# Indutância e energia magnética

Mariana de Marchi e Guilherme Ventura
Professoras: Valéria Dias e Suzana Salem

# Exercícios

Resolução dos exercícios 2, 3 e 4

# Exercício 2

A resistência R no fio será:

$$R = \frac{\rho \cdot l}{s}$$

$$l = 2 \cdot \pi \cdot a \cdot n \cdot b$$

$$R = \frac{\rho \cdot 2 \cdot \pi \cdot a \cdot n \cdot b}{s}$$

# Exercício 3

O campo elétrico no interior do fio é:

$$E_V = \frac{V}{l} = \frac{V}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot n \cdot b}$$

# Exercício 4

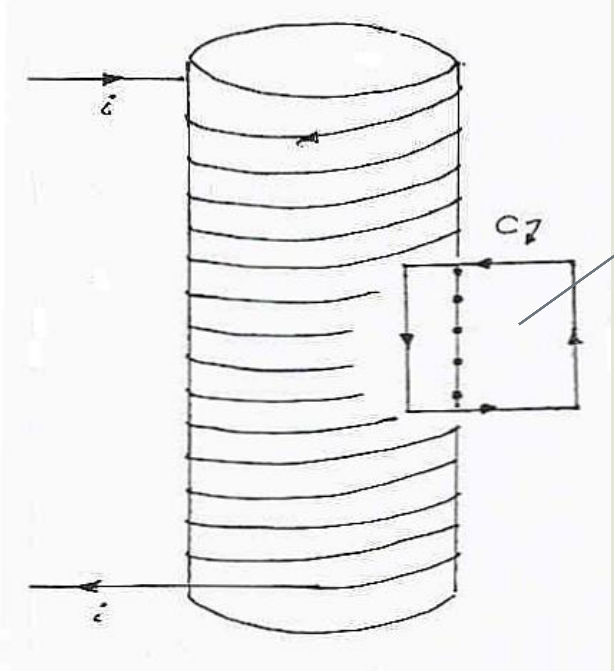
O campo magnético $\vec{B}(t)$ no interior do solenoide causado por uma corrente i(t) é:

$$\vec{B}(t) = -n \cdot \mu_0 \cdot i\ \hat{K}$$
$$\vec{B}(t) = -n \cdot \mu_0 \cdot i(t)\ \hat{K}$$

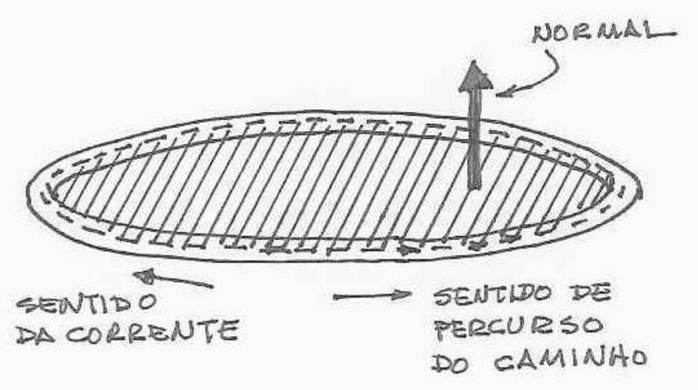
# Cálculo do fluxo de campo magnético

Cálculo do fluxo de $\frac{\delta \vec{B}}{\delta t}$ através de uma espira do solenoide num instante qualquer

# Cálculo do fluxo de campo magnético




Caminho matemático C utilizado (no interior do fio)




Superfície matemática S que foi apoiada sobre o caminho C, que está orientado de acordo com $\hat{n}$

$\vec{B}$ dentro do solenoide é orientado para baixo. Se $I(t)$ aumenta, $\frac{\delta \vec{B}}{\delta t}$ também aponta para baixo. Logo, $\frac{\delta \vec{B}}{\delta t} . \hat{n} = -\frac{\delta \vec{B}}{\delta t}$

# Cálculo do fluxo de campo magnético

Logo, o fluxo de $\frac{\delta \vec{B}}{\delta t}$ sobre a superfície dada será:

$$\Phi_{\frac{\delta B}{\delta t}} = -\iint \frac{\delta B}{\delta t}\, .dS$$

Como $\frac{\delta \vec{B}}{\delta t}$ é constante sobre a superfície,

$$\Phi_{\frac{\delta B}{\delta t}} = -\frac{\delta B}{\delta t} \int dS = -\frac{\delta B}{\delta t}\, \pi a^2$$

Como $\vec{B} = -n\mu_0 I(t)\, \vec{k}$, podemos escrever

$$\Phi_{\frac{\delta B}{\delta t}} = -\frac{d}{dt}\big(n\mu_0 I(t)\big)\pi a^2 = -n\mu_0 \pi a^2 \frac{dI}{dt}$$

# Exercícios

Resolução dos exercícios 5, 6, 7 e 9

# Exercício 5: Campo elétrico induzido

Da Lei de Faraday, temos:

$$\oint \vec{E}.d\vec{l} = -\Phi\frac{\delta B}{\delta t}$$

Mas $\Phi_{\frac{\delta B}{\delta t}} = -\pi a^2 n\mu_0\frac{dI}{dt}$. Então:

$$\oint \vec{E}.d\vec{l} = -\left(-\pi a^2 n\mu_0\frac{dI}{dt}\right)$$

$$E_i \oint dl = \pi a^2 n\mu_0\frac{dI}{dt}$$

$$E_i \cdot 2 \cdot \cancel{\pi} \cdot \cancel{a} = \cancel{\pi} \cdot a^{\cancel{2}} \cdot n\mu_0\frac{dI}{dt}$$

$$E_i = \frac{an\mu_0}{2}\frac{dI}{dt}$$

# Exercício 6: Campo elétrico total no fio

$Se$

$$E_V = \frac{V}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot n \cdot b}$$

$$e$$

$$E_i = \frac{an\mu_0}{2}\frac{dI}{dt}$$

sendo que o campo elétrico induzido age no sentido oposto ao campo elétrico da bateria. Assim:

$$\vec{E} = \overrightarrow{E_V} + \overrightarrow{E_i}$$

$$E = E_V - E_i = \frac{V}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot n \cdot b} - \frac{an\mu_0}{2}\frac{dI}{dt}$$

# Exercício 7: mostre que $I = \frac{s}{\rho}\left[\frac{V}{l} - \frac{n\mu_0 a}{2}\frac{dI}{dt}\right]$

$Se$

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E}$$

$$I = js$$

$$E = E_V - E_i = \frac{V}{l} - \frac{an\mu_0}{2}\frac{dI}{dt}$$

Temos:

$$I = js = \frac{E}{\rho} \cdot s = \frac{s}{\rho} \cdot \left(\frac{V}{l} - \frac{an\mu_0}{2}\frac{dI}{dt}\right)$$

# Resolução da equação diferencial da corrente

Resolução da equação diferencial $I = \frac{s}{\rho}\left[\frac{V}{l} - \frac{n\mu_0 a}{2}\frac{dI}{dt}\right]$, que nos dará a formulação final de $I(t)$

# Resolução da equação diferencial da corrente

Considerando que $R = \frac{\rho l}{s}$, a equação $I = \frac{s}{\rho}\left[\frac{V}{l} - \frac{n\mu_0 a}{2}\frac{dI}{dt}\right]$ pode ser reescrita como

$$I = s.\frac{l}{sR}\left[\frac{V}{l} - \frac{n\mu_0 a}{2}\frac{dI}{dt}\right] = \frac{l}{R}.\frac{V}{l} - \frac{ln\mu_0 a}{2R}\frac{dI}{dt} = \frac{V}{R} - \boxed{\frac{ln\mu_0 a}{2R}}\frac{dI}{dt}$$

Tomamos aqui $\beta = \frac{2R}{ln\mu_0 a}$

Assim, a equação fica

$$I = \frac{V}{R} - \frac{1}{\beta}\frac{dI}{dt}$$

# Resolução da equação diferencial da corrente

Podemos reescrever a equação da seguinte forma:

$$I = \frac{V}{R} - \frac{1}{\beta}\frac{dI}{dt} \rightarrow I - \frac{V}{R} = -\frac{1}{\beta}\frac{dI}{dt}$$

$$\frac{1}{\beta}\frac{dI}{dt} = \frac{V}{R} - I \rightarrow \frac{dI}{dt} = \beta \boxed{\left[\frac{V}{R} - I\right]}$$

Definiremos aqui mais uma variável:

$$Y \equiv \frac{V}{R} - I$$

# Resolução da equação diferencial da corrente

Assim

$$\frac{dY}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{V}{R}\right) - \frac{dI}{dt} \rightarrow \frac{dY}{dt} = -\frac{dI}{dt} \rightarrow dY = -dI$$

Dado que

$$\frac{dI}{dt} = \beta\left[\frac{V}{R} - I\right] \rightarrow \frac{1}{\boxed{\left[\frac{V}{R} - I\right]}}\frac{dI}{dt} = \beta$$

$$Y \equiv \frac{V}{R} - I$$

Logo, teremos

$$\frac{1}{Y}\frac{dI}{dt} = \beta$$

# Resolução da equação diferencial da corrente

Tomando a equação anterior teremos

$$\frac{1}{Y}\frac{dI}{dt} = \beta \;\rightarrow\; -\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt} = \beta \;\rightarrow\; -\int \frac{1}{Y}\frac{dY}{dt}\,dt = \int \beta\,dt$$

$$-\int \frac{1}{Y}dY = \int \beta\,dt \;\rightarrow\; \ln Y = -\beta t + \boxed{\gamma}$$

Constante arbitrária

Logo,

$$e^{-\beta t+\gamma} = Y \;\rightarrow\; Y = \gamma\, e^{-\beta t}$$

Como $Y \equiv \frac{V}{R} - I$ ,

$$\frac{V}{R} - I = \gamma\, e^{-\beta t} \;\rightarrow\; I(t) = \frac{V}{R} - \gamma\, e^{-\beta t}$$

# Resolução da equação diferencial da corrente

Para definirmos $\gamma$, precisamos tomar as condições iniciais.
Como $I(0) = 0$, temos

$$I(0) = \frac{V}{R} - \gamma e^{0} = \frac{V}{R} - \gamma$$

$$\frac{V}{R} - \gamma = 0 \quad \rightarrow \quad \gamma = \frac{V}{R}$$

Assim,

$$I(t) = \frac{V}{R} - \gamma\, e^{-\beta t} = \frac{V}{R} - \frac{V}{R} e^{-\beta t}$$

$$I(t) = \frac{V}{R}(1 - e^{-\beta t})$$

# Exercício 9: Energia fornecida pela bateria

$$
\begin{aligned}
E_V &= \int_0^T P_V(t) = \int_0^T VI(t)dt \\
&= \int_0^T V\frac{V}{R}(1-e^{-\beta t})dt \\
&= \frac{V^2}{R}\left[t+\frac{e^{-\beta t}}{\beta}\Big|_0^T\right] \\
&= \frac{V^2}{R}\left[T+\frac{e^{-\beta T}}{\beta}-\frac{1}{\beta}\right]
\end{aligned}
$$

# Exercício 10: Energia dissipada pelo resistor

$$P_R(t) = R\, I(t)^2$$

$$\begin{aligned}
E_R &= \int_0^T P_R(t)dt = \int_0^T R\frac{V^2}{R^2}\left(1-e^{-\beta t}\right)^2 dt \\
&= \frac{V^2}{R}\left[ t + \frac{2}{\beta}e^{-\beta t} - \frac{e^{-2\beta t}}{2\beta}\Bigg|_0^T \right] \\
&= \frac{V^2}{R}\left[ T + \frac{2}{\beta}e^{-\beta T} - \frac{e^{-2\beta T}}{2\beta} - \frac{3}{2\beta} \right]
\end{aligned}$$

# Exercício 11: Balanço energético

$$\begin{aligned} E_V - E_R &= \frac{V^2}{R}\left[-\frac{e^{-\beta T}}{\beta} + \frac{e^{-2\beta T}}{2\beta} + \frac{1}{2\beta}\right] \\ &= \frac{V^2}{R}\,\frac{1}{2\beta}\left[1 - 2e^{-\beta T} + e^{-2\beta T}\right] \\ &= \frac{V^2}{R}\,\frac{1}{2\beta}\left(1 - e^{-\beta T}\right)^2 \end{aligned}$$

# Exercício 13: Densidade volumétrica de energia magnética

Derivando-se a expressão da diferença da energia pelo volume, temos:

$$\varepsilon_B = \frac{1}{2\mu_0}[\pi a^2 h]B^2 = \frac{1}{2\mu_0}V \cdot B^2$$

$$\varepsilon_B = \frac{1}{2\mu_0}V \cdot B^2$$

$$\frac{d\varepsilon_B}{dV} = \frac{1}{2\mu_0}B^2$$