# Mecânica Quântica I - 4300403

## $2^{\underline{a}}$ lista

1) Prove os seguintes teoremas:
a) A função de onda independente do tempo $\psi(x)$ pode sempre ser tomada real. Isso não quer dizer que a equação de Shrödinger independente do tempo não admita soluções complexas, mas que se $\psi(x)$ complexa é solução de $H\psi = E\psi$, entao $\psi^*$ também o é, com a mesma energia e, portanto, $\psi + \psi^*$, que é real, também o é.
b) Se $V(x)$ é uma função par, então $\psi(x)$ pode sempre ser tomada como uma função de paridade bem definida. Dica: Se $\psi(x)$ é solução de $H\psi = E\psi$, entao $\psi(-x)$ também o é, com a mesma energia e, portanto, uma combinação linear delas, também o é.

2) Uma partícula no poço quadrado infinito ($V(x) = 0$ se $0 < x < a$) encontra-se, no instante $t = 0$, no estado $\psi(x, 0) = Ax(x - a)$.
a) Faça um esboço de $\psi(x, 0)$ e determine $A$.
b) Expanda $\psi(x, 0)$ nos auto-estados de $H$.
c) Qual é a probabilidade de se medir $E_1$ numa medida de energia?
d) Qual é o valor esperado da energia? Compare com $E_1$.
e) Calcule o valor esperado da energia diretamente pela equação :

$$\langle H \rangle = \int_0^a dx\ \psi(x, 0) H \psi^*(x, 0).$$

Veja que como $\langle H \rangle$ não dependen do tempo, usar $\psi(x, 0)$ na equação acima não acarreta em perda de generalidade. Compare com o resultado do ítem d).
e) Determine $\Psi(x, t)$.

3) Calcule $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle p^2 \rangle$, $\sigma_x$ e $\sigma_p$ para o n-ésimo estado estacionário do poço quadrado infinito. Cheque se o princípio da incerteza é obedecido. Qual estado tem incerteza mínima?

4) Uma partícula num poço quadrado infinito ($V(x) = 0$ se $0 < x < a$) encontra-se, no instante $t = 0$, em um estado descrito pela seguinte função de onda

$$\psi(x, 0) = A\left(\psi_1(x) + \psi_2(x)\right),$$

onde $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ são os autoestados normalizados de $H$, correspondentes aos autovalores de energia $E_1$ e $E_2$ respectivamente.
a) Determine a constante de normalização $A$. Lembre que os autoestados $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ são ortogonais.
b) Calcule $\psi(x, t)$ e $|\psi(x, t)|^2$ expressando o resultado em termos de senos e cosenos chamando $\omega = \pi^2\hbar/(2ma^2)$.
c) Calcule $\langle x \rangle$ e $\langle p \rangle$.
d) Calcule $\langle H \rangle$ e compare o resultado com $E_1$ e $E_2$. Se voce medir a energia da partícula que valores voce pode obter e com qual probabilidade?

5) Uma partícula num poço quadrado infinito encontra-se, no instante $t = 0$, em um estado descrito pela seguinte função de onda

$$\psi(x, 0) = \begin{cases} Ax, & 0 \le x \le a/2 \\ A(a - x) & a/2 \le x \le a \end{cases},$$

a) Normalize $\psi(x,0)$ e faça o gráfico de $\psi(x,0)$.
b) Determine $\psi(x,t)$.
c) Qual é a probabilidade de numa medida da energia voce obter $E_1$? Calcule o valor médio da energia.

6) Uma partícula num poço quadrado infinito (de largura $a$) encontra-se, no instante $t=0$, no lado esquerdo do poço, sendo que a probabilidade de ser encontrado desse lado é a mesma para qualquer ponto.
a) Determine $\psi(x,0)$ supondo-a real e normalizada.
b) Qual é a probabilidade de numa medida da energia voce obter $E_1$?

7) Uma partícula num poço quadrado infinito (de largura $a$) encontra-se, no instante $t=0$ no estado

$$\psi(x,0) = A\sin^3(\pi x/a), \quad (0 \leq x \leq a).$$

a) Determine $A$.
b) Determine $\psi(x,t)$.
c) Calcule $\langle x \rangle$ como função de $t$.
Dica: use a relação trigonométrica: $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$.