Noções de Processos Estocásticos

Marcos Eugênio da Silva

1. Definição

Um processo estocástico é uma sequência de variáveis aleatórias no tempo: $\{X(t)\}_0^T$

2. Processo de Wiener ou Movimento Browniano

É um processo estocástico com as seguintes propriedades:

i) W(0)=0
ii) dW(t) é iid
iii) $dW(t) = \sqrt{dt}.\epsilon\,, \quad \epsilon \sim N(0,1)$
iv) $W(t)$ é contínuo e não derivável em nenhum ponto (só tem bicos!)
v) *VQ=dW(t).dW(t)=dt* . A Variação Quadrática (VQ) é não nula! Isso é consequência da Lei dos Grandes Números. Lembrar que a VQ de uma função determinista com derivada contínua é nula.
A VQ amostral, dada uma partição Π do intervalo [0,T], é definida como
$$VQ_\Pi = \sum_{j=0}^{m-1} \left(W(t_{j+1}) - W(t_j)\right)^2$$
A VQ é o limite de VQ_Π, quando $||\Pi|| \to 0$
vi) dW(t).dt=dt.dW(t)=dt.dt=0
vii) E(W(T)) = 0 ; Var(W(T)) = T ; VQ(W(T)) = T

3. Processo de Itô

Um processo de Itô segue a equação diferencial estocástica (EDE)

$$dX(t) = a\big(t, X(t)\big)dt + b\big(t, X(t)\big)dW(t) \Leftrightarrow$$

$$X(T) = X(0) + \int_0^T a\big(t, X(t)\big)dt + \int_0^T b\big(t, X(t)\big)dW(t)$$

onde a segunda integral do lado direito é uma integral de Itô.

4. Integral de Itô

a) Definição

Supondo convergência em quadrado médio, é possível definir-se a integral de Itô como o limite da série:

$$I(T) = \int_t^T f(u)dW(u) = \underset{n\to\infty}{\lim - ms} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})[W(t_i) - W(t_{i-1})]$$

tal que

$$\lim_{n\to\infty} \quad E\left(\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})[W(t_i) - W(t_{i-1})] - \int_t^T f(u)dW(u)\right)^2 = 0$$

onde W(t) é um movimento browniano e f(t) uma função de variância finita, $\Im_t$-mensurável e $\Im_t$-adaptada

Obs.: Os conceitos de convergência em estatística são:

i) Convergência em probabilidade: Seja a seqüência $\{X_T\}_{T=1}^{\infty}$, então X_T converge em probabilidade para c se e somente se
$\forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0 \; \exists N \;/\; \forall T \geq N \; P(|X_T - c| > \delta) < \varepsilon$

ii) Convergência em quadrado médio: Seja a seqüência $\{X_T\}_{T=1}^{\infty}$, então X_T converge em quadrado médio para c se e somente se
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \;/\; \forall T \geq N \; E(X_T - c)^2 < \varepsilon$

Convergência em quadrado médio implica convergência em probabilidade, mas a recíproca não é verdadeira, ou seja, a primeira é mais forte que a segunda.

b) Propriedades:

i) a integral de Itô é um martingal

$$E\left[\int_0^t f(u)dW(u) \mid \Im_s\right] = \int_0^s f(u)dW(u) \quad t > s$$

ii) Isometria de Itô

$$E\left[\left(\int_0^t f(u)dW(u)\right)^2\right] = E\left[\int_0^t f(u)^2 du\right]$$

iii) Variação Quadrática

Definição: Seja f(t) uma função definida para $0 \leq t \leq T$. A variação quadrática de f até o tempo T é

$$[f,f](T) := \lim_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{j=0}^{m-1} \left[f(t_{j+1}) - f(t_j)\right]^2 ,$$

onde $\Pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ e $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = T$

Assim , a variação quadrática da integral de Itô é

$$[I,I](t) = \int_0^t f^2(u)du$$

iv) para f(ω,t) e g(ω,t) ∈ V(0,T) e 0 ≤ s < t < T (V é a classe de funções de variância finita, $\Im_t$-mensurável e $\Im_t$-adaptada)

$$\int_s^T f\, dW(u) = \int_s^t f\, dW(u) + \int_t^T f\, dW(u)$$

$$\int_s^T (cf + g)\, dW(u) = c.\int_s^T f\, dW(u) + \int_s^T g\, dW(u) \text{ (c constante)}$$

$$E\left[\int_s^T f\,dW(u)\right] = 0$$

$\int_s^T f\,dW(u)$ é mensurável em $\Im_T$

obs.: Se (Ω, $\Im$, P) é um dado espaço de probabilidade, então uma função $Y:\Omega \to \Re^n$ é chamada de $\Im$-mensurável se $Y^{-1}(U) := \{\omega \in \Omega;\, Y(\omega) \in U\} \in \Im$ para todos os conjuntos abertos $U \subset \Re^n$ (isto é, para todos os conjuntos de Borel $U \subset \Re^n$)

c) Exemplo de Integral de Itô:

$$\int_0^T W(t)dW(t) = \frac{1}{2}W^2(T) - \frac{1}{2}T$$

Notar que é diferente do caso determinista:

$$\int_0^T X(t)dX(t) = \int_0^T X(t)X'(t)dt = \frac{1}{2}X^2(T)\,, X(0) = 0$$

5. Movimento Browniano Geométrico (MBG)

Black&Scholes supõem que o preço de uma ação sem dividendos segue um tipo especial de processo de Itô, conhecido como MBG:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

onde μ é o retorno esperado do ativo e σ é a volatilidade do retorno do ativo.

A solução dessa equação é

$$S(t) = S(0).exp\left[\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t)\right]$$

e S(t) segue uma distribuição lognormal.

Temos dois parâmetros nesta equação: retorno esperado (μ) e volatilidade (σ). A volatilidade é não observável e difícil de estimar, mas mesmo assim é mais fácil que estimar o retorno esperado, que depende da função utilidade dos agentes. Mas é possível simplificar o problema e reduzi-lo a apenas um parâmetro (volatilidade). Para isso B&S recorrem ao teorema de Girsanov, que estabelece as condições em que o processo

$$\widetilde{W}(t) = W(t) + \int_0^t \theta(u)du$$

também é um browniano numa medida de probabilidade $\tilde{P}$ equivalente a P (P é a medida de probabilidade empírica subjacente ao processo de S(t)) para uma certa função $\theta(t)$. A medida $\tilde{P}$ também é chamada de Medida Martingal Equivalente.

Neste caso

$\theta(t) = \frac{\mu - r}{\sigma} \implies d\widetilde{W}(t) = dW(t) + \frac{\mu - r}{\sigma} dt$

onde r é a taxa de juros livre de risco (suposta constante). $\theta(t)$ é conhecido como "preço do risco", pois mostra o excesso de retorno esperado sobre a taxa de juros sem risco necessário para compensar uma unidade adicional de risco. Fazendo as devidas substituições, mostra-se que

$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)d\widetilde{W}(t)$

Essa equação descreve a evolução do preço da ação, mas agora num mundo neutro ao risco, ou seja, num mundo em que o retorno esperado do ativo é igual à taxa de juros sem risco e com medida de probabilidade (neutra ao risco) $\tilde{P}$. A solução dessa EDE é semelhante à original, mas elimina-se a necessidade de estimar o retorno esperado do ativo, bastando estimar o parâmetro de volatilidade σ.
A solução é
$S(t) = S(0).exp\left[\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\widetilde{W}(t)\right]$
e S(t) segue uma distribuição lognormal, mas agora num mundo neutro ao risco.

No modelo B&S, o numerário associado à medida neutra ao risco é o processo de desconto

$D(t) = e^{-rt}$

e o processo do preço do ativo descontado, D(t).S(t), é uma integral de Itô, e portanto um martingal:

$d(D(t)S(t)) = \sigma D(t)S(t)d\widetilde{W}(t)$

6. Teoremas Fundamentais de Finanças

Teorema I: Um modelo de mercado tem uma medida de probabilidade neutra ao risco se, e somente se, ele não admite arbitragem.

Teorema II: Um modelo de mercado com medida neutra ao risco é completo se, e somente se, essa medida for única.

7. Lema de Itô

Seja $\{X(t)\}_0^T$ um processo de Itô. Seja f(t,X(t)) uma função de X(t) e do tempo com derivadas parciais $f_t(t,x)$, $f_x(t,x)$, $f_{xx}(t,x)$ definidas e contínuas. Seja W(t) um movimento browniano. Então, para todo $T \geq 0$, $\{f(t, X(t)\}_0^T$ também é um processo de Itô e vale a equação

$$f\big(T,X(T)\big)=f\big(0,X(0)\big)+\int_0^T f_t\big(t,X(t)\big)dt+\int_0^T a(t)f_x\big(t,X(t)\big)dt$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^T b^2(t)f_{xx}\big(t,X(t)\big)dt+\int_0^T b(t)f_x\big(t,X(t)\big)dW(t)$$

Informalmente

$$df=\left[f_t+a\big(t,X(t)\big)f_x+\frac{1}{2}b^2(t,X(t))f_{xx}\right]dt+b(t,X(t))f_x dW(t)$$

8. EDP de B&S

Aplicando o Lema de Itô na equação do MBG sob a medida neutra ao risco temos que qualquer derivativo f(t,S(t)) com as derivadas parciais acima definidas e contínuas segue o processo de Itô

$$df\big(t,S(t)\big)=\left[\frac{\partial f}{\partial t}+rS(t)\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right]dt+\sigma S(t)\frac{\partial f}{\partial S}d\widetilde{W}(t)$$

Juntando essa EDE com a EDE do preço do ativo, chega-se à equação

$$-\frac{\partial f}{\partial t}dt-\frac{1}{2}\sigma^2S^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}dt=-df\big(t,S(t)\big)+\frac{\partial f}{\partial S}dS(t)$$

O lado direito da equação acima a variação no valor de uma carteira Π composta de $\frac{\partial f}{\partial S}$ unidades do ativo compradas e uma unidade do derivativo vendida.

$$\Pi=-f+\frac{\partial f}{\partial S}S\Rightarrow$$
$$d\Pi=-df+\frac{\partial f}{\partial S}dS=-\frac{\partial f}{\partial t}dt-\frac{1}{2}\sigma^2S^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}dt$$

Essa carteira é livre de risco no intervalo dt, pois a única fonte de risco $\big(\widetilde{W}(t)\big)$ foi eliminada, e o seu retorno tem de ser igual à taxa de juros livre de risco

$$d\Pi=r\Pi dt\Rightarrow$$
$$-\frac{\partial f}{\partial t}-\frac{1}{2}\sigma^2S^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=r\left(-f+\frac{\partial f}{\partial S}S(t)\right)$$

Rearranjando, mostra-se que, na ausência de ganhos de arbitragem, a seguinte equação diferencial parcial (EDP) tem de valer para derivativos do tipo europeu:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial t}+rS(t)\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2(t)\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right]=rf(t,S(t))$$

Essa equação é conhecida como a EDP de B&S. A solução específica para cada derivativo vai depender das condições de contorno, particularmente do resultado do derivativo (*pay off*) no vencimento.

Exemplo: f(T) = Max(S(T)-X,0) para call e f(T)=Max(X-S(T),0) para put.

9. Teorema de Feynman-Kac

Esse teorema mostra que a solução da EDP acima é equivalente a calcular o valor presente de uma esperança condicional. Assim, o valor na data t de um derivativo f do tipo europeu é igual ao valor presente da esperança condicional do seu valor no vencimento no mundo neutro ao risco:

$f(t) = e^{-r(T-t)}\tilde{E}[f(T)|t\,]$

Para call europeia temos

$c(t) = e^{-r(T-t)}\tilde{E}[Max(S(T) - X, 0)|t\,]$

Para put europeia temos

$p(t) = e^{-r(T-t)}\tilde{E}[Max(X - S(T), 0)|t\,]$

10. Fórmulas de Black & Scholes para ativos sem dividendos

Resolvendo as equações acima para call e put europeias e usando as propriedades da distribuição lognormal prova-se que

$c(t) = S(t).N(d1) - X.e^{-r(T-t)}.N(d2)$

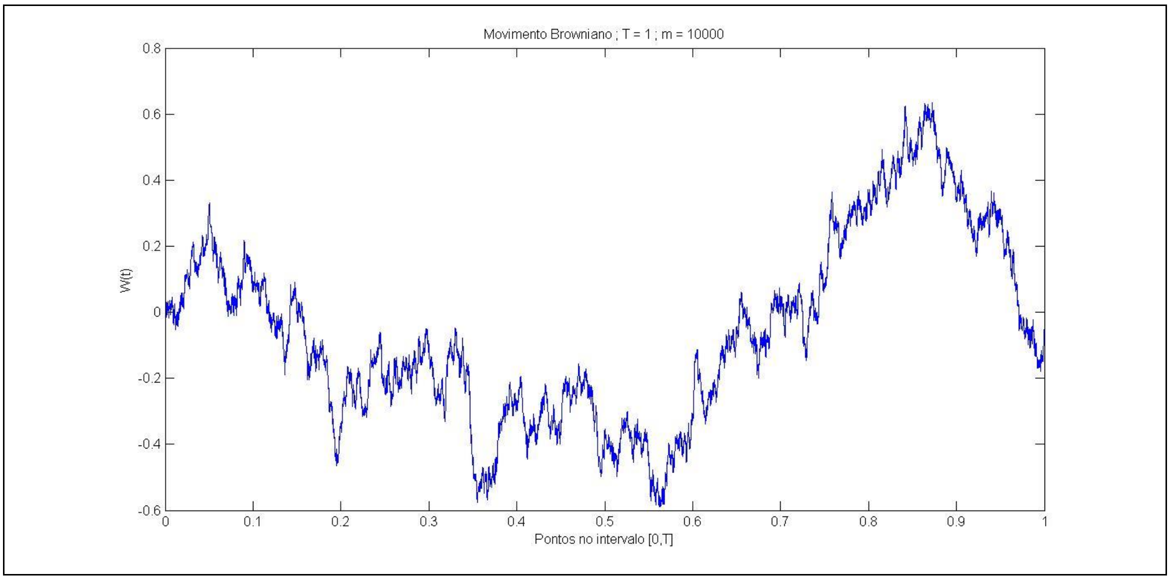
$p(t) = X.e^{-r(T-t)}.N(-d2) - S(t).N(-d1)$

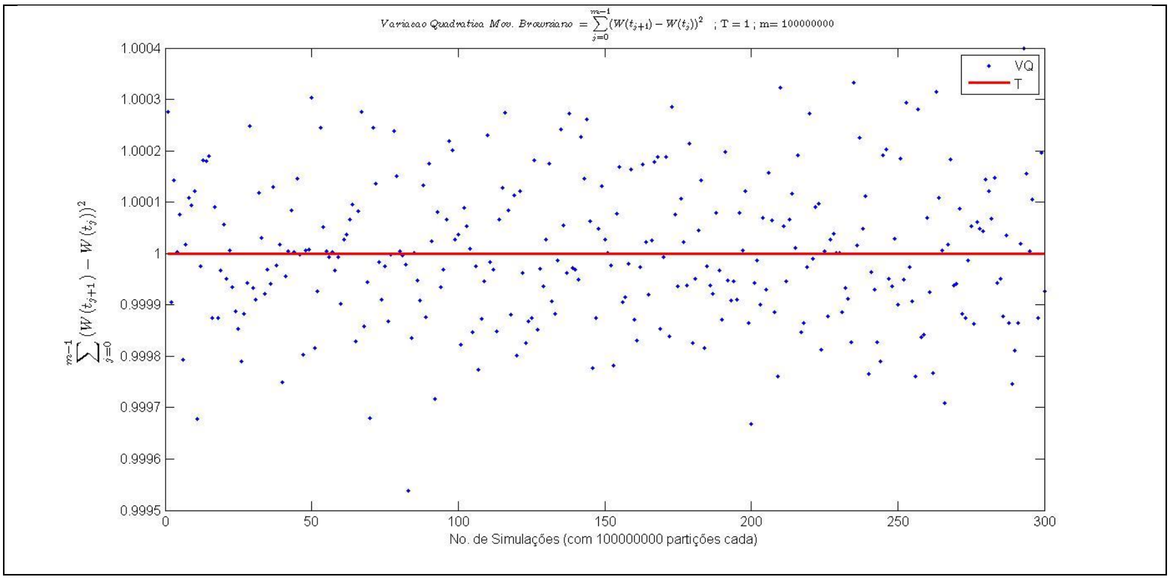
$$d1 = \frac{ln\frac{S(t)}{X} + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right).(T-t)}{\sigma.\sqrt{T-t}}$$

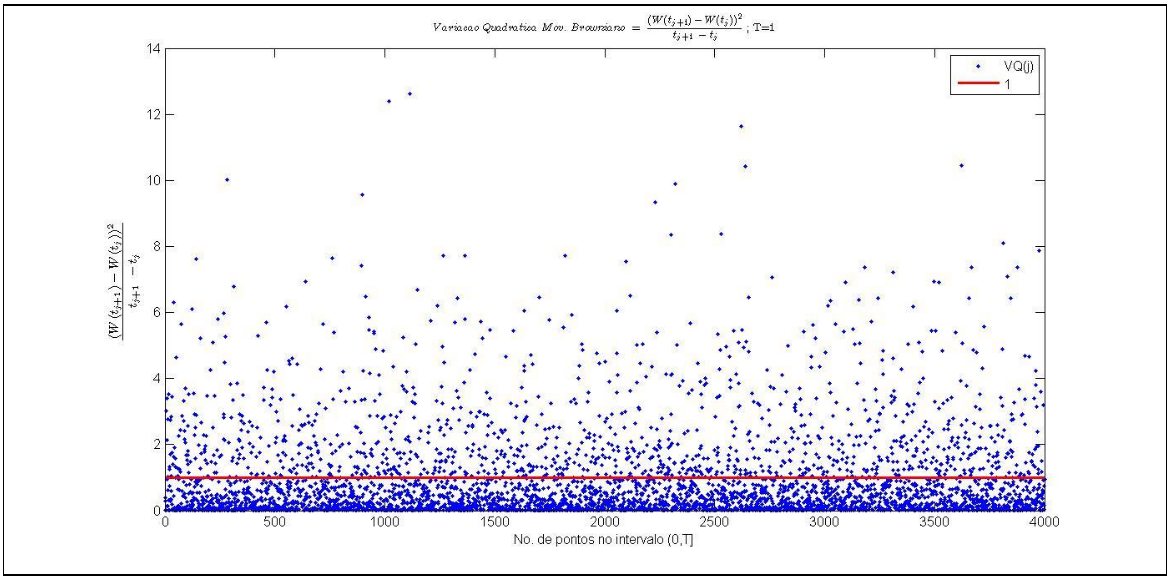
$d2 = d1 - \sigma.\sqrt{T-t}$

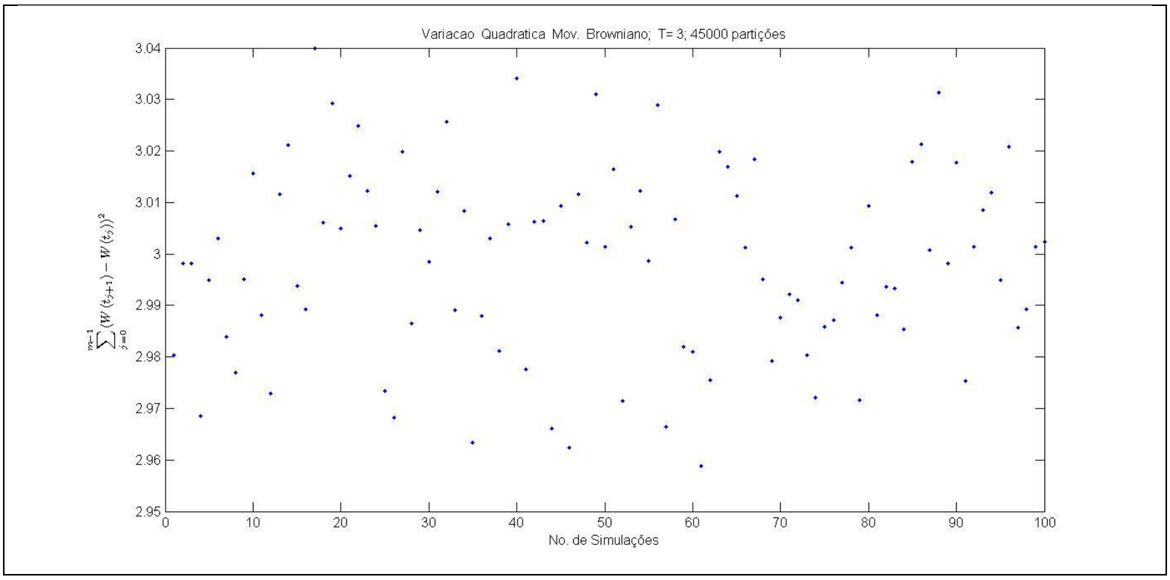
$$N(d) = \int_{-\infty}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{1}{2}x^2}dx$$

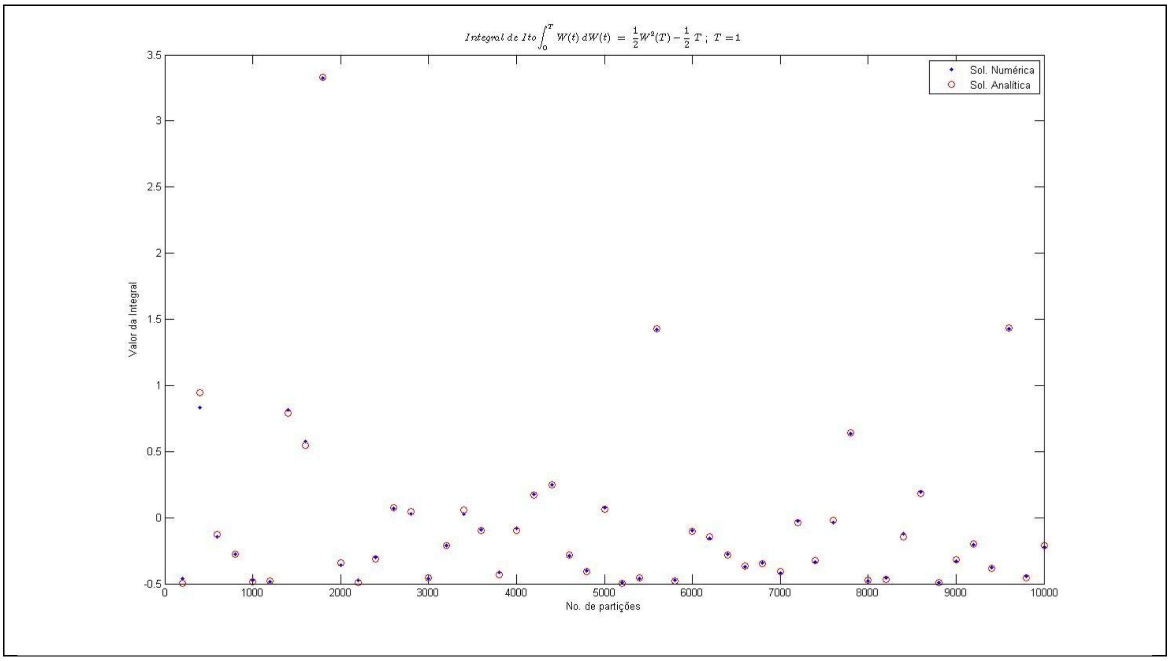
(função de distribuição acumulada da normal padrão)

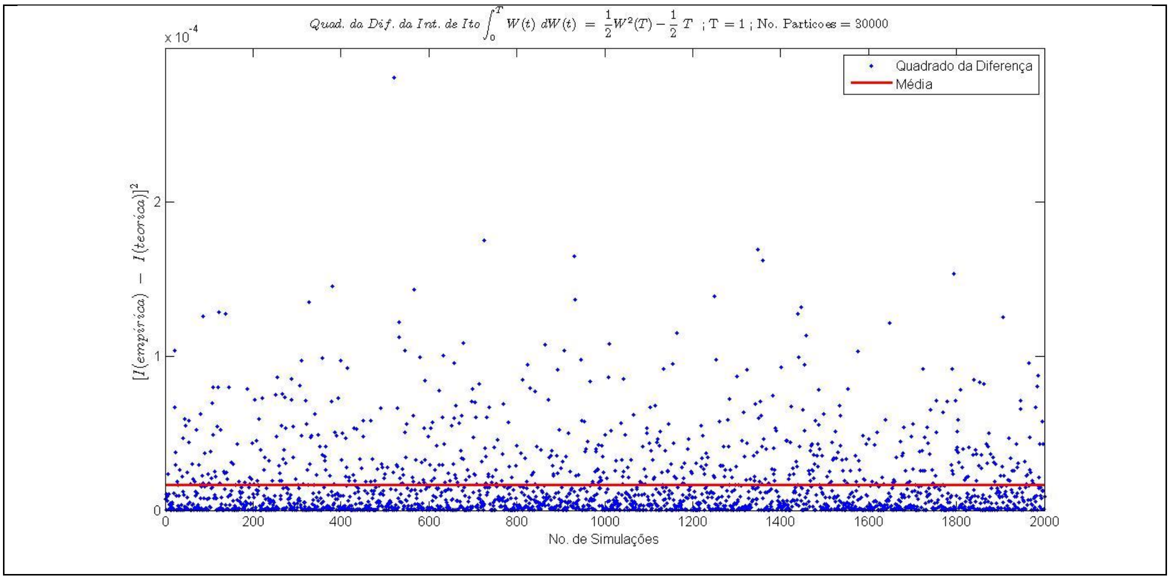

Movimento Browniano ; T = 1 ; m = 10000
W(t)
Pontos no intervalo [0,T]

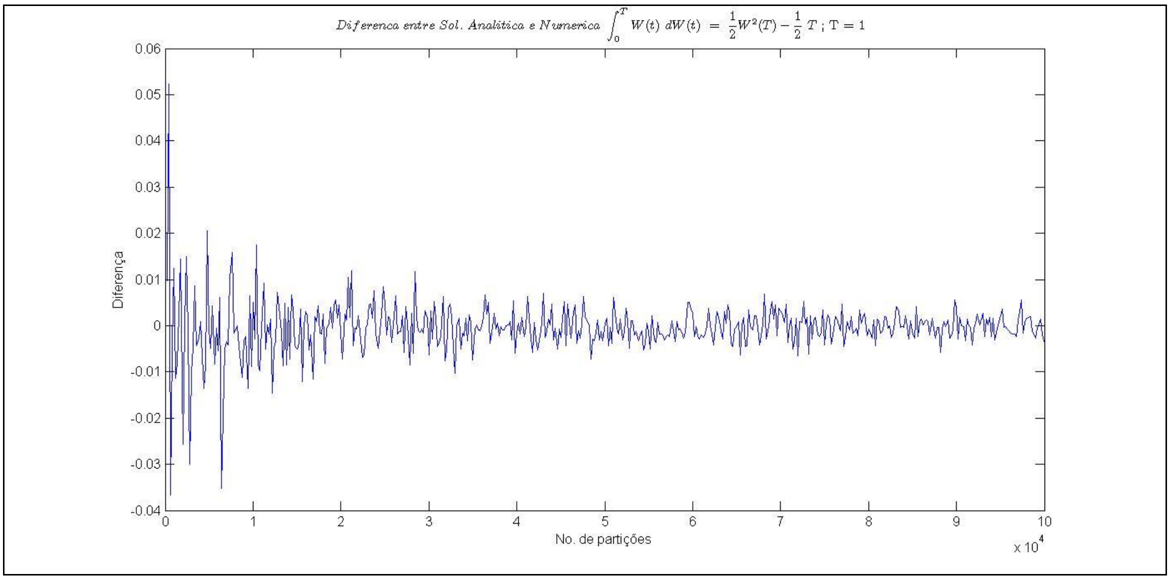

$Variacao\ Quadratica\ Mov.\ Browniano = \sum_{j=0}^{m-1} (W(t_{j+1}) - W(t_j))^2$; T = 1 ; m= 100000000
$\sum_{j=0}^{m-1} (W(t_{j+1}) - W(t_j))^2$
VQ
T
No. de Simulações (com 100000000 partições cada)


Variacao Quadratica Mov. Browniano $= \frac{(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2}{t_{j+1} - t_j}$; T=1
VQ(j)
1
No. de pontos no intervalo (0,T)
$\frac{(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2}{t_{j+1} - t_j}$


Variacao Quadratica Mov. Browniano; T= 3; 45000 partições
No. de Simulações
$\sum_{j=0}^{m-1} (W(t_{j+1}) - W(t_j))^2$


Integral de Ito $\int_0^T W(t)\, dW(t) = \frac{1}{2}W^2(T) - \frac{1}{2}T$; $T = 1$
Sol. Numérica
Sol. Analítica
Valor da Integral
No. de partições
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000


Quad. da Dif. da Int. de Ito $\int_0^T W(t)\, dW(t) = \frac{1}{2}W^2(T) - \frac{1}{2}T$; T = 1 ; No. Particoes = 30000
x 10^{-4}
Quadrado da Diferença
Média
$[I(empirica) - I(teorica)]^2$
No. de Simulações
2
1
0
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000


$Diferenca\ entre\ Sol.\ Analitica\ e\ Numerica\ \int_0^T W(t)\ dW(t)\ =\ \frac{1}{2}W^2(T) - \frac{1}{2}\ T$; T = 1
Diferença
No. de partições
x 10^4
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
-0.01
-0.02
-0.03
-0.04
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10