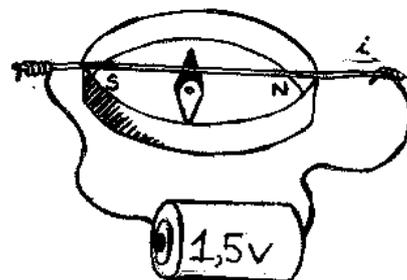




Indutância e energia magnética

Ainda no ano de 1820, cientistas acreditavam que fenômenos elétricos e magnéticos poderiam estar relacionados, embora ainda não soubessem exatamente qual era essa relação. Foi então que o físico Hans Christian Oersted realizou um experimento que mostrava os efeitos da corrente elétrica sobre a agulha imantada de uma bússola.

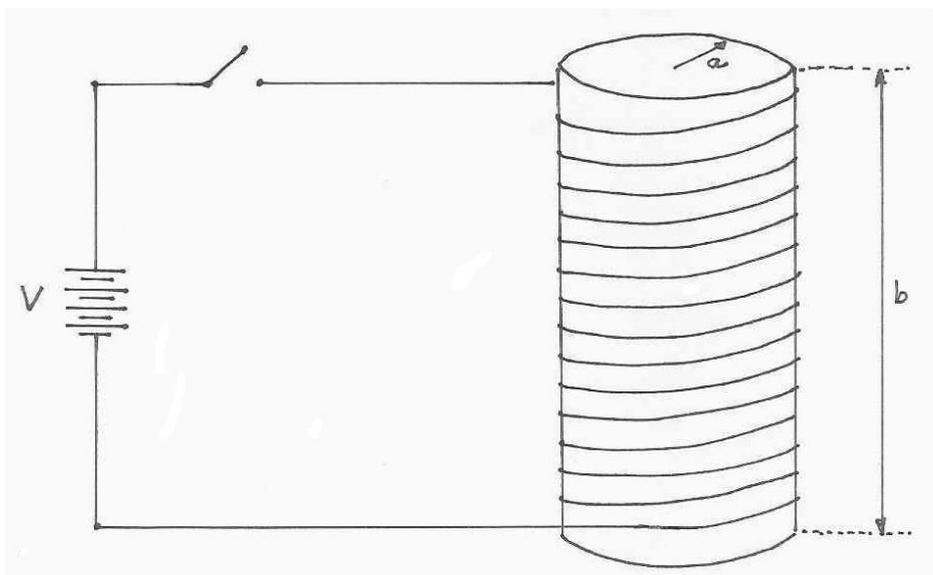


No roteiro anterior, refletimos acerca das conclusões obtidas a partir do conhecido “Experimento de Oersted”, em que a direção para qual a agulha de uma bússola aponta é alterada devido à presença de uma corrente elétrica.

Exercício 1:

Considere um condutor pelo qual passa uma corrente que varia com o tempo, como no experimento de Oersted discutido na aula anterior. Analise esse fenômeno em termos dos campos elétrico e magnético.

Hoje pretendemos estudar com mais cuidado o que ocorre dentro de um solenoide cilíndrico, como o ilustrado a seguir



Considere o raio do solenoide igual a a , sua altura total igual a b e com a quantidade n de espiras por unidade de comprimento. O solenoide é feito por um fio condutor de resistividade ρ , comprimento l e seção transversal s . Ele recebe da fonte uma tensão constante V . Considere que o instante $t = 0$ corresponde ao momento em que o interruptor é ligado.

Exercício 2

Considere desprezíveis as partes dos fios que ligam o solenoide à bateria e calcule a resistência R do fio.

Exercício 3

Calcule o campo elétrico \vec{E}_V que existe no interior do fio pelo fato de ele estar ligado à bateria.

Exercício 4

Calcule o campo magnético \vec{B} no interior do solenoide, num instante qualquer, em função da corrente $i(t)$.



Exercício 5

Considerando o resultado apresentado pelos colegas a respeito do fluxo do campo magnético, ou seja, considerando que $\Phi_{\frac{\delta B}{\delta t}} = -\pi a^2 n \mu_0 \frac{dI}{dt}$ e a Lei de Faraday, que implica que $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\Phi \frac{\delta B}{\delta t}$, calcule o campo elétrico \vec{E}_I induzido no fio dessa espira pela variação temporal do campo magnético.

Exercício 6

Utilizando os resultados anteriores, encontre o campo elétrico total \vec{E} no interior da espira, em um instante qualquer.

Exercício 7

Considerando que a lei de Ohm microscópica nos dá que $\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$ e que $I = js$, mostre que, para o solenoide em questão, $I = \frac{s}{\rho} \left[\frac{V}{l} - \frac{n\mu_0 a}{2} \frac{dI}{dt} \right]$.

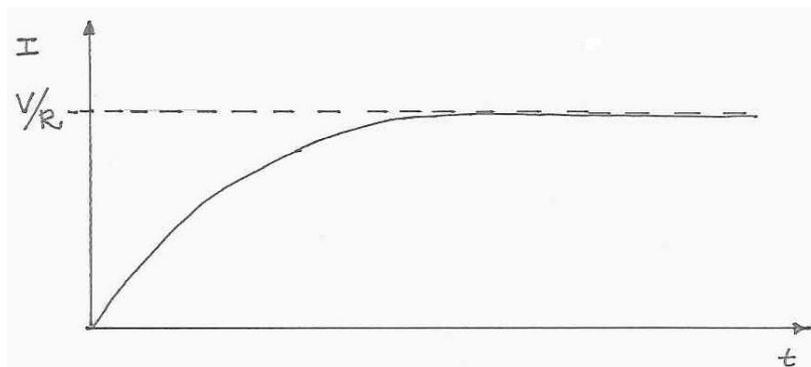
A equação diferencial acima encontra-se resolvida nos slides. A solução encontrada é a seguinte:

$$I(t) = \frac{V}{R} [1 - e^{-\beta t}]$$

Sendo

$$\beta = \frac{2R}{\mu_0 n a l}$$

A variação da corrente no tempo pode ser ilustrada pelo gráfico abaixo:



Exercício 8

A partir das informações apresentadas, responda as questões a seguir:

- A corrente depende do campo elétrico induzido?
- A corrente depende da configuração geométrica do sistema?
- Qual é o valor atingido pela corrente após bastante tempo?
- Qual é o sentido físico de β ?



Um aspecto muito importante que podemos obter a partir deste tipo de sistema é que, a partir do instante em que a chave é fechada, o campo elétrico \vec{E}_V , existente devido à bateria, causa uma força sobre os elétrons livres do condutor, fazendo com que eles se movam. Entretanto, ocorrendo esse movimento, passa a existir um campo magnético \vec{B} . Ou seja, a ligação da chave acarreta, necessariamente, um $\frac{dB}{dt}$ não nulo, que dá origem a um campo elétrico induzido \vec{E}_I , que boicota o crescimento da corrente. Como consequência, a corrente demora para atingir o seu valor máximo, dado por $I = \frac{V}{R}$ onde V é a tensão da bateria e R a resistência do fio. Este encadeamento complexo de efeitos somente ocorre devido à ação da bateria, o que indica que é ela que fornece energia ao sistema. Passamos agora, a discutir o que acontece, ao longo do tempo, com essa energia fornecida pela bateria e como se dá o balanço energético do sistema.¹

Exercício 9

Calcule a energia fornecida pela bateria ao sistema, do instante $t = 0$ ao instante T .

Para tal, considere que: $P(t) = V I(t)$, $I(t) = I_0(1 - e^{-\beta t})$, $I_0 = \frac{V}{R}$ e $\beta = \frac{2R}{n\mu_0 al} = \frac{R}{L}$.

L é a autoindutância do sistema. Uma característica importante desta grandeza é que ela depende apenas das características geométricas do sistema, analogamente ao que acontece com a capacitância no caso elétrico.²

Exercício 10

Considere que uma parte da energia calculada acima seja dissipada por um resistor, por meio do efeito Joule. Calcule a energia dissipada por esse resistor no mesmo intervalo de tempo considerado no exercício 9, levando em conta que $P_R(t) = R I(t)^2$.

Exercício 11

Os resultados obtidos permitem-nos perceber que nem toda a energia fornecida pela bateria é dissipada pelo resistor. Calcule a diferença entre esses dois valores.

Considerando o resultado anterior e usando $\beta = R/L$, assim como as expressões encontradas para a corrente no fio em função do tempo e do campo magnético no interior do fio, na equação encontrada no exercício 11, podemos escrever

$$E_V - E_R = \frac{V^2}{R} \frac{L}{2R} \frac{R^2 I^2(T)}{V^2} = \frac{1}{2} L I(T)^2$$

Exercício 12

O valor encontrado é positivo ou negativo? O que isso significa?

Sabemos que $B = n\mu_0 I$ e que o comprimento do fio pode ser expresso como $l = nh2\pi a$. Assim sendo, podemos reescrever a diferença entre as energias como:

$$E_V - E_R = \frac{1}{2} \left[\frac{n\mu_0 al}{2} \right] \left[\frac{B}{n\mu_0} \right]^2 = \frac{1}{2\mu_0} \left[\frac{al}{2n} \right] B^2 = \frac{1}{2\mu_0} [\pi a^2 b] B^2$$

¹ Retirado e adaptado da Apostila de Física 3, página 342

² Retirado e adaptado da Apostila de Física 3, página 342



O fator $[\pi a^2 b]$ corresponde ao volume do interior do solenoide, que é a região ocupada pelo campo magnético. Por isso, podemos interpretar este resultado como indicado que a energia do solenoide está acumulada no campo magnético, e distribuída no interior do solenoide.³

Exercício 13

Utilizando os resultados anteriores, encontre a expressão correspondente à densidade volumétrica de energia magnética, ou seja, $\frac{dE_B}{dV}$, para esse solenoide.

Exercício 14

O resultado anterior é válido somente para o solenoide? Comente.

³ Retirado da Apostila de Física 3, página 344