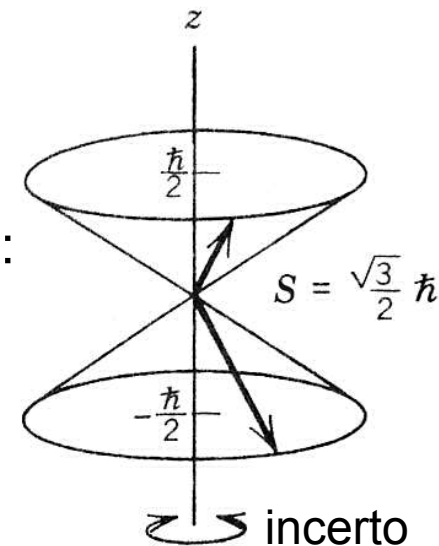
$S_z = \hbar m_s$ com $m_s = -s, \dots, s$ e foram observadas 2 manchas $\Rightarrow$ 2 valores de m_s . Como $\Delta m_s = 1 \Rightarrow m_s = \pm \frac{1}{2}$. Assim, o momento angular de spin é dado:

$$S_z = \hbar m_s = \pm \frac{\hbar}{2} \quad \text{e} \quad S^2 = \hbar^2 s(s + 1) = \frac{3}{4} \hbar^2$$

Temos também o aparecimento de um momento de dipolo magnético devido ao momento angular de spin:

$$\vec{\mu}_s = -\frac{g_s \mu_b}{\hbar} \vec{S} \quad \text{e} \quad \mu_{s_z} = -g_s \mu_b m_s$$

com $g_s = 2$



Um estado estacionário de um átomo monoelétrônico é descrito por um conjunto de 4 números quânticos:

$$\Psi_{n\ell m_\ell m_s} = R_{n\ell}(r) Y_{\ell m_\ell}(\theta, \phi) e^{-iE_n t/\hbar} (\uparrow \text{ ou } \downarrow)$$

EXEMPLO 8-2

Um feixe de átomos de hidrogênio, emitido por um forno funcionando à temperatura $T = 400 \text{ K}$, é enviado através de um ímã de Stern-Gerlach de comprimento $X = 1 \text{ m}$. Os átomos estão sujeitos a um campo magnético com um gradiente de 10 tesla/m . Calcule a deflexão transversa de um átomo típico em cada uma das duas componentes do feixe, devido à força exercida sobre seu momento de dipolo magnético de spin, no ponto onde o feixe sai do ímã.

Nessa temperatura, os átomos estão no estado fundamental e não têm momento angular orbital ou momento de dipolo magnético orbital. Eles têm, tipicamente, energia cinética $(3/2)kT$, onde k é a constante de Boltzmann. Eles são submetidos a uma força transversa dada por (8-15) e (8-20)

$$F_z = - \frac{\partial B_z}{\partial z} \mu_B g_s m_s$$

Como $g_s m_s = \pm 1$, teremos

$$F_z = \pm \frac{\partial B_z}{\partial z} \mu_B$$

A velocidade longitudinal típica v_x de um átomo de massa M atravessando o ímã pode ser determinada escrevendo

$$\frac{1}{2} M v_x^2 = \frac{3}{2} kT$$

Então

$$v_x = \sqrt{\frac{3kT}{M}}$$

O tempo t durante o qual o átomo está sujeito à força transversa ao atravessar o ímã de comprimento X será

$$t = \frac{X}{v_x} = \frac{X}{\sqrt{\frac{3kT}{M}}} = X \sqrt{\frac{M}{3kT}}$$

Em consequência da força eles adquirem uma aceleração transversa $a_z = F_z/M$, e sofrem portanto uma deflexão

$$Z = \frac{1}{2} a_z t^2 = \frac{1}{2} \frac{F_z}{M} \frac{X^2 M}{3kT}$$

$$= \pm \frac{\frac{\partial B_z}{\partial z} \mu_b X^2}{6kT}$$

$$= \pm \frac{10 \text{ tesla/m} \times 0,927 \times 10^{-23} \text{ amp-m}^2 \times 1 \text{ m}^2}{6 \times 1,38 \times 10^{-23} \text{ joule/K} \times 400 \text{ K}}$$

$$= \pm 2,8 \times 10^{-3} \text{ m}$$

A distância que separa as duas componentes é maior do que meio centímetro e muito fácil, portanto, de ser observada. ▲

Spin – um efeito quântico-relativístico

