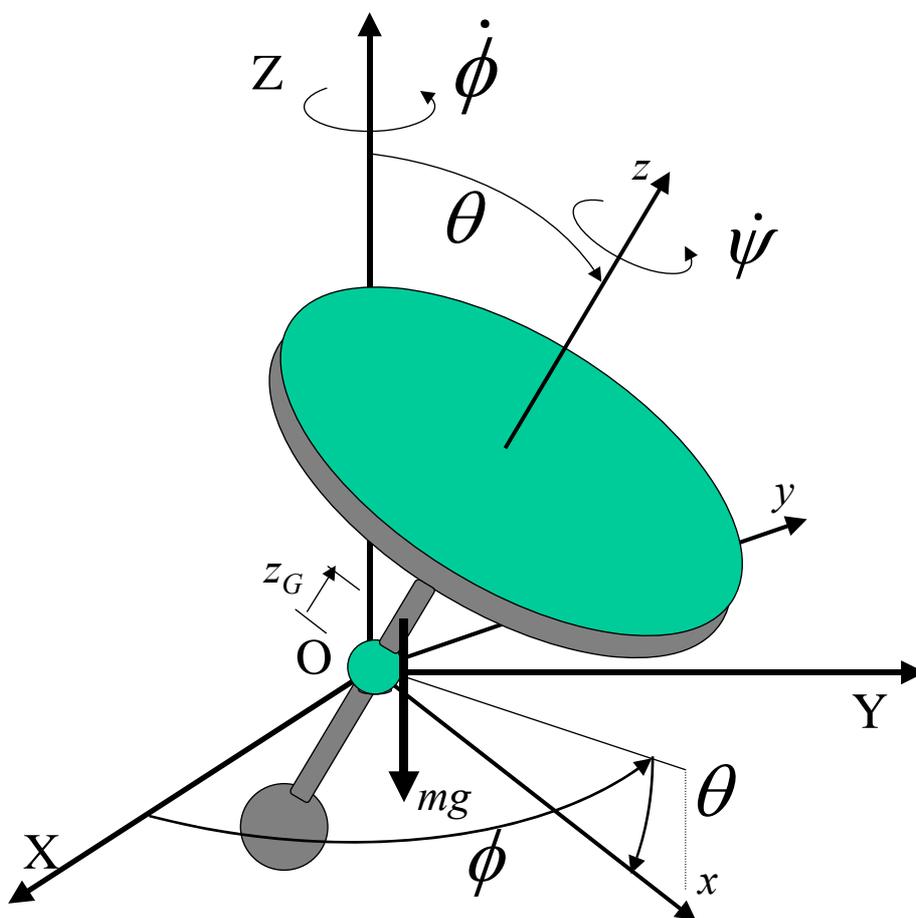


DINÂMICA DOS CORPOS RÍGIDOS



Celso Pupo Pesce

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

DINÂMICA DOS CORPOS RÍGIDOS

Celso Pupo Pesce

Departamento de Engenharia Mecânica
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

São Paulo, novembro de 2004

Revisado, março 2009

Prefácio

O presente texto didático foi originalmente elaborado tendo em vista compor um dos capítulos de um livro de Mecânica Geral destinado a alunos de graduação em engenharia, nos moldes do curso ministrado na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Entendeu-se, então, ser interessante uma análise mais extensiva, o que levou à edição da presente monografia.

No entanto, quando o assunto tratado enquadra-se na categoria dos denominados “clássicos”, dos quais a *Mecânica* constitui talvez o caso particular de maior importância, posto que ocupa lugar nobre na história da ciência e ao seu estudo tão melhores e aprofundados textos foram dedicados, qualquer tratamento apresentado corre o sério risco da simples redundância, para dizer o mínimo. Assim, não espere o leitor algo surpreendente, do ponto de vista didático, mas tão somente uma tentativa de sistematizar e organizar notas de aula que abrangem um *limitado espectro*, tanto ao nível de completude como de profundidade no tratamento da matéria.

O desenvolvimento do texto reflete, em grande monta, a forma com que este autor acredita deva a formação de um engenheiro “conceitual” ser conduzida. Dá-se ênfase à dedução e discussão dos “modelos da mecânica”, procurando-se explicitar as hipóteses sobre as quais são construídos, particularizando-os então às diversas situações de aplicação que se apresentam úteis ao estudo da mecânica e da engenharia. Foge propositalmente, portanto, de uma abordagem usualmente encontrada em livros de cunho mais técnico que, pode-se dizer, adotam “o caminho que vai do particular para o geral”, seguindo a orientação oposta, cuidando para não se desviar do conteúdo conceitual, contudo sem ingressar no formalismo e rigor matemáticos excessivos.

A dedução e a discussão das equações do movimento são conduzidas de maneira relativamente detalhada, por vezes até um pouco exaustiva, quando diversas formas úteis de sua aplicação são então apresentadas. A notação vetorial é utilizada, embora, quando pertinente, notação matricial seja empregada como alternativa útil à compreensão física, à síntese ou à aplicação numérica. Admite-se que o leitor apresente conhecimentos elementares de álgebra vetorial, álgebra linear e de cálculo

diferencial e integral além de possuir alguma familiaridade com os fundamentos da Mecânica Clássica, aí incluindo os capítulos relativos à *estática*, à *cinemática do ponto e de um corpo rígido*, e à *dinâmica do ponto*.

O agora Prof. Dr. Eduardo Aoun Tannuri, quando cursava o terceiro ano de Engenharia Mecatrônica, EM 1996, ofereceu-se para auxiliar-me na elaboração dos exemplos, na revisão do texto e em sua edição. Mais do que um auxílio, o que se viu foi um trabalho efetivo, na solução de boa parte dos exemplos propostos e na elaboração de figuras, seguido por uma revisão cuidadosa, que acabou por apontar diversos erros de impressão por mim cometidos e sugestões de melhorias na redação. A ele os meus mais sinceros agradecimentos. Agradecerei também, imensamente, contribuições do leitor no sentido de identificar quaisquer outros erros, eventualmente ainda presentes.

Agradeço também a valiosa contribuição de todos os colegas docentes da equipe de Mecânica Geral da Escola Politécnica, através de proveitosas e inspiradoras discussões, ao longo dos últimos anos. Em especial, menciono: G.E.O. Giacaglia, L.N.F. França, A.L.C. Fugarra, A.N. Simos, C.A. Martins, D.C. Zachariadis, D.C. Donha, L.R. Padovese, L.S. Macedo, M. Massarani, P.C. Kaminski, R.G. Lima, R.B. Salvagni, R.M. de Souza, R. Ramos Jr. e R.S. Barbosa.

Esta versão de março de 2009 sofreu correções gramaticais e algumas melhorias de exposição, com correções, particularmente na seção 6.2.

São Paulo, outubro de 2001, dezembro 2004, março 2009.

C.P.P.

Sumário

1. PRELIMINARES	7
1.1. fundamentos da cinemática de um c.r.	9
2. MOVIMENTO DO BARICENTRO	13
2.1. BARICENTRO	13
2.2. Teorema do Movimento do Baricentro	14
2.3. Adoção de um referencial fixo na Terra	17
3. ENERGIA CINÉTICA DE UM CORPO RÍGIDO	19
3.1. Energia Cinética de um Corpo Rígido e a Matriz de Inércia	19
3.2. Matriz de Inércia	23
3.2.1. Momentos e Produtos de Inércia	23
3.2.2. Transformação de Base e Eixos Principais de Inércia	25
3.2.3. Propriedades da Matriz de Inércia	31
3.2.4. Elipsóide de Inércia	36
3.3. Teorema da Variação da Energia Cinética	38
4. MOMENTO ANGULAR DE UM CORPO RÍGIDO	58
4.1. Momento Angular e a Matriz de Inércia	58
4.2. Teorema do Momento Angular	64
4.2.1. Casos Particulares	68
4.2.2. Notação Matricial Alternativa	70
4.2.3. Relação entre Energia Cinética e Quantidade de Movimento	71
4.2.4. Binário Giroscópico	73
4.2.5. Suplemento: Adoção do Referencial Terrestre	75
5. ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO E BALANCEAMENTO	89
5.1. Equacionamento e Reações	89
5.2. Balanceamento	98
5.2.1. Medida do desbalanceamento	98
5.2.2. Balanceamento	103
6. MOVIMENTO EM TORNO DE UM PONTO FIXO	108
6.1. Ângulos de Euler	109
6.2. Aplicação do Teorema do Momento Angular	112
6.2.1. Casos que exibem axi-simetria de distribuição de massa	113

6.3.	Energia Cinética de um C.R. em Movimento em Torno de um Ponto Fixo	118
6.4.	O Giroscópio	120
6.4.1.	Precessão estacionária ou regular	121
6.4.2.	Precessão livre	123
6.4.3.	Movimento geral sob ação de torque em torno da linha dos nós.	123
6.5.	O Problema do Pião	125
6.5.1.	Precessão estacionária	126
6.5.2.	Movimento geral	128
6.5.3.	Notas Suplementares sobre Precessão Pseudo-Regular	130
7.	BIBLIOGRAFIA	142
8.	ANEXO - SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS	144
8.1.	Exercício de Simulação #1. Proposição.	146
8.1.1.	Modelagem do sistema dinâmico, deduzindo as equações do movimento.	146
8.1.2.	Modelagem do sistema através de simulador.	147
8.1.3.	Simulação do modelo computacional	148
8.2.	Exercício de Simulação # 1. Exemplo de análise.	149
8.3.	Exercício de Simulação 2. Proposição.	155
8.3.1.	Modelagem do sistema dinâmico; deduzindo as equações do movimento.	155
8.3.2.	Modelagem do sistema através de simulador.	156
8.3.3.	Simulação do modelo computacional	156
8.4.	Exercício de Simulação # 2. Exemplo de análise.	157
8.5.	Exercício de Simulação # 3. Proposição.	161
8.5.1.	Modelagem do sistema dinâmico; deduzindo as equações do movimento.	162
8.5.2.	Modelagem do sistema através de simulador.	162
8.5.3.	Simulação do modelo computacional	162
8.6.	Exercício de Simulação # 3. Exemplo de análise.	163
8.7.	Exercício de Simulação # 4. Proposição.	168
8.7.1.	Modelagem do sistema dinâmico, deduzindo as equações do movimento.	169
8.7.2.	Modelagem do sistema através de simulador	170
8.7.3.	Simulação do modelo computacional	170
8.8.	Exercício de Simulação # 4. Exemplo de análise.	171

1. PRELIMINARES

Do ponto de vista cinemático, um *Corpo Rígido* (C.R.) pode ser definido como um *corpo material que guarda a propriedade de invariância de distância relativa entre quaisquer pontos que o constituam*. Esta é a *propriedade fundamental de um C.R.*. Trata-se, obviamente, de uma idealização, um modelo da realidade, porquanto inexistem, senso estrito, corpos materiais totalmente indeformáveis.

Um *sólido admitido indeformável concretiza o conceito de um C.R.*. A hipótese de indeformabilidade é, no entanto, plausível quando os deslocamentos relativos são física e matematicamente desprezíveis face a escalas de comprimento outras que caracterizam o problema em estudo; por exemplo, escalas do movimento do corpo como um todo. Embora aparentemente bastante restritiva, a hipótese de C.R. encontra aplicações práticas de grande relevância. O estudo dos movimentos de um navio quando sujeito à ação das ondas do mar, por exemplo, é em geral conduzido dentro da premissa de C.R.. No entanto quando o foco das atenções recai sobre fenômenos de vibração estrutural da embarcação, esta hipótese não mais é aplicável. O mesmo pode ser dito quando do estudo do voo de aeronaves e naves espaciais, do movimento de veículos automotores, rotores e mecanismos flexíveis em geral. O *princípio da solidificação* é então aplicado, e o movimento é estudado, sob hipótese de pequenos deslocamentos relativos, como composto por um movimento de corpo rígido atuado por forças e momentos de força associados a tais deslocamentos; ver, p.ex., Meirovitch, página 483. O tratamento completo do tema, embora clássico, é objeto de textos mais avançados (ver, também, p. ex., Sommerfeld, *Mechanics of Deformable Bodies*, 1950) e foge, portanto, do escopo do presente livro.

Este texto fica restrito a casos onde a hipótese de C.R. for aplicável. Permeia definições, conceitos e enunciados de teoremas gerais. O tratamento, embora algo matemático, procura fugir propositalmente do rigor, atendendo ao formato didático

pretendido. Além das aplicações de caráter conceitual, foram escolhidos exemplos que, embora ainda idealizados, são mais próximos do campo da engenharia.

Inicialmente o *Teorema do Movimento do Baricentro* é enunciado, a partir de considerações elementares que definem o baricentro de um sólido, em particular, de um corpo rígido. O *Teorema da Energia Cinética* é abordado a seguir, a partir do conceito geral de energia cinética. É deduzida a expressão associada ao movimento de um corpo rígido, quando então emerge o conceito de *matriz de inércia*. Suas propriedades principais são enunciadas e discutidas. O conceito de *quantidade de movimento angular* ou *momento angular* é abordado no contexto do movimento de um C.R. Sua relação com a recém definida matriz de inércia é então introduzida e o *Teorema do Momento Angular*, que relaciona a variação desta quantidade à resultante dos momentos do sistema de forças externas aplicadas ao C.R. é enunciado. Completam-se assim as equações que regem o movimento de um C.R., partindo-se para algumas aplicações de caráter conceitual.

O *problema plano* é discutido e exemplificado, como primeiro tratamento de problemas mais práticos, por encerrar menores dificuldades. São adentrados então problemas mais complexos, de cunho tridimensional. O *Binário Giroscópico* é definido e tratado através de exemplos didáticos ‘clássicos’. O caráter conservativo do efeitos giroscópicos é discutido. O problema de *Balanceamento de Rotores* é então abordado de forma sistemática, iniciando-se com a ‘medida do desbalanceamento’ e culminando com a construção de um procedimento sistemático de ‘balanceamento’. O *Movimento em Torno de um Ponto Fixo* é elaborado com algum detalhe. As equações gerais do movimento são estabelecidas em termos dos ângulos de Euler e os problemas do giroscópio e do pião tratados de forma progressiva. Elementos dos conceitos de estabilidade, do ponto de vista físico, são apresentados. O conceito de *precessão estacionária* é abordado e discutido através de exemplos, incluindo o movimento de um *girocompasso simplificado* e finalizando com uma discussão a respeito de movimentos mais gerais, onde os conceitos de *cone do corpo* e *cone espacial*, generalizações tridimensionais dos conceitos de *base* e *rolante*, são introduzidos. Como suplementos decidiu-se incluir alguma discussão a respeito do significado da adoção do referencial terrestre como sistema de referências ‘primário’ e, ao final, elementos do estudo da *precessão pseudo-regular*, cuja discussão,

acredita-se, pode ser bem apreciada por um aluno de graduação em fase algo adiantada ou por um aluno de pós-graduação.

O anexo contém, ainda, a proposição de uma *série de exercícios de modelamento e simulação computacional*, que são acompanhados de exemplos de análises detalhadas, os quais devem ser trabalhados através de módulos de simulação de sistemas dinâmicos como, por exemplo, o módulo SIMULINK do programa MATLAB, ou ainda o módulo SCICOS do programa SCILAB. O primeiro é marca-registrada de MathWorks Inc., e o segundo é de domínio público¹. Estes exercícios ilustram série regularmente aplicada na disciplina PME2200, Mecânica B, ministrada na Escola Politécnica a alunos da Grande Área Mecânica (habilitações em Engenharia Mecânica, Mecatrônica, Naval e Produção) e conta com a contribuição de diversos colegas do Departamento de Engenharia Mecânica, cujos nomes são citados no devido tempo. A nosso ver tem-se constituído em diferencial pedagógico, porquanto permitem o exercício do modelamento e da análise de diversos problemas da dinâmica de um C.R., com ganho de percepção física, analítica e conceitual.

Antes porém de adentrarmos a *Dinâmica do Corpo Rígido*, propiamente dita, alguns fundamentos de cinemática serão revisitados.

1.1. FUNDAMENTOS DA CINEMÁTICA DE UM C.R.

No estudo da cinemática de um corpo rígido existe um vínculo cinemático, bastante especial, que relaciona a velocidade de dois pontos quaisquer deste corpo. Este vínculo é prontamente derivável da hipótese fundamental de um C.R. De forma geral pode-se dizer que este vínculo permite estabelecer, a cada instante, o *campo cinemático (de velocidades e acelerações) que caracteriza um “movimento rígido”*², e será empregado neste texto repetidas vezes, nas diversas deduções e teoremas que seguirão. Através do *vínculo cinemático de C.R.*, basta o conhecimento da velocidade

¹ (<ftp://ftp.inria.fr/INRIA/Projects/Meta2/Scilab/distributions>).

² i.e., um movimento que satisfaz o vínculo cinemático representado matematicamente pela fórmula fundamental do C.R. (1.2)

de um ponto pertencente ao corpo em estudo, ponto este arbitrariamente escolhido, e do *vetor de rotação* deste mesmo corpo, para que todo o campo de velocidades esteja univocamente determinado.

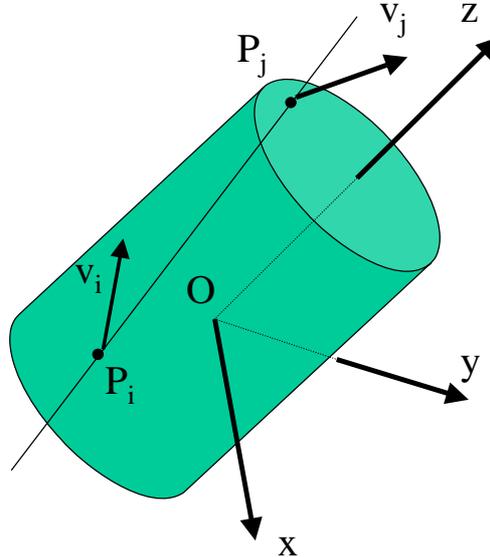


Figura 1 C.R. e propriedade fundamental.

Seja $(P_i - P_j)$ o vetor de posição relativa entre dois pontos quaisquer, P_i e P_j , de um mesmo C.R. Então $|(P_i - P_j)|^2 = r_{ij}^2 = \text{constante}$, de tal forma que

$$\frac{d}{dt} |(P_i - P_j)|^2 = \frac{d}{dt} [(P_i - P_j) \cdot (P_i - P_j)] = 2(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \cdot (P_i - P_j) = 0 \quad , \quad (1.1)$$

onde \mathbf{v}_i é o vetor de velocidade de um ponto P_i do C.R. medida em relação a um referencial arbitrariamente escolhido. A relação (1.1) demonstra que a velocidade relativa de dois pontos pertencentes ao mesmo C.R. é perpendicular à reta que os une (ou, seja, perpendicular ao vetor de posição relativa).

De equação (1.1) mostra-se também (ver, p.ex., França e Matsumura, 2001) que existe uma relação unívoca entre os vetores de velocidade de dois pontos de um mesmo C.R. Esta relação é dada por,

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j + \boldsymbol{\Omega} \wedge (P_i - P_j) \quad , \quad (1.2).$$

e constitui a já mencionada *fórmula fundamental da cinemática do C.R.*, ou ainda, *vínculo cinemático de um C.R.* O vetor Ω é o vetor de rotação do corpo rígido, único para cada instante considerado. Assim, uso será sistematicamente feito de (1.2).

A derivada de (1.2) em relação ao tempo fornece o campo de aceleração de um C.R.

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_j + \dot{\Omega} \wedge (P_i - P_j) + \Omega \wedge [\Omega \wedge (P_i - P_j)] \quad . \quad (1.3)$$

Vem também de (1.2) que,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{u}_\omega &= \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{u}_\omega = v_\omega = \text{constante}; \\ \mathbf{u}_\omega &= \Omega / |\Omega|; \quad \Omega \neq \mathbf{0} \end{aligned} \quad , \quad (1.4)$$

invariante, portanto, com respeito a todo ponto pertencente ao C.R., onde \mathbf{u}_ω é um versor que orienta Ω . Em palavras, a componente $\mathbf{v}_E = v_\omega \mathbf{u}_\omega$, do vetor de velocidade de qualquer ponto de um mesmo corpo rígido, na direção de seu vetor de rotação, independe do ponto considerado.

Pode-se mostrar então que, a cada instante, existe um lugar geométrico (L.G.) de pontos que tem o vetor de velocidade paralelo ao vetor de rotação. Este vetor é o mesmo para todos os pontos deste L.G. e tem módulo mínimo. O L.G. é uma reta, denominado "eixo helicoidal instantâneo" e é paralelo ao vetor de rotação.

De fato, seja E um ponto genérico do C.R., pertencente a este L.G., e O um ponto qualquer do mesmo C.R.. Então $\mathbf{v}_E = \beta \Omega = v_\omega \mathbf{u}_\omega$. Segue então de (1.2) que

$$\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_O + \Omega \wedge (E - O) = v_\omega \mathbf{u}_\omega \quad (1.5)$$

e portanto, $(E - O) \wedge \Omega = \mathbf{v}_O - v_\omega \mathbf{u}_\omega$, de onde,

$$(E - O) = \frac{\Omega \wedge \mathbf{v}_O}{|\Omega|^2} + \gamma \Omega; \quad \gamma \in \Re \quad , \quad (1.6)$$

que é a equação vetorial de uma reta paralela a Ω . Ou seja, a cada instante o movimento geral de um C.R. pode ser interpretado como um "ato de movimento helicoidal", i.e., a combinação de um "ato de movimento translatório, paralelo ao vetor de rotação" com um "ato de movimento de rotação", em torno do "eixo

helicoidal instantâneo", expresso por (1.6). De (1.4) e (1,5) segue também que $|\mathbf{v}_E|$ é mínimo.

Um caso particular é o de movimento plano. Neste caso o campo de velocidades é perpendicular ao vetor de rotação e o "eixo helicoidal instantâneo" é sempre perpendicular ao plano do movimento. O traço deste eixo com o plano de movimento considerado é denominado, então, de *Centro Instantâneo de Rotação* (CIR).

Por fim, dados três pontos distintos e não alinhados (O, A, B) , do mesmo C.R. (i.e. $(A-O) \wedge (B-O) \neq \mathbf{0}$), cujas velocidades, $\mathbf{v}_O, \mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B$, são conhecidas e, portanto, obedecem, duas a duas, a relação (1.1), o vetor de rotação $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$, deste C.R., pode ser prontamente determinado de (1.2), e expresso na base solidária ao corpo $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, na forma,

$$\begin{aligned}\Omega_x &= \frac{(v_{Az} - v_{Oz})x_B - (v_{Bz} - v_{Oz})x_A}{z_B y_A - z_A y_B} \\ \Omega_y &= \frac{(v_{Ax} - v_{Ox})y_B - (v_{Bx} - v_{Ox})y_A}{x_B z_A - x_A z_B} \\ \Omega_z &= \frac{(v_{Ay} - v_{Oy})z_B - (v_{By} - v_{Oy})z_A}{y_B x_A - y_A x_B}\end{aligned}, \quad (1.7)$$

onde

$$(A-O) = (x_A, y_A, z_A)$$

$$(B-O) = (x_B, y_B, z_B)$$

$$\mathbf{v}_O = v_{Ox}\mathbf{i} + v_{Oy}\mathbf{j} + v_{Oz}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}_A = v_{Ax}\mathbf{i} + v_{Ay}\mathbf{j} + v_{Az}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}_B = v_{Bx}\mathbf{i} + v_{By}\mathbf{j} + v_{Bz}\mathbf{k}$$

2. MOVIMENTO DO BARICENTRO

2.1. BARICENTRO

O centro de gravidade de um corpo material é um caso particular do conceito de *centro de um sistema de forças paralelas*, quando o sistema é constituído por forças-peso. É um ponto especial do *eixo de momento mínimo*³, (nulo, quando o sistema de forças é paralelo). Pode ser definido como a intersecção dos eixos de momento nulo correspondentes a duas orientações arbitrárias do corpo, relativamente ao campo gravitacional. Sendo o sistema considerado constituído por forças-peso, estas são linearmente proporcionais às massas dos elementos que constituem o corpo material. Posto ainda que o campo é constante e paralelo, o centro de gravidade coincide, portanto, com o *centro de massa* do corpo material.

Considere um corpo material contínuo. A posição de um elemento de massa dm é dada pelo vetor de posição $(P - O)$, relativamente a um ponto O de referência, arbitrariamente escolhido. Seja $(G - O)$ o vetor de posição do *centro de massa* ou *baricentro*. Segue então que

$$(G - O) = \frac{\int_{\text{Corpo}} (P - O) dm}{m}, \quad (2.1)$$

³ Ver, p.ex., França e Matsumura, 2000.

onde m é a massa do corpo. O símbolo de integral é aqui empregado com propriedade e por facilidade de notação, visto que o corpo em consideração é suposto contínuo. O domínio de integração é definido como o espaço ocupado pelo corpo considerado em um dado instante.

Em casos particulares, idealizados, onde o corpo é formado por um conjunto de N corpos, a notação ainda assim é consistente, posto que, da propriedade associativa do operador linear de integração e da definição do centro de massa de um sistema de pontos materiais,

$$(G - O) = \frac{\sum_i^N (G_i - O)m_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N \int_{C_i} (P - O)dm}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\int_{Corpo} (P - O)dm}{m} \quad . \quad (2.2)$$

$$Corpo = \cup_{i=1}^N C_i$$

Em particular se O for o próprio centro de massa G segue de (2.2) que

$$\int_{Corpo} (P - G)dm = 0 \quad . \quad (2.3)$$

2.2. TEOREMA DO MOVIMENTO DO BARICENTRO

Considere um corpo material contínuo, de massa m e um referencial inercial em relação ao qual se estuda o movimento do corpo. Seja O um ponto de referência deste referencial. Da conhecida lei de Newton aplicada a um elemento de massa dm do corpo considerado, supondo *invariância da massa no tempo*, segue que

$$d\mathbf{f} = \mathbf{a}dm \quad , \quad (2.4)$$

onde $d\mathbf{f}$ é a resultante das forças agentes sobre o elemento de massa. A expressão acima se integrada em todo o domínio ocupado pelo corpo, considerando o sistema de forças internas equivalente a zero, consequência do usual princípio de ação e reação da mecânica, conduz a

$$\mathbf{R} = \int_{\text{Corpo}} \mathbf{a} dm \quad , \quad (2.5)$$

onde \mathbf{R} é a resultante do sistema de forças externas agentes sobre o corpo. Segue então que,

$$\mathbf{R} = \int_{\text{Corpo}} \frac{d^2}{dt^2} (P - O) dm = \frac{d^2}{dt^2} \int_{\text{Corpo}} (P - O) dm = m \frac{d^2}{dt^2} (G - O) \quad , \quad (2.6)^4$$

e, portanto,

$$\mathbf{R} = m \mathbf{a}_G \quad (2.7)$$

A expressão acima constitui-se no *Teorema do Movimento do Baricentro*, válida para um corpo material genérico, sob a hipótese de invariância de massa. Em palavras: *o movimento do baricentro corresponde ao movimento de um ponto material de mesma massa do corpo considerado, caso sobre ele agisse a resultante do sistema de forças externas que propulsiona este corpo.*

Note que nada foi assumido até o presente momento, no que concerne à hipótese de indeformabilidade. O campo cinemático que caracteriza um C.R. será agora suposto válido. Sejam então P um ponto genérico deste corpo que posiciona o elemento de massa dm e Q , um ponto específico que executa um 'movimento rígido' solidário ao

⁴ Estamos tratando de um domínio de integração que contém, sempre, a mesma quantidade de matéria. Daí a possibilidade de inverter a ordem de aplicação dos operadores lineares de diferenciação e integração. Não devemos aqui confundir o domínio de integração com o usual conceito de volume de

2.3. ADOÇÃO DE UM REFERENCIAL FIXO NA TERRA

O referencial terrestre é em geral a escolha mais natural. Este referencial é, estritamente, não-inercial, posto que apresenta rotação. A segunda lei de Newton é válida para referenciais Newtonianos ou inerciais, no entanto. Assim, a equação (2.7) deve ser reinterpretada, se o referencial adotado é fixo na Terra.

Note, em primeiro lugar, que qualquer tentativa de medição da ação gravitacional, espelhará não apenas a própria atração gravitacional, mas também a 'força de inércia' conhecida como "força centrífuga". Ou seja, se denominarmos \mathbf{F} , a força de gravitação e \mathbf{C} a "força centrífuga" decorrente da rotação da Terra, a força peso \mathbf{P} que efetivamente estará sendo medida é, na realidade a resultante de \mathbf{F} e \mathbf{C} ,

$$\mathbf{F} + \mathbf{C} = \mathbf{P} \quad , \quad (2.11)$$

com

$$\mathbf{C} = -m(\boldsymbol{\Omega}_e \wedge (\boldsymbol{\Omega}_e \wedge (G - O'))) \quad , \quad (2.12)$$

onde $\boldsymbol{\Omega}_e$ é o vetor de rotação do referencial terrestre, G o centro de massa do corpo considerado e O' a origem deste referencial, assumida em algum ponto de seu eixo de rotação.

Assim, sendo \mathbf{R} a resultante das forças externas agentes sobre o corpo, cujo movimento é objeto de estudo, designando \mathbf{F}' , as forças externas outras que não de origem gravitacional, sobre ele agentes, pode-se então escrever,

$$\mathbf{R} = \mathbf{F} + \mathbf{F}' = \mathbf{P} - \mathbf{C} + \mathbf{F}' \quad . \quad (2.13)$$

Por outro lado, a aceleração do centro de massa do corpo é dada por,

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_{O'} + \boldsymbol{\Omega}_e \wedge (\boldsymbol{\Omega}_e \wedge (G - O')) + 2\boldsymbol{\Omega}_e \wedge \mathbf{v}_{Grel} + \mathbf{a}_{Grel} \quad , \quad (2.14)$$

onde os dois primeiros termos correspondem à aceleração de arrastamento, o terceiro é a aceleração de Coriolis do centro de massa e o último a aceleração do centro de massa em relação ao referencial fixo na Terra. Desta forma, sendo as forças de inércia, centrífuga e de Coriolis, dadas respectivamente por,

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= -m\boldsymbol{\Omega}_e \wedge (\boldsymbol{\Omega}_e \wedge (G - O')) \\ \mathbf{F}_C &= -2m\boldsymbol{\Omega}_e \wedge \mathbf{v}_{Grel} \end{aligned} \quad , \quad (2.15)^5$$

vem, utilizando-se de (2.13) e do Princípio de D'Alembert,

$$\mathbf{R} + \mathbf{F}_I = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

aplicado equivalentemente a (2.7), onde

$$\mathbf{F}_I = -m\mathbf{a}_G \quad (2.17)$$

é o conjunto das forças de inércia, e desconsiderando $\mathbf{a}_{O'}$, que

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} - \mathbf{C} + \mathbf{F}' = -\mathbf{C} - \mathbf{F}_c + m\mathbf{a}_{Grel} \quad . \quad (2.18)$$

Assim,

$$m\mathbf{a}_{Grel} = \mathbf{P} + \mathbf{F}' + \mathbf{F}_c \quad . \quad (2.19)$$

Esta é a equação que efetivamente deve ser integrada, quando a posição é medida relativamente ao referencial Terra.

⁵ Note que $\int_{Corpo} 2\boldsymbol{\Omega}_e \wedge \mathbf{v}_{rel} dm = 2\boldsymbol{\Omega}_e \wedge \int_{Corpo} \mathbf{v}_{rel} dm = 2\boldsymbol{\Omega}_e \wedge m\mathbf{v}_{Grel} = 2\boldsymbol{\Omega}_e \wedge \mathbf{Q}_{rel}$

3. ENERGIA CINÉTICA DE UM CORPO RÍGIDO

3.1. ENERGIA CINÉTICA DE UM CORPO RÍGIDO E A MATRIZ DE INÉRCIA

Considere um corpo rígido e dois referenciais. O primeiro, em relação ao qual é medido o movimento e o segundo solidário ao corpo. Sejam (O, x, y, z) e (O', x', y', z') os sistemas cartesianos que os orientam, respectivamente.

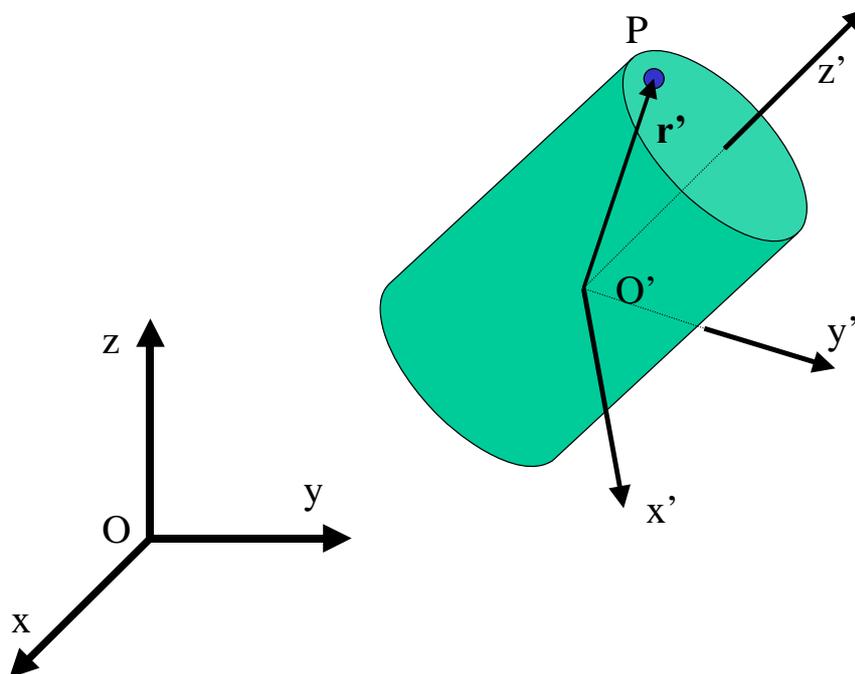


Figura 2 C.R. e sistemas de referência.

A energia cinética de um elemento diferencial de massa que compõe o corpo rígido é, por definição

$$dT = \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 dm \quad . \quad (3.1)$$

A energia cinética do corpo, como um todo, fica então escrita,

$$T = \frac{1}{2} \int_{\text{Corpo}} \mathbf{v}^2 dm \quad . \quad (3.2)$$

Seja $\mathbf{r}' = (P - O')$ o vetor de posição relativa do elemento diferencial de massa dm ao ponto O' , *pertencente ao corpo (ou que executa um 'movimento rígido' solidário ao corpo)*. Da fórmula fundamental da cinemática de um C.R., equação (1.2), vem

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}' \quad , \quad (3.3)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_{\text{Corpo}} (\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}')^2 dm = \frac{1}{2} \left\{ \int_{\text{Corpo}} \mathbf{v}_{O'}^2 dm + \int_{\text{Corpo}} 2(\mathbf{v}_{O'} \cdot \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}') dm + \int_{\text{Corpo}} (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}')^2 dm \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{v}_{O'}^2 \int_{\text{Corpo}} dm + 2\mathbf{v}_{O'} \cdot \boldsymbol{\Omega} \wedge \int_{\text{Corpo}} \mathbf{r}' dm + \int_{\text{Corpo}} (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}')^2 dm \right\} \end{aligned} \quad . \quad (3.4)$$

A integral no primeiro termo é facilmente identificável como a massa do corpo. Da definição de centro de massa, equação (2.1), por sua vez, a integral do segundo termo pode ser escrita,

$$\int_{\text{Corpo}} \mathbf{r}' dm = m\mathbf{r}'_G = m(\mathbf{G} - \mathbf{O}') \quad . \quad (3.5)$$

Denotando, ainda, $\Omega = (\omega_{x'}, \omega_{y'}, \omega_{z'})$ e $\mathbf{r}' = (x', y', z')$, o leitor poderá verificar que o terceiro termo fica,

$$\int_{\text{Corpo}} (\Omega \wedge \mathbf{r}')^2 dm = \omega_{x'}^2 \int_{\text{Corpo}} (y'^2 + z'^2) dm + \omega_{y'}^2 \int_{\text{Corpo}} (z'^2 + x'^2) dm + \omega_{z'}^2 \int_{\text{Corpo}} (x'^2 + y'^2) dm + \\ -2\omega_{y'}\omega_{z'} \int_{\text{Corpo}} y'z' dm - 2\omega_{z'}\omega_{x'} \int_{\text{Corpo}} z'x' dm - 2\omega_{x'}\omega_{y'} \int_{\text{Corpo}} x'y' dm \quad (3.6)$$

que também pode ser escrito, compactamente, na forma matricial,

$$\frac{1}{2} \int_{\text{Corpo}} (\Omega \wedge \mathbf{r}')^2 dm = \frac{1}{2} \{\Omega\}^t [J_{O'}] \{\Omega\} \quad (3.7)^6$$

onde a matriz quadrada de ordem três,

$$[J_{O'}] = \begin{bmatrix} \int_{\text{Corpo}} (y'^2 + z'^2) dm & - \int_{\text{Corpo}} x'y' dm & - \int_{\text{Corpo}} x'z' dm \\ - \int_{\text{Corpo}} y'x' dm & \int_{\text{Corpo}} (z'^2 + x'^2) dm & - \int_{\text{Corpo}} y'z' dm \\ - \int_{\text{Corpo}} z'x' dm & - \int_{\text{Corpo}} z'y' dm & \int_{\text{Corpo}} (x'^2 + y'^2) dm \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

constituída por ‘*momentos de massa de segunda ordem*’, é denominada ‘*matriz de inércia*’ do corpo em relação ao sistema considerado. Os termos da diagonal principal são denominados ‘*momentos de inércia em relação aos eixos (x', y', z')* ’, respectivamente e aqui serão denotados por $J_{x'}, J_{y'}, J_{z'}$. Os termos fora da diagonal são denominados ‘*produtos de inércia*’ e aqui serão denotados por $J_{x'y'}, J_{y'z'}, J_{z'x'}$. Note que, por construção, a matriz de inércia é simétrica.

⁶ O super-escrito t indica a operação de transposição.

A matriz de inércia é uma entidade física de extrema importância, pois ‘mede’ a distribuição de massa de um corpo em relação a um dado sistema de coordenadas. Goza de diversas propriedades e é fundamental ao equacionamento do movimento de um corpo rígido. Estas propriedades serão apresentadas e estudadas mais adiante.

Voltando a atenção à energia cinética e substituindo as expressões (3.5) e (3.7), a equação (3.4) fica escrita na forma,

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_{O'}^2 + m \mathbf{v}_{O'} \cdot \boldsymbol{\Omega} \wedge (G - O') + \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\Omega}\}' [\mathbf{J}_{O'}] \{\boldsymbol{\Omega}\} \quad . \quad (3.9)$$

O primeiro termo está associado à translação do corpo; o segundo termo à translação e à rotação; o terceiro termo, apenas à rotação. Se a escolha for tal que $O' \equiv G$, a expressão da energia cinética ficará simplificada na forma,

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\Omega}\}' [\mathbf{J}_G] \{\boldsymbol{\Omega}\} \quad . \quad (3.10)$$

Ou seja, ‘a energia cinética de um corpo em movimento rígido, medida em relação a um dado referencial, pode ser decomposta em duas parcelas: a primeira associada apenas ao movimento do centro de massa e a segunda associada à rotação’.

Outro caso particular merece especial atenção dada sua importância conceitual e prática.

- *Se O' for um ponto fixo*

Neste caso tem-se, a expressão da energia cinética reduzida apenas à parcela associada à rotação,

$$T = \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\Omega}\}' [\mathbf{J}_{O'}] \{\boldsymbol{\Omega}\}; \quad O' \text{ um ponto fixo} \quad (3.11)$$

Genericamente, por outro lado, da identidade envolvendo o produto misto de três vetores $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$, a expressão (3.9) pode ser alternativamente escrita na forma

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_{O'}^2 - \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{O}' - \mathbf{G}) \wedge m \mathbf{v}_{O'} + \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\Omega}\}' [\mathbf{J}_{O'}] \{\boldsymbol{\Omega}\} \quad (3.12)$$

O segundo termo da expressão acima pode então ser identificado como o produto escalar entre o vetor de rotação do corpo e o momento angular, calculado em relação ao centro de massa do corpo, que seria obtido se toda a massa do corpo fosse concentrada no ponto O' .

3.2. MATRIZ DE INÉRCIA

A matriz de inércia de um corpo material constitui-se, na realidade, em um conceito mais amplo, e pode ser definida mesmo para corpos não rígidos, como por exemplo para um corpo elástico. Neste caso, no entanto, a matriz de inércia depende do instante considerado e o cálculo da energia cinética não pode ser feito através da aplicação do *vínculo cinemático de corpo rígido*.

Do ponto de vista puramente matemático a matriz de inércia enquadra-se dentro de uma classe mais ampla de grandezas, denominadas *tensores*. É comum, em textos algo mais avançados, a referência *tensor de inércia*. Em particular a matriz de inércia é um *tensor de segunda-ordem*, gozando, portanto, de todas as propriedades inerentes a esta classe especial. Estas observações visam tão somente situar o leitor, motivando-o a um estudo mais aprofundado do assunto, tarefa que obviamente foge ao objetivo do presente texto.

As definições, conceitos e propriedades tratadas a seguir têm-se tão somente ao desenvolvimento necessário à mecânica geral, ao nível de graduação em engenharia.

3.2.1. Momentos e Produtos de Inércia

Define-se o *momento polar de inércia* de um corpo material em relação a um pólo O , à entidade escalar,

$$I_O = \int_{\text{Corpo}} (P-O)^2 dm \quad . \quad (3.13)$$

O momento polar de inércia ‘mede’, portanto, a distribuição de massa de um dado corpo material em torno de um ponto.

De forma análoga, o *momento de inércia* de um corpo em relação a um eixo $O\mathbf{u}$, onde \mathbf{u} é um versor, ‘mede’ a distribuição de massa de um corpo em relação a este eixo. Lembrando que o quadrado da distância de um ponto P à reta $O\mathbf{u}$ é dado por $d_u^2 = ((P-O) \wedge \mathbf{u})^2 = |P-O|^2 \sin^2 \theta$, onde θ é o ângulo interno entre $(P-O)$ e \mathbf{u} , o *momento de inércia* de um corpo em relação a um eixo $O\mathbf{u}$ é então definido como,

$$J_u = \int_{\text{Corpo}} d_u^2 dm = \int_{\text{Corpo}} ((P-O) \wedge \mathbf{u})^2 dm \quad (3.14)$$

Tomando um sistema cartesiano (O, x, y, z) , $(P-O) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, os quadrados das distâncias do ponto P aos eixos (x, y, z) são dados, respectivamente, por,

$$\begin{aligned} d_x^2 &= y^2 + z^2 \\ d_y^2 &= z^2 + x^2 \\ d_z^2 &= x^2 + y^2 \end{aligned} \quad , \quad (3.15)$$

de tal sorte que os *momentos de inércia* em relação aos eixos (x, y, z) , passantes por O , ficam

$$\begin{aligned} J_x &= \int_{\text{Corpo}} (y^2 + z^2) dm \\ J_y &= \int_{\text{Corpo}} (z^2 + x^2) dm \\ J_z &= \int_{\text{Corpo}} (x^2 + y^2) dm \end{aligned} \quad (3.16)$$

O momento polar de inércia em relação ao pólo O fica escrito na forma,

$$I_O = \frac{1}{2} \int_{\text{Corpo}} (x^2 + y^2 + z^2) dm \quad , \quad (3.17)$$

Definem-se⁷, por outro lado os produtos de inércia com respeito aos eixos $(x, y), (x, z), (y, z)$, como os escalares

$$\begin{aligned} J_{xy} &= - \int_{\text{Corpo}} xy dm = - \int_{\text{Corpo}} yx dm = J_{yx} \\ J_{xz} &= - \int_{\text{Corpo}} xz dm = - \int_{\text{Corpo}} zx dm = J_{zx} \\ J_{yz} &= - \int_{\text{Corpo}} yz dm = - \int_{\text{Corpo}} zy dm = J_{zy} \end{aligned} \quad (3.18)$$

A matriz de inércia pode então ser definida,

$$[\mathbf{J}_O] = \begin{bmatrix} J_x & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_y & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

3.2.2. Transformação de Base e Eixos Principais de Inércia

Considere, conforme a figura abaixo, e alterando um pouco a notação, dois sistemas de coordenadas, (x_1, x_2, x_3) e (x'_1, x'_2, x'_3) , ambos com origem em O e orientados pelas bases canônicas $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ e $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$

⁷ O sinal positivo é, por vezes, preferido na definição.

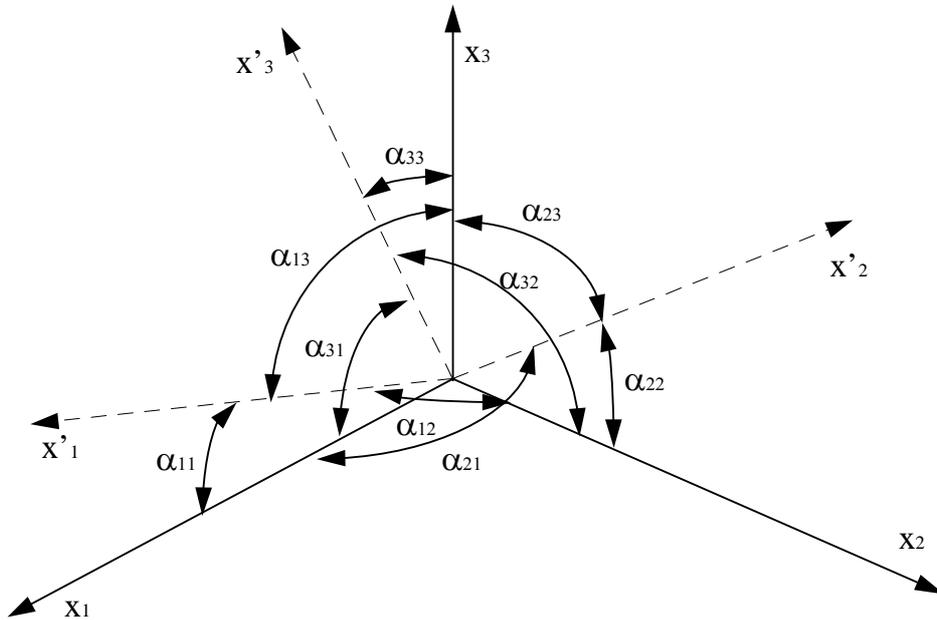


Figura 3 Mudança de base e transformação de coordenadas

Um vetor genérico $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ é dado por $\mathbf{r}' = (x'_1, x'_2, x'_3)$, se representado na base $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$. Sejam α_{ij} os ângulos formados entre os eixos x'_i e x_j . Note que, em geral, $\alpha_{ij} \neq \alpha_{ji}$. As coordenadas (x_1, x_2, x_3) e (x'_1, x'_2, x'_3) se relacionam entre si através das expressões,

$$x'_i = \sum_{j=1}^3 \cos \alpha_{ij} x_j \quad . \quad (3.20)^8$$

Ou, em forma mais compacta,

$$\{\mathbf{r}'\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{r}\} \quad (3.21)$$

onde,

⁸ $\cos \alpha_{ij}$ são os denominados cossenos diretores.

$$[\mathbf{B}] = [\cos\alpha_{ij}] \quad ; i, j = 1, 2, 3 \quad (3.22)$$

é a denominada *matriz de mudança de base*, formada pelos cossenos diretores $\cos\alpha_{ij}$.

Explicitamente,

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{11} & \cos\alpha_{12} & \cos\alpha_{13} \\ \cos\alpha_{21} & \cos\alpha_{22} & \cos\alpha_{23} \\ \cos\alpha_{31} & \cos\alpha_{32} & \cos\alpha_{33} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Considere agora dois vetores \mathbf{p} e \mathbf{q} relacionados entre si por uma matriz $[\mathbf{A}]$. Em notação matricial,

$$\{\mathbf{p}\} = [\mathbf{A}]\{\mathbf{q}\} \quad . \quad (3.24)$$

Cabe aqui determinar a matriz $[\mathbf{A}']$ correspondente à transformação de base. Pré-multiplicando a expressão (3.24) pela matriz $[\mathbf{B}]$ e introduzindo a matriz identidade de ordem 3, $[\mathbf{I}]$, entre $[\mathbf{A}]$ e $\{\mathbf{q}\}$, vem que

$$[\mathbf{B}]\{\mathbf{p}\} = [\mathbf{B}][\mathbf{A}][\mathbf{I}]\{\mathbf{q}\} .$$

Porém, $[\mathbf{I}] = [\mathbf{B}]^{-1}[\mathbf{B}]$ e, portanto,

$$[\mathbf{B}]\{\mathbf{p}\} = [\mathbf{B}][\mathbf{A}][\mathbf{B}]^{-1}[\mathbf{B}]\{\mathbf{q}\} .$$

resultando,

$$\{\mathbf{p}'\} = [\mathbf{A}']\{\mathbf{q}'\} \quad , \quad (3.25)$$

com,

$$[\mathbf{A}'] = [\mathbf{B}][\mathbf{A}][\mathbf{B}]^{-1} \quad (3.26)$$

No caso em estudo, onde o interesse reside na *matriz de inércia*, tem-se

$$[\mathbf{J}'_o] = [\mathbf{B}][\mathbf{J}_o][\mathbf{B}]^{-1} \quad (3.27)$$

Ainda, a matriz de mudança de base é ortogonal, posto que a transformação o é. Assim,

$$[\mathbf{B}]^{-1} = [\mathbf{B}]' \quad (3.28)$$

e portanto,

$$[\mathbf{J}'_o] = [\mathbf{B}][\mathbf{J}_o][\mathbf{B}]' \quad (3.29)$$

A matriz $[\mathbf{J}'_o]$ é, portanto, a matriz de inércia calculada no sistema (O', x'_1, x'_2, x'_3) .

Quando diagonal, a matriz de inércia é dita relativa a *eixos principais de inércia*. Se, além disso, o pólo O coincidir com o centro de massa G do corpo, os eixos são ditos *centrais de inércia*.

Como será visto adiante, qualquer eventual eixo de simetria ocorrente na distribuição de massa do corpo será um *eixo principal de inércia*. Para corpos de forma geométrica simples, com distribuição homogênea de massa, é relativamente fácil identificar eixos principais de inércia. Para um caso mais geral, ou ao menos mais complexo, nem sempre é imediato identificar elementos de simetria. É assim interessante determinarmos eixos principais de inércia. Existe uma transformação particular que

diagonaliza a matriz de inércia, transformando-a em uma *matriz principal de inércia*.

Seja $[\mathbf{P}]$ a matriz de mudança de base que diagonaliza $[\mathbf{J}_o]$. Então,

$$[\mathbf{J}_o^p] = [\mathbf{P}][\mathbf{J}_o][\mathbf{P}]^t \quad (3.30)$$

Está fora do escopo do presente texto uma análise aprofundada do presente problema.

Pede-se ao leitor mais interessado que consulte textos específicos, de álgebra-linear.

Cabe ressaltar, no entanto, que a matriz $[\mathbf{P}]$ é formada pelos *auto-vetores da matriz*

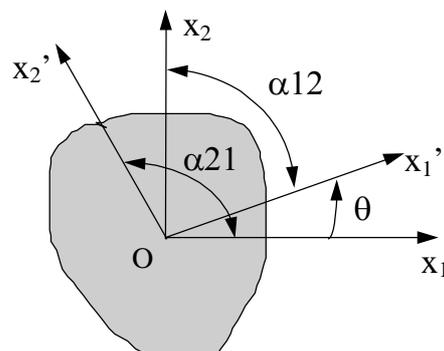
$[\mathbf{J}_o]$. Ou seja,

$$[\mathbf{P}] = \begin{bmatrix} \{\mathbf{p}_1\}^t \\ \{\mathbf{p}_2\}^t \\ \{\mathbf{p}_3\}^t \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

onde $\{\mathbf{p}_i\}$; $i = 1,2,3$ são os autovetores correspondentes aos auto-valores λ_i ; $i = 1,2,3$ da matriz $[\mathbf{J}_o]$.

Exemplo 2.1 - Dada a matriz de inércia $\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & I_{22} \end{pmatrix}$ da figura plana abaixo nos eixos

Ox_1x_2 calcule a matriz segundo os eixos $Ox'_1x'_2$. Em seguida, calcule θ para que o sistema $Ox'_1x'_2$ seja de eixos principais.



Como:

$$x_1' = \cos \theta x_1 + \operatorname{sen} \theta x_2$$

$$x_2' = -\operatorname{sen} \theta x_1 + \cos \theta x_2$$

logo, $[B] = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Pode-se então escrever:

$$[I'_o] = [B]^T [I_o] [B]$$

Realizando as multiplicações, obtêm-se:

$$I'_{11} = I_{11} \cos^2 \theta + I_{22} \operatorname{sen}^2 \theta + 2I_{12} \cos \theta \operatorname{sen} \theta$$

$$I'_{22} = I_{11} \operatorname{sen}^2 \theta + I_{22} \cos^2 \theta - 2I_{12} \cos \theta \operatorname{sen} \theta$$

$$I'_{12} = -I_{11} \operatorname{sen} \theta \cos \theta + I_{22} \operatorname{sen} \theta \cos \theta + I_{12} \cos^2 \theta - I_{21} \operatorname{sen}^2 \theta = I'_{21}$$

Para que os eixos sejam principais:

$$I_{12} = 0 \Rightarrow (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) I_{12} = \operatorname{sen} \theta \cos \theta (I_{11} - I_{22})$$

$\tan 2\theta = \frac{2I_{12}}{I_{11} - I_{22}}$, que fornece o ângulo que orienta os eixos principais.

3.2.3. Propriedades da Matriz de Inércia

A matriz de inércia goza de diversas propriedades.

- *Simetria*

A matriz de inércia é simétrica. De fato, a própria definição dos produtos de inércia (3.18) e a propriedade comutativa da operação de multiplicação demonstram este fato.

- *Invariância do traço*

O traço da matriz de inércia é invariante com respeito à mudança de base. De fato,

de (3.16) e (3.17) segue que,

$$J_x + J_y + J_z = 2I_O \quad (3.32)$$

qualquer que seja o sistema (O, x, y, z) escolhido.

- *Positividade*

A matriz de inércia é definida positiva. De fato, os momentos de inércia são formas quadráticas e portanto, excetuando-se o caso (idealizado) em que todos os pontos se distribuam sobre o mesmo eixo, são sempre positivos. Por outro lado a matriz de inércia pode ser diagonalizada e, como o traço da matriz é invariante, seu determinante será sempre maior ou igual a zero.

- *Composição*

Considere uma partição do corpo em N sub-conjuntos. Da definição dos momentos e produtos de inércia (3.16) e (3.18) e da propriedade associativa da operação de integração é possível decompor estas grandezas de forma correspondente à partição considerada. De fato,

$$J_x = \int_{\text{Corpo}} (y^2 + z^2) dm = \sum_{j=1}^N \int_{C_j} (y^2 + z^2) dm \quad (3.33)$$

$$J_{xy} = - \int_{\text{Corpo}} xy dm = - \sum_{j=1}^N \int_{C_j} xy dm$$

onde C_j indica a j -ésima partição do corpo. A expressão acima obviamente vale, de forma análoga, para os demais momentos e produtos de inércia. Decorre, também, a propriedade subtrativa. Isto é, definindo o corpo de interesse C_A a partir da decomposição de um corpo C tal que $C = C_A \cup C_B$ segue, por exemplo, que

$$J_x^{C_A} = J_x^C - J_x^{C_B} \quad , \quad (3.34)$$

o mesmo valendo para os demais elementos da matriz de inércia.

- *Translação de Eixos*

Considere um corpo e dois sistemas de coordenadas cartesianas (x, y, z) e (x', y', z') , paralelos entre si, com origem O e O' respectivamente. Seja $(O' - O) = (a, b, c)$ o vetor de posição relativa, expresso na base que orienta ambos os sistemas de coordenadas. Tomando o momento de inércia do corpo em relação ao eixo $O'x'$, por exemplo, segue então, da definição que,

$$\begin{aligned} J_{x'_i} &= \int_{\text{Corpo}} (y'^2 + z'^2) dm = \int_{\text{Corpo}} ((y-b)^2 + (z-c)^2) dm = \\ &= \int_{\text{Corpo}} (y^2 + z^2) dm + (b^2 + c^2) \int_{\text{Corpo}} dm - 2b \int_{\text{Corpo}} y dm - 2c \int_{\text{Corpo}} z dm \end{aligned} \quad (3.35)$$

Por outro lado, da definição da posição do centro de massa, calculada em relação ao ponto O ,

$$\begin{aligned}
mx_G &= \int_{\text{Corpo}} x dm \\
my_G &= \int_{\text{Corpo}} y dm \\
mz_G &= \int_{\text{Corpo}} z dm
\end{aligned} \tag{3.36}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
J_{x'} &= J_x + m(b^2 + c^2) - 2mby_G - 2mcz_G \\
J_{y'} &= J_y + m(c^2 + a^2) - 2mcz_G - 2max_G \\
J_{z'} &= J_z + m(a^2 + b^2) - 2max_G - 2mby_G
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Note a permutação cíclica que, uma vez mais, comparece na expressão acima. Caso o ponto O seja o próprio centro de massa, ou seja, se $O \equiv G$, a equação acima fica simplificada na forma

$$\begin{aligned}
J_{x'} &= J_{Gx} + m(b^2 + c^2) \\
J_{y'} &= J_{Gy} + m(c^2 + a^2) \\
J_{z'} &= J_{Gz} + m(a^2 + b^2)
\end{aligned} \tag{3.38}$$

A equação (3.38) também é conhecida como Teorema de Steiner. Permite enunciar a seguinte assertiva: “*uma vez definidas as direções dos eixos, os respectivos momentos de inércia serão mínimos se a origem for o baricentro*”.

Por outro lado, tomando, por exemplo, o produto de inércia em relação aos eixos $(O'x'y')$,

$$\begin{aligned}
J_{x'y'_i} &= - \int_{\text{Corpo}} x'y' dm = - \int_{\text{Corpo}} ((x-a)(y-b)) dm = \\
&= - \int_{\text{Corpo}} xy dm - ab \int_{\text{Corpo}} dm + b \int_{\text{Corpo}} x dm + a \int_{\text{Corpo}} y dm
\end{aligned} \tag{3.39}$$

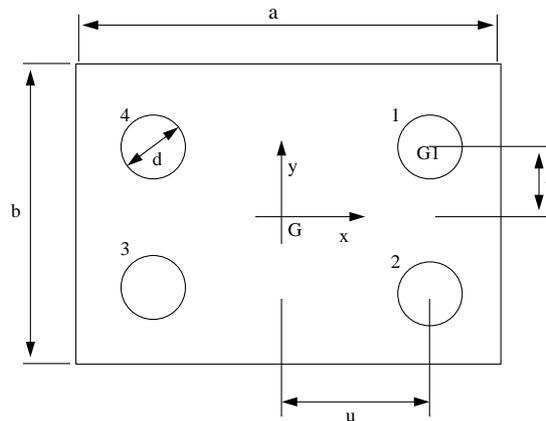
utilizando (3.36) e generalizando para os demais eixos,

$$\begin{aligned}
 J_{x'y'} &= J_{xy} - mab + mbx_G + may_G \\
 J_{y'z'} &= J_{yz} - mbc + mcy_G + mbz_G \\
 J_{z'x'} &= J_{zx} - mca + maz_G + mcx_G
 \end{aligned} \quad . \quad (3.40)$$

Novamente, caso $O \equiv G$, as equações são simplificadas na forma,

$$\begin{aligned}
 J_{x'y'} &= J_{xy} - mab \\
 J_{y'z'} &= J_{yz} - mbc \\
 J_{z'x'} &= J_{zx} - mca
 \end{aligned} \quad . \quad (3.41)$$

Exemplo 2.2 - Uma chapa de aço possui quatro furos simetricamente distribuídos. Calcule a matriz de inércia para em relação aos eixos $Gxyz$ indicados na figura.



A matriz de inércia da chapa pode ser calculada como a diferença entre a matriz de inércia de uma chapa inteira, de lados a e b , e a matriz de inércia de quatro discos de diâmetro d distantes u do eixo y e v do eixo x .

$$[\mathbf{J}_G] = [\mathbf{J}_G^{\text{int}}] - [\mathbf{J}_G^{\text{disco1}}] - [\mathbf{J}_G^{\text{disco2}}] - [\mathbf{J}_G^{\text{disco3}}] - [\mathbf{J}_G^{\text{disco4}}]$$

Como, devido à simetria, G é o baricentro tanto da chapa recortada como da inteira. Assim:

$$[\mathbf{J}_G^{\text{int}}] = \rho ab \begin{pmatrix} \frac{b^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2 + b^2}{12} \end{pmatrix}, \text{ sendo } \rho \text{ a densidade superficial de massa}$$

da chapa.

Para o disco 1, superior à direita, o cálculo de sua matriz de inércia, envolve a translação do sistema de eixos, do sistema que contém seu baricentro (G_1) para o , em relação a $Gxyz$. Logo:

$$[\mathbf{J}_G^{\text{Disco1}}] = \rho \frac{\pi d^2}{4} \begin{pmatrix} \frac{d^2}{16} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d^2}{16} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d^2}{8} \end{pmatrix} + \rho \frac{\pi d^2}{4} \begin{pmatrix} v^2 & -uv & 0 \\ -uv & u^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{J}_G^{\text{Disco1}}] = \rho \frac{\pi d^2}{4} \begin{pmatrix} \frac{d^2}{16} + v^2 & -uv & 0 \\ -uv & \frac{d^2}{16} + u^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d^2}{8} \end{pmatrix}$$

Analogamente para os discos 2,3 e 4 temos:

$$[\mathbf{J}_G^{\text{Disco2}}] = \rho \frac{\pi d^2}{4} \begin{pmatrix} \frac{d^2}{16} + v^2 & uv & 0 \\ uv & \frac{d^2}{16} + u^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d^2}{8} \end{pmatrix} \quad [\mathbf{J}_G^{\text{Disco3}}] = \rho \frac{\pi d^2}{4} \begin{pmatrix} \frac{d^2}{16} + v^2 & -uv & 0 \\ -uv & \frac{d^2}{16} + u^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d^2}{8} \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{J}_G^{\text{Disco4}}] = \rho \frac{\pi d^2}{4} \begin{pmatrix} \frac{d^2}{16} + v^2 & uv & 0 \\ uv & \frac{d^2}{16} + u^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d^2}{8} \end{pmatrix}$$

Assim, pode-se calcular a matriz de inércia total. Notar que esta será diagonal, ou seja, os produtos de inércia serão nulos (lembrar da simetria).

3.2.4. Elipsóide de Inércia

Considere, novamente, um eixo $O\mathbf{u}$, orientado pelos cossenos diretores de \mathbf{u} , i.e., $\mathbf{u} = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}$. Deseja-se expressar o momento de inércia do corpo em relação ao eixo $O\mathbf{u}$. Para tanto, calculando

$$\begin{aligned} (P - O) \wedge \mathbf{u} &= (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \wedge (\cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}) = \\ &= (y \cos \gamma - z \cos \beta)\mathbf{i} + (z \cos \alpha - x \cos \gamma)\mathbf{j} + (x \cos \beta - y \cos \alpha)\mathbf{k} \end{aligned} \quad (3.42)$$

o quadrado da distância de um ponto genérico P a este eixo fica dado por,

$$d_u^2 = ((P - O) \wedge \mathbf{u})^2 = (y \cos \gamma - z \cos \beta)^2 + (z \cos \alpha - x \cos \gamma)^2 + (x \cos \beta - y \cos \alpha)^2 \quad (3.43)$$

que pode ser reescrito na forma,

$$\begin{aligned} d_u^2 &= (\cos^2 \alpha)(y^2 + z^2) + (\cos^2 \beta)(z^2 + x^2) + (\cos^2 \gamma)(x^2 + y^2) - \\ &\quad - 2(\cos \alpha \cos \beta)xy - 2(\cos \alpha \cos \gamma)zx - 2(\cos \beta \cos \gamma)yz \end{aligned} \quad (3.44)$$

Assim, substituindo (3.44) em (3.14),

$$\begin{aligned} J_u &= \cos^2 \alpha \int_{\text{Corpo}} (y^2 + z^2) dm + \cos^2 \beta \int_{\text{Corpo}} (z^2 + x^2) dm + \cos^2 \gamma \int_{\text{Corpo}} (x^2 + y^2) dm + \\ &\quad - 2 \cos \alpha \cos \beta \int_{\text{corpo}} xy dm - 2 \cos \alpha \cos \gamma \int_{\text{corpo}} xz dm - 2 \cos \beta \cos \gamma \int_{\text{corpo}} yz dm \end{aligned}$$

Ou seja,

$$J_u = (\cos^2 \alpha)J_x + (\cos^2 \beta)J_y + (\cos^2 \gamma)J_z + 2(\cos \alpha \cos \beta)J_{xy} + 2(\cos \alpha \cos \gamma)J_{xz} + 2(\cos \beta \cos \gamma)J_{yz} \quad (3.45)$$

Sejam então as variáveis,

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\cos \alpha}{\sqrt{J_u}} \\ \psi &= \frac{\cos \beta}{\sqrt{J_u}} \\ \zeta &= \frac{\cos \gamma}{\sqrt{J_u}} \end{aligned} \quad (3.46)$$

A equação (3.45) pode ser escrita na forma,

$$J_{xx}\xi^2 + J_{yy}\psi^2 + J_{zz}\zeta^2 + 2J_{xy}\xi\psi + 2J_{xz}\xi\zeta + 2J_{yz}\psi\zeta = 1 \quad (3.47)$$

que é a equação de um elipsóide, nas variáveis (ξ, ψ, ζ) . Este elipsóide recebe o nome de *elipsóide de inércia*. Em particular, se (x, y, z) forem eixos principais de inércia ($J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$), a equação se reduz a,

$$J_{xx}^p \xi^2 + J_{yy}^p \psi^2 + J_{zz}^p \zeta^2 = 1 \quad (3.48)$$

3.3. TEOREMA DA VARIAÇÃO DA ENERGIA CINÉTICA

Considere um corpo material em movimento em relação a um referencial inercial. Conforme visto anteriormente, a energia cinética deste corpo, relativamente ao referencial considerado, pode ser expressa na forma da equação (3.2). Derivando-a em relação ao tempo, tem-se que,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\text{Corpo}} v^2 dm = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\text{Corpo}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) dm \quad . \quad (3.49)$$

Assumindo a invariância da distribuição de massa, a taxa de variação da energia cinética em relação ao tempo pode ser expressa na forma,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} \int_{\text{Corpo}} \frac{d}{dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) dm = \frac{1}{2} \int_{\text{Corpo}} 2 \left(\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) dm = \int_{\text{Corpo}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} dm \quad (3.50)$$

Pela segunda Lei de Newton, aplicada a cada elemento de massa dm , tem-se, por outro lado que

$$d\mathbf{F} = \mathbf{a} dm \quad . \quad (3.51)$$

Particionando, ainda, o sistema de forças em externas e internas,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} dm = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{F} = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{F}^{ext} + \mathbf{v} \cdot d\mathbf{F}^{int} \quad . \quad (3.52)$$

As duas parcelas da equação acima podem ser identificadas com a potência das forças elementares externas e internas, dW^{ext} e dW^{int} , respectivamente. Assim, substituindo a expressão acima em (3.50) tem-se,

$$\frac{dT}{dt} = \int_{Corpo} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{F}^{ext} + \int_{Corpo} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{F}^{int} = \int_{Corpo} dW^{ext} + \int_{Corpo} dW^{int} \quad (3.53)$$

que integrada no tempo, entre um instante inicial t_0 , arbitrariamente escolhido e um instante genérico t fornece,

$$T - T_0 = \tau^{ext}(t_0; t) + \tau^{int}(t_0; t) \quad , \quad (3.54)$$

ou seja, a variação de energia cinética é igual ao trabalho realizado pelas forças externas e internas entre os instantes considerados. Este enunciado é conhecido como Teorema da Variação da Energia Cinética.

Particularmente *para um corpo rígido*, no entanto, e dentro da validade do princípio de ação e reação da mecânica, *o trabalho das forças internas se anula*. A demonstração deste fato, é relativamente simples. Considere, para tanto, dois elementos pontuais distintos, constituintes do mesmo C.R., identificados respectivamente pelos pontos P_i e P_j .

Seja $\mathbf{f}_{ij} = f_{ij} \frac{(P_i - P_j)}{|P_i - P_j|} = f_{ij} \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}}$ a força de interação entre estes pontos, onde foi

implicitamente admitido válido o Princípio de Ação e Reação da Mecânica, isto é, $\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji}$.

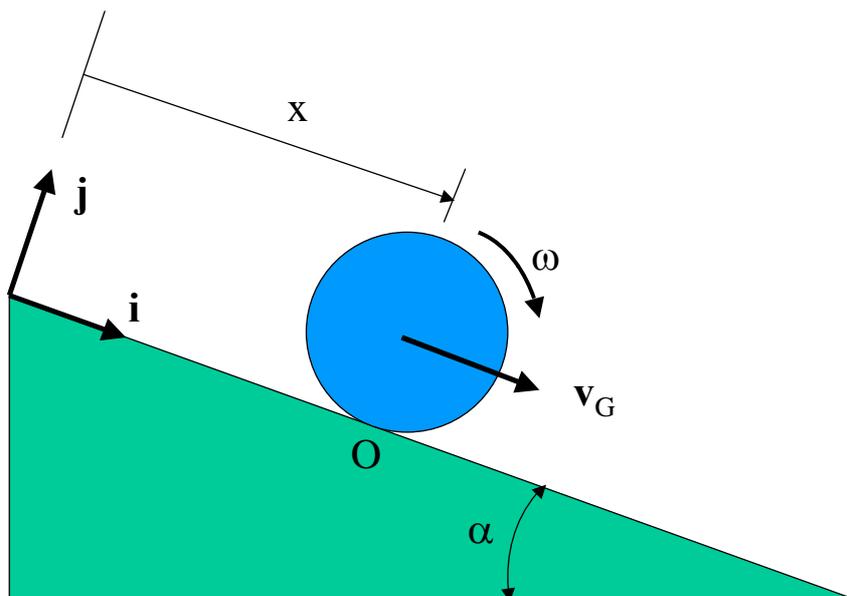
Assim,

$$\begin{aligned}
\tau^{int}(t_0; t) &= \int_0^t \left(\int_{Corpo} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{F}^{int} \right) dt = \int_{Corpo} dP \cdot d\mathbf{F}^{int} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \mathbf{f}_{ij} \cdot \delta P_i = \\
&= \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \mathbf{f}_{ij} \cdot \delta(P_i - P_j) = \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N f_{ij} \frac{(P_i - P_j)}{|P_i - P_j|} \cdot \delta(P_i - P_j) =, \\
&= \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \frac{f_{ij}}{|P_i - P_j|} \frac{1}{2} (\delta(P_i - P_j))^2
\end{aligned}$$

onde o processo limite $N \rightarrow \infty$ deve ser entendido simultaneamente a $\delta V \rightarrow 0$, onde δV é o volume do elemento de massa considerado. Da propriedade fundamental de um C.R., pela qual a distância relativa entre dois pontos quaisquer deste corpo é invariante, ou seja, $(P_i - P_j)^2 = cte$, segue a assertiva proposta, i.e.,

$$\tau^{int}(t_0; t) = 0 \quad . \quad (3.55)$$

Exemplo 2.3 - Um disco homogêneo de massa m e raio R rola sem escorregar em um plano inclinado. No instante inicial ele possuía velocidade angular ω_0 e estava na posição x_0 . Calcule a velocidade angular ω em função da posição x , a aceleração angular $\dot{\omega}$ e as forças externas que agem sobre o disco.



Cinemática

$$\Omega = -\omega \mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_O + \Omega \wedge (R\mathbf{j})$$

$$\text{como } \mathbf{v}_O = 0$$

$$\mathbf{v}_G = \omega R \mathbf{i}$$

Cálculo da Energia Cinética T

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2} \{\Omega\}^T [J_G] \{\Omega\}$$

$[J_G]$ é o tensor de inércia do disco em relação a eixos que passam por G e paralelos a $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Como tais eixos são principais (simetria) tem-se:

$$[J_G] = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}$$

Utilizando as equações acima obtém-se:

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 (mR^2 + J_z)$$

Para um disco homogêneo $J_z = \frac{mR^2}{2}$, assim:

$$T = \frac{3}{4} mR^2 \omega^2$$

Cálculo do trabalho das forças externas

A única força que realiza trabalho é o peso. A força de atrito atua sobre um ponto com velocidade nula e a força normal é perpendicular ao deslocamento. Assim:

$$\tau^{ext} = mg(x - x_0) \operatorname{sen} \alpha$$

Teorema da Variação da Energia Cinética

$$T - T_0 = \tau^{ext}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4g}{3R^2}(x - x_0) \operatorname{sen} \alpha$$

Derivando a equação acima e observado que $\dot{x} = v_G = \omega R$:

$$2\omega\dot{\omega} = \frac{4g}{3R^2}\dot{x} \operatorname{sen} \alpha$$

$$\dot{\omega} = \frac{2g}{3R} \operatorname{sen} \alpha$$

Cálculo das reações

Utilizando o teorema do baricentro:

$$m\mathbf{a}_G = \sum \mathbf{F}^{ext}$$

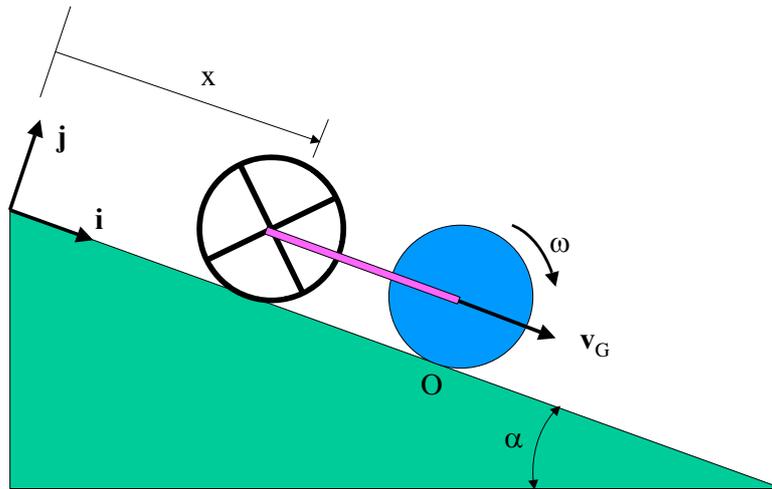
como $\mathbf{a}_G = \dot{\omega}R\mathbf{i}$:

$$(mg \operatorname{sen} \alpha - fat)\mathbf{i} + (N - mg \cos \alpha)\mathbf{j} = mR\dot{\omega}\mathbf{i}$$

$$N = mg \cos \alpha$$

$$fat = \frac{1}{3}mg \operatorname{sen} \alpha$$

Exemplo 2.4 - Um disco de massa m e raio R rola sem escorregar unido por uma barra a um anel de mesma massa e raio num plano inclinado. Calcular a aceleração do conjunto.



Cinemática:

$$\mathbf{v}_G^{Anel} = \mathbf{v}_G^{Disco} = v\mathbf{i}$$

$$\omega_{Anel} = \omega_{Disco} = \omega$$

$$\omega = \frac{v}{R}$$

Cálculo da Energia Cinética:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_z^{Disco}\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_z^{Anel}\omega^2$$

$$T = mv^2\left(1 + \frac{J_z^{Disco}}{2R^2} + \frac{J_z^{Anel}}{2R^2}\right)$$

$$\text{Como } J_z^{Disco} = \frac{mR^2}{2} \text{ e } J_z^{Anel} = mR^2:$$

$$T = \frac{7}{4}mv^2$$

Cálculo do trabalho das forças externas:

Como no exemplo anterior, as únicas forças que realizam trabalho são as forças pesos. Assim:

$$\tau^{\text{ext}} = 2mg(x - x_0) \text{sen } \alpha$$

Teorema da Variação da Energia Cinética:

$$\frac{7}{4}m(v^2 - v_0^2) = 2mg(x - x_0) \text{sen } \alpha$$

$$v^2 = v_0^2 + \frac{8g}{7}(x - x_0) \text{sen } \alpha$$

Observando que $\dot{x} = v$

$$2v\dot{v} = \frac{8g}{7}\dot{x} \text{sen } \alpha$$

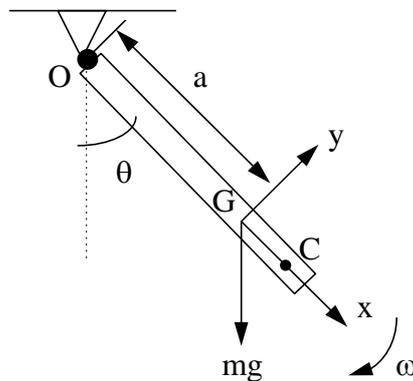
$$\dot{v} = \frac{4g}{7} \text{sen } \alpha$$

que é a expressão procurada.

Exemplo 2.5 - O pêndulo composto abaixo possui massa m e momento de inércia J_G e parte do repouso da posição θ_0 . Calcule:

a) ω em função de θ

b) comprimento efetivo do pêndulo (l_{ef})



a) Sendo $\rho_G^2 = \frac{J_G}{m}$ o raio de giração do corpo, tem-se:

$$T = \frac{1}{2} J_O \omega^2 = \frac{1}{2} (J_G + ma^2) \omega^2 = \frac{1}{2} m (\rho_G^2 + a^2) \omega^2$$

$$\tau(0, t) = \tau(\theta_0, \theta) = - \int_{\theta_0}^{\theta} mg \sin \beta d\beta = mga (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

Pelo Teorema da Variação da Energia Cinética:

$$T - T_0 = \tau(\theta_0, \theta)$$

Das condições iniciais $\theta(0) = \theta_0$ e $\dot{\theta}(0) = 0$ segue que:

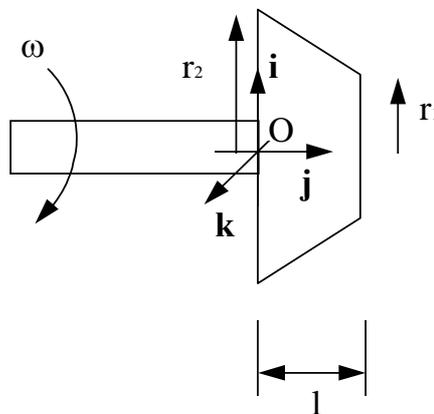
$$\omega^2 = \frac{2ga}{(\rho_G^2 + a^2)} (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

b) Para um pêndulo simples, sabe-se que $\omega^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_0)$. Por analogia, o comprimento efetivo de um pêndulo composto é o comprimento que um pêndulo simples deveria ter para se comportar da mesma maneira. Assim:

$$l_{ef} = \frac{\rho_G^2 + a^2}{a} = \frac{\rho_G^2}{a} + a$$

Pela equação acima pode-se verificar que tanto faz o pêndulo ser suspenso por um ponto O que dista a de G quanto por um ponto C que dista $\frac{\rho_G^2}{a}$; o comprimento efetivo seria o mesmo, logo, teriam o mesmo comportamento.

Exemplo 2.6 - Calcule a energia cinética de uma engrenagem cônica de um diferencial girando com velocidade angular ω em torno de seu eixo. A engrenagem possui massa m e suas dimensões estão indicadas na figura.



Cinemática

$$\Omega = \omega \mathbf{j}$$

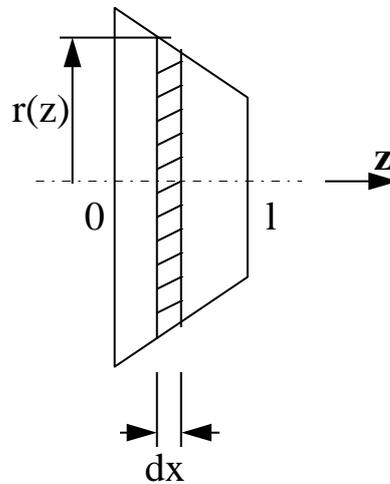
Energia Cinética

Tomando como pólo para cálculo da energia cinética qualquer ponto do eixo de rotação da engranagem, tem-se:

$$T = \frac{1}{2} \{\Omega\}' [J_o] \{\Omega\}$$

na qual $[J_o]$ é a matriz de inércia com relação à $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ indicados na figura. A fórmula acima é válida pois o ponto O tem velocidade nula. Observando que $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ são eixo principais de inércia (simetria) (3.12) se reduz a:

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2$$



Para o cálculo de J_z , deve-se observar que a engrenagem é composta por uma infinidade de discos de espessura diferencial dx e raio dado por:

$$r(z) = r_2 - \frac{z}{l}(r_2 - r_1)$$

O momento de inércia de um disco em torno do eixo Oz é dado por $dI_z = \frac{dm \cdot r^2(z)}{2}$. Pela propriedade de composição da matriz de inércia, J_z da engrenagem é dado por:

$$J_z = \int_{\text{Corpo}} dI_z = \int_0^l \frac{r^2(z)}{2} dm$$

Como $dm = \rho \cdot \pi \cdot r^2(z) \cdot dz$ sendo ρ a densidade do material, a integral pode ser escrita como:

$$J_z = \int_0^l \frac{\rho\pi}{2} r^4(z) dz$$

Realizando a mudança de variável:

$$dz = -\frac{l}{r_2 - r_1} dr$$

obtem-se:

$$J_z = \frac{\rho\pi l}{10(r_2 - r_1)} (r_2^5 - r_1^5)$$

Observando que a massa m da engrenagem é dada por:

$$m = \int_{\text{Corpo}} dm = \frac{\rho\pi l}{3(r_2 - r_1)} (r_2^3 - r_1^3)$$

obtem-se:

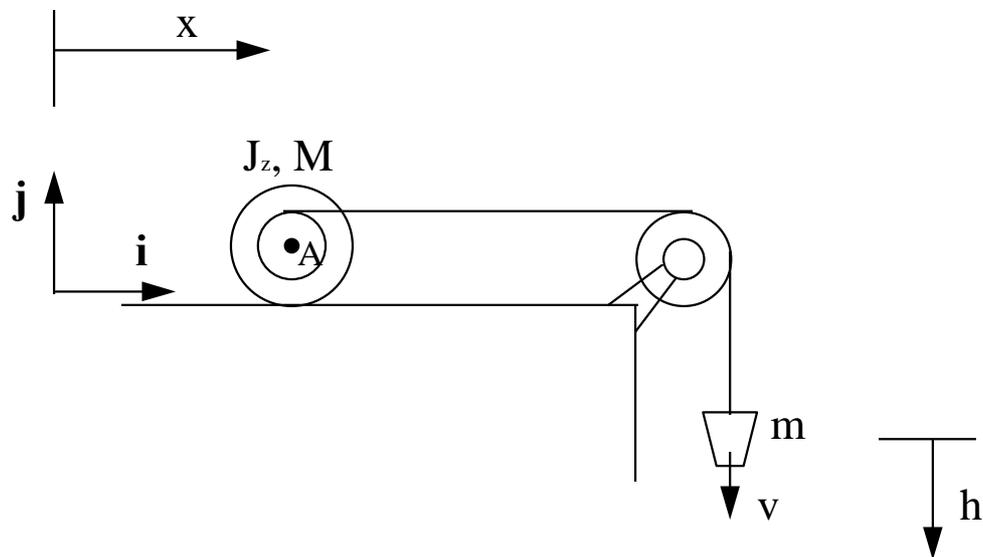
$$J_z = \frac{3m}{10} \frac{(r_2^5 - r_1^5)}{(r_2^3 - r_1^3)}$$

Assim, a energia cinética é dada por:

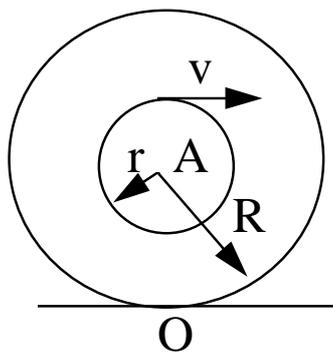
$$T = \frac{3m}{20} \frac{(r_2^5 - r_1^5)}{(r_2^3 - r_1^3)} \omega^2$$

Exemplo 2.7 - Um carretel de massa M , momento de inércia J_z em relação ao eixo Ak , raio maior R e raio menor r rola sem escorregar num plano horizontal. A ele liga-se um contrapeso de massa m . Considerando a polia e o fio ideais, calcule:

- aceleração do contrapeso
- aceleração angular do carretel
- tração no fio



Cinemática



Observando a figura acima:

$$v\mathbf{i} = (R + r)\omega\mathbf{i}$$

$$\omega = \frac{v}{R + r}$$

$$v_A\mathbf{i} = \omega R\mathbf{i}$$

Cálculo da Energia Cinética

$$T = \frac{1}{2}J_z\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_A^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Utilizando as equações acima:

$$T = \frac{1}{2}\left[\frac{J_z + MR^2}{(R + r)^2} + m\right]v^2$$

Cálculo do trabalho das forças externas

A única força que realiza trabalho é o peso da massa m .

$$\tau = mg(h - h_0)$$

Teorema da Variação da Energia Cinética

$$\frac{1}{2}\left[\frac{J_z + MR^2}{(R + r)^2} + m\right]\cdot(v^2 - v_0^2) = mg(h - h_0)$$

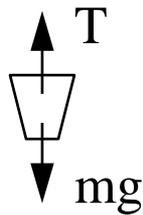
a) Derivando a equação acima, com $\dot{h} = v$:

$$\dot{v} = \frac{mg(R + r)^2}{J_z + MR^2 + m(R + r)^2}$$

b) Utilizando as relações cinamáticas:

$$\dot{\omega} = \frac{mg(R+r)}{J_z + MR^2 + m(R+r)^2}$$

c)



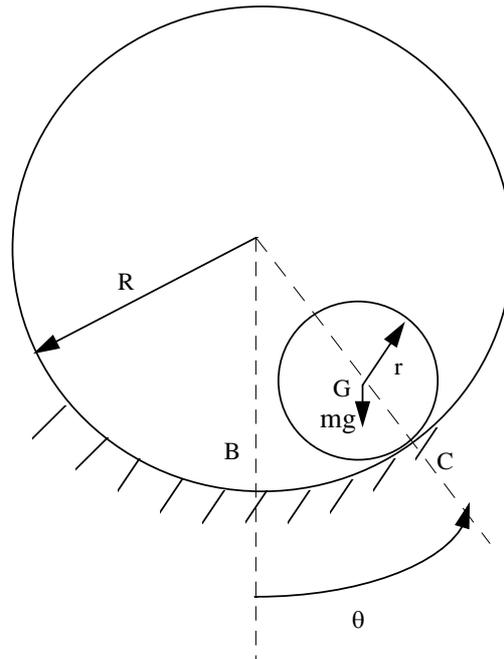
Para o contrapeso:

$$mg - T = m\dot{v}$$

Substituindo o valor de \dot{v} :

$$T = mg \frac{J_z + MR^2}{J_z + MR^2 + m(R+r)^2}$$

Exemplo 2.8 - Um cilindro de massa m rola sem escorregar no interior de um tambor de raio R . O cilindro é liberado do repouso da posição θ_0 . Calcule a velocidade do cilindro em função de θ e a reação vertical em B .



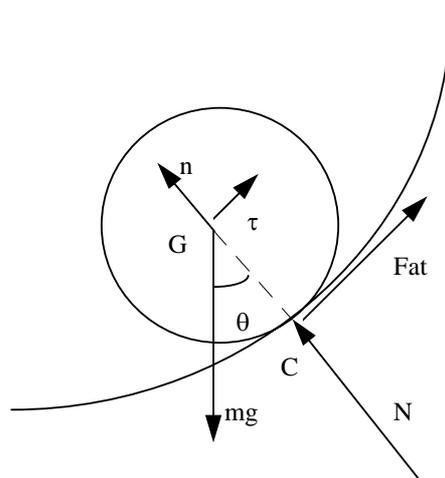
Denotando ω a velocidade angular do cilindro e como não existe escorregamento, temos que $v_G = \dot{\theta}(R - r) = \omega r$. Do Teorema da Energia Cinética:

$$T = \frac{1}{2} J_C \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} m r^2 \right) \omega^2 = \frac{3}{4} m r^2 \omega^2$$

$$\tau = - \int_{\theta_0}^{\theta} m g \operatorname{sen} \theta (R - r) d\theta = m g (R - r) (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

como $T - T_0 = \tau$ e $w = \frac{v_G}{r}$

$$v_G^2 = \frac{4}{3} g (R - r) (\cos \theta - \cos \theta_0)$$



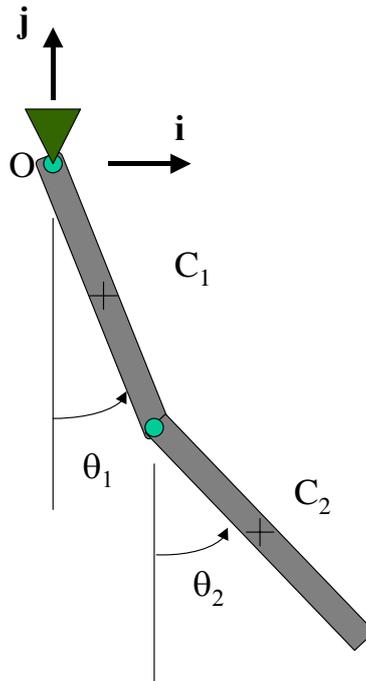
Pela figura acima, aplicando o Teorema do Movimento do Baricentro, notando que a aceleração normal vale $\frac{v_G^2}{(R-r)}$ tem-se:

$$m \frac{v_G^2}{(R-r)} = N - mg \cos \theta$$

Aplicando a expressão para v_G obtida acima:

$$N = mg \left(\frac{7}{3} \cos \theta - \frac{4}{3} \cos \theta_0 \right)$$

Exemplo 2.9 - Um pêndulo composto é formado por duas barras iguais de comprimento l e massa m unidas por articulações ideais. Deduza uma relação entre as variáveis θ_1 , θ_2 e suas derivadas, sendo que no instante inicial as barras estavam na posição inferior com velocidades angulares $\dot{\theta}_{1,0}$ e $\dot{\theta}_{2,0}$.



Cinemática:

$$\Omega_1 = \dot{\theta}_1 \mathbf{k}$$

$$\Omega_2 = \dot{\theta}_2 \mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}_{C1} = \mathbf{v}_O + \Omega_1 \wedge (C_1 - O)$$

$$\mathbf{v}_{C1} = \dot{\theta}_1 \frac{l}{2} (\cos \theta_1 \mathbf{i} + \sin \theta_1 \mathbf{j})$$

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \Omega_1 \wedge (A - O)$$

$$\mathbf{v}_A = \dot{\theta}_1 l (\cos \theta_1 \mathbf{i} + \sin \theta_1 \mathbf{j})$$

$$\mathbf{v}_{C2} = \mathbf{v}_A + \Omega_2 \wedge (C_2 - A)$$

$$\mathbf{v}_{c_2} = (\dot{\theta}_1 l \cos \theta_1 + \dot{\theta}_2 \frac{l}{2} \cos \theta_2) \mathbf{i} + (\dot{\theta}_1 l \sin \theta_1 + \dot{\theta}_2 \frac{l}{2} \sin \theta_2) \mathbf{j}$$

Cálculo da Energia Cinética:

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_{c_1}^2 + \frac{1}{2} J_z \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m \mathbf{v}_{c_2}^2 + \frac{1}{2} J_z \dot{\theta}_2^2$$

na qual J_z é tomado em relação ao centro de massa das barras.

Como $I_z = \frac{ml^2}{12}$ obtém-se, utilizando as relações acima:

$$T = \frac{ml^2}{6} (4\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) + \frac{ml^2}{2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Cálculo do trabalho das forças externas:

As reações nas articulações (supostas sem atrito) não realizam trabalho. As únicas forças que realizam trabalho são os pesos das barras. O trabalho realizado é igual à variação de energia potencial, tomando a posição inicial (inferior) como referência:

$$\tau = \frac{mgl}{2} (1 - \cos \theta_1) + \frac{mgl}{2} (1 - \cos \theta_2 + 2 \cdot (1 - \cos \theta_1))$$

$$\tau = \frac{mgl}{2} (4 - 3 \cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

Assim, a relação procurada é obtida pela aplicação do Teorema da Variação da Energia Cinética

$$T - T_0 = \tau$$

sendo T_0 obtida substituindo as condições iniciais $\dot{\theta}_{1,0}$ e $\dot{\theta}_{2,0}$ na expressão da energia cinética.

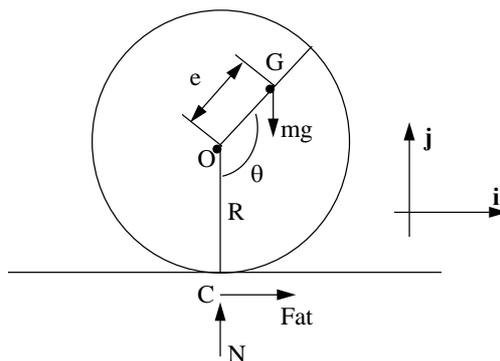
Exemplo 2.10 - Um disco excêntrico rola sem escorregar num plano horizontal.

Sendo dados o raio R , excentricidade e , massa m , momento de inércia J_O e $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$

calcule:

a) velocidade angular em função de θ

b) aceleração angular em função de θ



a) Energia Cinética:

$$T = \frac{1}{2} J_C \omega^2 = \frac{1}{2} \left(J_G + m(R^2 + e^2 - 2eR \cos \theta) \right) \omega^2$$

$$T = \frac{1}{2} \left(J_O - me^2 + m(R^2 + e^2 - 2eR \cos \theta) \right) \omega^2$$

$$T = \frac{1}{2} \left(J_O + m(R^2 - 2eR \cos \theta) \right) \omega^2$$

A única força que realiza trabalho é o peso:

$$\tau = - \int_{\theta_0}^{\theta} mge \sin \beta d\beta = mge(\cos \theta - \cos \theta_0)$$

Pelo Teorema da Energia, considerando que $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$ e $\omega(0) = 0$:

$$T - T_0 = \tau(\theta_0, \theta)$$

$$\omega^2 = \frac{2mge \cos \theta}{J_O + mR^2 - 2meR \cos \theta}$$

b) Derivando a expressão acima em relação ao tempo

$$\dot{\omega} = \frac{-mge \operatorname{sen} \theta (J_o + mR^2)}{(J_o + mR^2 - 2meR \cos \theta)^2}$$

4. MOMENTO ANGULAR DE UM CORPO RÍGIDO

4.1. MOMENTO ANGULAR E A MATRIZ DE INÉRCIA

Considere um corpo material, suposto rígido, de densidade de massa $\rho(\mathbf{r})$, onde $\mathbf{r} = (P - O)$ é o vetor de posição de um ponto P deste corpo a uma origem O , arbitrariamente escolhida. O momento angular de um elemento de massa $dm(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})dV$, relativamente ao pólo O , é dado por,

$$d\mathbf{K}_O = \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{r}}dm = \mathbf{r} \wedge \mathbf{v}dm = \mathbf{r} \wedge \mathbf{v}\rho(\mathbf{r})dV \quad (4.1)$$

onde dV indica o elemento de volume ocupado pelo corpo, suposto invariante no tempo, consistentemente à hipótese de corpo rígido. O momento angular do corpo em relação ao pólo O pode então ser posto na forma integral,

$$\mathbf{K}_O = \int_{\text{Corpo}} d\mathbf{K}_O = \int_{\text{Corpo}} (\mathbf{r} \wedge \mathbf{v})dm = \int_V (\mathbf{r} \wedge \mathbf{v})\rho dV \quad (4.2)$$

Tomando-se agora um ponto O' , pertencente ao corpo, o vínculo cinemático que caracteriza o campo de velocidades de um corpo rígido permite escrever,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{O}') = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}' \quad (4.3)$$

de tal forma que o momento angular fica expresso como,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_O &= \int_{\text{Corpo}} ((\mathbf{O}' - \mathbf{O}) + \mathbf{r}') \wedge \mathbf{v} dm = \\ &= \int_{\text{Corpo}} (\mathbf{O}' - \mathbf{O}) \wedge \mathbf{v} dm + \int_{\text{Corpo}} (\mathbf{r}' \wedge \mathbf{v}_{O'}) dm + \int_{\text{Corpo}} (\mathbf{r}' \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}')) dm \end{aligned} \quad (4.4)$$

Apesar de arbitrariamente escolhido, O' é um ponto pertencente ao corpo bem determinado. Os dois primeiros termos da equação (4.4) podem ser reescritos, fatorando-se das integrais as parcelas que dependem de O' , o que fornece,

$$\mathbf{K}_O = (\mathbf{O}' - \mathbf{O}) \wedge \int_{\text{Corpo}} \mathbf{v} dm + \int_{\text{Corpo}} \mathbf{r}' dm \wedge \mathbf{v}_{O'} + \int_{\text{Corpo}} (\mathbf{r}' \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}')) dm \quad (4.5)$$

A expressão (4.5) pode ser simplificada ainda mais. Da definição de centro de massa (ver (2.2)),

$$\int_V \mathbf{r}' \rho dV = \int_{\text{Corpo}} \mathbf{r}' dm = m(\mathbf{G} - \mathbf{O}') \quad (4.6)$$

e também,

$$\mathbf{Q} = \int_{\text{Corpo}} \mathbf{v} dm = m\mathbf{v}_G \quad (4.7).$$

Portanto,

$$\mathbf{K}_O = \mathbf{Q} \wedge (O - O') + m(G - O') \wedge \mathbf{v}_{O'} + \int_{\text{Corpo}} (\mathbf{r}' \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}')) dm \quad (4.8)$$

Alternativamente, aplicando-se mais uma vez a fórmula fundamental da cinemática de um C.R., entre os pontos O' e G vem então que

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_O &= m(O' - O) \wedge (\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (G - O')) + m(G - O') \wedge \mathbf{v}_{O'} + \int_{\text{Corpo}} (\mathbf{r}' \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}')) dm = \\ &= m(G - O) \wedge \mathbf{v}_{O'} + m(O' - O) \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge (G - O')) + \int_{\text{Corpo}} (\mathbf{r}' \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}')) dm \end{aligned} \quad (4.9)$$

Note que se o ponto O' for tomado coincidente com o centro de massa G , as expressões acima ficam simplificadas à forma,

$$\mathbf{K}_O = \mathbf{Q} \wedge (O - G) + \int_{\text{Corpo}} (\mathbf{r}' \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}')) dm \quad (4.10)$$

Se, por outro lado O for tomado como o próprio O' , a expressão (4.8) fica escrita

$$\mathbf{K}_{O'} = m(G - O') \wedge \mathbf{v}_{O'} + \int_{\text{Corpo}} (\mathbf{r}' \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}')) dm \quad (4.11)$$

Este termo corresponde ao momento angular do corpo relativamente ao pólo O' , que executa um movimento rígido solidário ao corpo. De (4.8) e (4.11), pode-se escrever, ainda que,

$$\mathbf{K}_O = \mathbf{K}_{O'} + (O' - O) \wedge \mathbf{Q} \quad (4.12)$$

É notável a similaridade da identidade acima com a *fórmula de mudança de pólo do momento de uma força*, ou com a fórmula que expressa o *vínculo cinemático de corpo rígido*. No presente caso a quantidade de movimento desempenha, matematicamente, o papel que a resultante \mathbf{R} ocupa na *fórmula de mudança de pólo* e a função que,

analogamente, o vetor de rotação $\boldsymbol{\Omega}$ tem na expressão do *vínculo cinemático de um C.R.* Esta similaridade não é fortuita, obviamente. Vale citar que é possível construir toda uma formalização matemática, à luz da álgebra vetorial, a partir da definição de momento de uma entidade vetorial.

Tomando-se, agora, um sistema (O', x', y', z') de coordenadas cartesianas, com origem coincidente instantaneamente⁹ com O' , tal que $\mathbf{r}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$ e $\boldsymbol{\Omega} = \omega_{x'}\mathbf{i} + \omega_{y'}\mathbf{j} + \omega_{z'}\mathbf{k}$, pode-se verificar¹⁰ que,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}') = & (\omega_{x'}y'^2 - \omega_{y'}x'y' + \omega_{x'}z'^2 - \omega_{z'}z'x')\mathbf{i} + \\ & + (\omega_{y'}z'^2 - \omega_{z'}y'z' + \omega_{y'}x'^2 - \omega_{x'}x'y')\mathbf{j} + \\ & + (\omega_{z'}x'^2 - \omega_{x'}z'x' + \omega_{z'}y'^2 - \omega_{y'}z'y')\mathbf{k} \end{aligned} \quad (4.13)$$

As três componentes cartesianas da segunda parcela $\mathbf{K}_{O'}^{(2)} = \int_{\text{Corpo}} (\mathbf{r}' \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}')) dm$,

do momento angular $\mathbf{K}_{O'}$, em (4.11), são então dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} K_{x'}^{(2)} &= \omega_{x'} \int_{\text{Corpo}} (y'^2 + z'^2) dm - \omega_{y'} \int_{\text{Corpo}} x'y' dm - \omega_{z'} \int_{\text{Corpo}} x'z' dm \\ K_{y'}^{(2)} &= -\omega_{x'} \int_{\text{Corpo}} y'x' dm + \omega_{y'} \int_{\text{Corpo}} (x'^2 + z'^2) dm - \omega_{z'} \int_{\text{Corpo}} y'z' dm \\ K_{z'}^{(2)} &= -\omega_{x'} \int_{\text{Corpo}} z'x' dm - \omega_{y'} \int_{\text{Corpo}} z'y' dm + \omega_{z'} \int_{\text{Corpo}} (x'^2 + y'^2) dm \end{aligned} \quad (4.14)$$

As integrais que comparecem em (4.14) são prontamente identificáveis como os momentos de massa de segunda ordem, calculados no sistema (O', x', y', z') . Os

⁹ O referencial pode ou não ser solidário ao corpo, como será visto adiante.

¹⁰ Lembre da identidade da álgebra vetorial $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$, de onde resulta que $\mathbf{r}' \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}') = \boldsymbol{\Omega}|\mathbf{r}'|^2 - \mathbf{r}'(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}')$.

termos da diagonal principal, conforme visto anteriormente, são os momentos de inércia $J_{x'}, J_{y'}, J_{z'}$ respectivamente e os demais são os produtos de inércia $J_{x'y'}, J_{y'z'}, J_{x'z'}$.

A equação (4.14) pode, portanto, ser posta na forma matricial,

$$\mathbf{K}_{O'}^{(2)} = [J_{O'}]\{\boldsymbol{\Omega}\} \quad (4.15)$$

onde $[J_{O'}]$ é a matriz de inércia do corpo, calculada segundo o sistema (O', x', y', z') . O momento angular $\mathbf{K}_{O'}$, pode ser escrito, a partir de (4.11) e (4.15), na forma ‘mista’

$$\mathbf{K}_{O'} = (G - O') \wedge m\mathbf{v}_{O'} + [J_{O'}]\{\boldsymbol{\Omega}\} \quad (4.16)$$

e que, se levada em, (4.12), conduz à forma geral,

$$\mathbf{K}_O = (G - O') \wedge m\mathbf{v}_{O'} + [J_{O'}]\{\boldsymbol{\Omega}\} + (O' - O) \wedge \mathbf{Q} \quad (4.17)$$

São notáveis os seguintes casos:

- (i) se $O' \equiv G$,

$$\mathbf{K}_O = (G - O) \wedge \mathbf{Q} + [J_G]\{\boldsymbol{\Omega}\}; \text{ se } O' \equiv G \quad ; \quad (4.18)$$

- (ii) se $O' \equiv O$, com O um ponto do corpo, ou se $\mathbf{v}_G = \mathbf{0}$, ou ainda se $\mathbf{v}_G \parallel (O' - O)$,

$$\mathbf{K}_{O'} = (G - O') \wedge m\mathbf{v}_{O'} + [J_{O'}]\{\boldsymbol{\Omega}\}; \text{ se } \mathbf{v}_G \wedge (O' - O) = \mathbf{0} \quad ; \quad (4.19)$$

- (iii) se $\mathbf{v}_{O'} = \mathbf{0}$ ou se $\mathbf{v}_{O'} \parallel (G - O')$

$$\mathbf{K}_O = (O' - O) \wedge \mathbf{Q} + [J_{O'}]\{\boldsymbol{\Omega}\}; \text{ se } \mathbf{v}_{O'} \wedge (G - O') = \mathbf{0} \quad ; \quad (4.20)$$

- (iv) se $O' \equiv O$ e O um ponto fixo, tal que $\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$,

$$\mathbf{K}_O = [J_O]\{\boldsymbol{\Omega}\}; \text{ se } O' \equiv O \text{ e } \mathbf{v}_O = \mathbf{0} \quad ; \quad (4.21)$$

- (v) se for escolhido $O' \equiv G \equiv O$

$$\mathbf{K}_G = [J_G]\{\boldsymbol{\Omega}\}; \text{ , válida sempre} \quad . \quad (4.22)$$

Esta última forma em geral reduz o trabalho algébrico, além de facilitar a interpretação física. Estabelece que o momento angular de um corpo rígido em relação ao seu centro de massa pode ser definido como o produto entre sua matriz de inércia e seu vetor de rotação.

Note que a matriz de inércia foi definida no sistema (x', y', z') , não necessariamente solidário ao corpo, no entanto. Há casos particulares em que a matriz de inércia é invariante relativamente a uma classe de sistemas não solidários ao corpo. Estes casos exibem axisimetria na distribuição de inércia e são, portanto, de fundamental importância prática. O pião simétrico é o mais importante deles.

4.2. TEOREMA DO MOMENTO ANGULAR

Considere um corpo rígido em movimento e um referencial inercial. Considere, também, um pólo O , em relação ao qual o momento angular do corpo será calculado. Tomando-se a expressão (4.2) dada na forma

$$\mathbf{K}_O = \int_{\text{Corpo}} ((P - O) \wedge \mathbf{v}) dm \quad (4.23)$$

e derivando-se em relação ao tempo¹¹ vem,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}_O &= \int_{\text{Corpo}} ((\mathbf{v} - \mathbf{v}_O) \wedge \mathbf{v}) dm + \int_{\text{Corpo}} ((P - O) \wedge \mathbf{a}) dm = \\ &= -\mathbf{v}_O \wedge \int_{\text{Corpo}} \mathbf{v} dm + \int_{\text{Corpo}} (P - O) \wedge d\mathbf{f} \end{aligned} \quad (4.24)$$

onde $-d\mathbf{f}$ é a força de inércia correspondente ao elemento diferencial de massa dm . Utilizando a expressão (4.7) e considerando que o sistema de forças internas é equivalente a zero, segue, do Princípio de D'Alembert, que,

$$\dot{\mathbf{K}}_O = m\mathbf{v}_G \wedge \mathbf{v}_O + \mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \mathbf{Q} \wedge \mathbf{v}_O + \mathbf{M}_O^{\text{ext}} \quad (4.25)$$

onde $\mathbf{M}_O^{\text{ext}}$ é o momento resultante do sistema de forças externas aplicadas ao corpo, calculado em relação ao pólo O . A equação (4.25) expressa o *Teorema do Momento Angular (TMA)*:

¹¹ (lembre que o corpo é suposto rígido, portanto sua forma e distribuição de massa não variam com o tempo)

“A taxa de variação temporal do momento angular de um corpo rígido em relação a um pólo O é igual ao momento, em relação ao mesmo pólo, de todas as forças externas sobre ele agentes somado ao produto vetorial de sua quantidade de movimento com a velocidade do pólo considerado”.

Caso o pólo considerado seja o próprio centro de massa o TMA assume a forma mais simples,

$$\dot{\mathbf{K}}_G = \mathbf{M}_G^{\text{ext}} \quad (4.26)$$

A expressão acima evidencia o seguinte fato: *se o momento das forças externas agentes sobre o corpo, calculado em relação ao centro de massa do corpo, for nulo, o momento angular relativamente a este mesmo centro será invariante no tempo, i.e., uma constante.* Diz-se, neste caso então, da conservação do momento angular.

Expressão análoga é válida quando o pólo O é fixo, ou mesmo quando este pólo tem velocidade paralela à velocidade do centro de massa,

$$\dot{\mathbf{K}}_O = \mathbf{M}_O^{\text{ext}}; \text{ se } \mathbf{v}_G \wedge \mathbf{v}_O = \mathbf{0} \quad (4.27)$$

Por outro lado, tomando a expressão (4.17) e derivando-a em relação ao tempo, segue que

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}_O &= (\mathbf{v}_G - \mathbf{v}_{O'}) \wedge m\mathbf{v}_{O'} + (G - O') \wedge m\mathbf{a}_{O'} + \frac{d}{dt}([J_{O'}]\{\Omega\}) \\ &\quad + (\mathbf{v}_{O'} - \mathbf{v}_O) \wedge \mathbf{Q} + (O' - O) \wedge \dot{\mathbf{Q}} \end{aligned}$$

que pode ainda ser simplificada e posta na forma

$$\dot{\mathbf{K}}_O = \mathbf{Q} \wedge \mathbf{v}_O + (G - O') \wedge m\mathbf{a}_{O'} + \frac{d}{dt}([J_{O'}]\{\Omega\}) + (O' - O) \wedge \dot{\mathbf{Q}}. \quad (4.28)$$

Identificando as expressões (4.25) e (4.28) segue, portanto, que,

$$(G - O') \wedge m \mathbf{a}_{O'} + (O' - O) \wedge \dot{\mathbf{Q}} + \frac{d}{dt}([J_{O'}]\{\boldsymbol{\Omega}\}) = \mathbf{M}_O^{\text{ext}} \quad , \quad (4.29)$$

ou, alternativamente:

$$(G - O') \wedge m \mathbf{a}_{O'} + (O' - O) \wedge m \mathbf{a}_G + \frac{d}{dt}([J_{O'}]\{\boldsymbol{\Omega}\}) = \mathbf{M}_O^{\text{ext}} \quad (4.30)$$

Considere agora o referencial do corpo, orientado por um sistema cartesiano com origem em O' , em relação ao qual a matriz de inércia seja invariante no tempo. Por certo este é um referencial conveniente. O último termo à esquerda da equação (4.28) fica então desenvolvido na forma,

$$\frac{d}{dt}([J_{O'}]\{\boldsymbol{\Omega}\}) = \boldsymbol{\Omega} \wedge ([J_{O'}]\{\boldsymbol{\Omega}\}) + \frac{d}{dt}([J_{O'}]\{\boldsymbol{\Omega}\})_{\text{mov}} \quad ,$$

onde o sub-índice 'mov' indica que a derivada temporal se faz no referencial móvel, no caso solidário ao corpo. Como a matriz de inércia é invariante com relação ao sistema de referências considerado, segue que,

$$\frac{d}{dt}([J_{O'}]\{\boldsymbol{\Omega}\}) = \boldsymbol{\Omega} \wedge ([J_{O'}]\{\boldsymbol{\Omega}\}) + [J_{O'}] \frac{d}{dt}(\{\boldsymbol{\Omega}\})_{\text{mov}} \quad (4.31)$$

Assim, a equação (4.30) toma a forma,

$$(O' - O) \wedge m \mathbf{a}_G + (G - O') \wedge m \mathbf{a}_{O'} + \boldsymbol{\Omega} \wedge ([J_{O'}]\{\boldsymbol{\Omega}\}) + [J_{O'}]\{\dot{\boldsymbol{\Omega}}\}_{\text{mov}} = \mathbf{M}_O^{\text{ext}} \quad . \quad (4.32)$$

Alternativamente,

$$(O' - O) \wedge \mathbf{R} + (G - O') \wedge m\mathbf{a}_{O'} + \Omega \wedge ([J_{O'}]\{\Omega\}) + [J_{O'}]\{\dot{\Omega}\}_{mov} = \mathbf{M}_{O'}^{\text{ext}}, \quad (4.33)$$

ou ainda,

$$\Omega \wedge ([J_{O'}]\{\Omega\}) + [J_{O'}]\{\dot{\Omega}\}_{mov} = \mathbf{M}_{O'}^{\text{ext}} + (O - O') \wedge \mathbf{R} + (O' - G) \wedge m\mathbf{a}_{O'}.$$

Identificando, nos dois primeiros termos do segundo membro da equação acima, a própria fórmula de mudança de pólo do momento de uma força, do ponto O para o ponto O' , segue também que,

$$\Omega \wedge ([J_{O'}]\{\Omega\}) + [J_{O'}]\{\dot{\Omega}\}_{mov} = \mathbf{M}_{O'}^{\text{ext}} + (O' - G) \wedge m\mathbf{a}_{O'} \quad (4.34)$$

Note ainda que, como no presente caso o vetor de rotação de arrastamento é o próprio vetor de rotação do corpo, ou seja, o referencial é solidário ao corpo, não é necessário distinguir a derivada temporal no que diz respeito ao referencial adotado¹². Neste caso a equação acima poderia ser escrita,

$$\Omega \wedge ([J_{O'}]\{\Omega\}) + [J_{O'}]\{\dot{\Omega}\} = \mathbf{M}_{O'}^{\text{ext}} + (O' - G) \wedge m\mathbf{a}_{O'} \quad (4.35)$$

Esta forma de apresentar o Teorema do Momento Angular é conhecida como *equação de Euler*, em homenagem ao grande mecanicista e matemático alemão.

A escolha $O' \equiv G$ é, mais uma vez, bastante conveniente. De fato, com $O' \equiv G$ e de (4.22) substituída em (4.34), tem-se a expressão mais simples, mas nem por isso menos geral,

¹² De fato, $\dot{\Omega} = \frac{d}{dt}(\Omega)_{mov} + \Omega \wedge \Omega = \frac{d}{dt}(\Omega)_{mov}$.

$$\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{K}_G + [J_G] \{\dot{\boldsymbol{\Omega}}\}_{mov} = \mathbf{M}_G^{\text{ext}} \quad (4.36)$$

Esta escolha é, em geral, a mais adequada.

Outro caso específico que merece destaque é,

- $O \equiv O'$ um ponto fixo, ou quando $(G - O') \wedge \mathbf{a}_{O'} \equiv \mathbf{0}$, vale então:

$$\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{K}_{O'} + [J_{O'}] \{\dot{\boldsymbol{\Omega}}\}_{mov} = \mathbf{M}_{O'}^{\text{ext}} ; \quad (4.37)$$

4.2.1. Casos Particulares

É importante enfatizar que a escolha de um referencial rigidamente solidário ao corpo é, em geral, a mais natural, posto que em relação a este referencial a matriz de inércia é invariante. Caso contrário a passagem algébrica, envolvendo a derivada temporal, que conduz à equação (4.31) não mais seria válida. Em outras palavras, seria necessário calcular, a cada instante, a taxa de variação da matriz de inércia em relação ao tempo. Existem casos particulares, no entanto, em que a matriz de inércia é também invariante em relação a um referencial outro, não solidário ao corpo. Um exemplo importantíssimo é quando existe *axi-simetria de distribuição de massa* do corpo. Neste caso a matriz de inércia é invariante em relação a qualquer sistema que tenha como um dos eixos o eixo de simetria. Este eixo é, evidentemente, um *eixo principal de inércia*¹³. Ou seja, a matriz de inércia é invariante, qualquer que seja a posição relativa do corpo, em torno do eixo de simetria. A figura abaixo, mostrando um cone em movimento, permite visualizar a assertiva acima.

¹³ Cuidado: a recíproca em geral não é verdadeira.

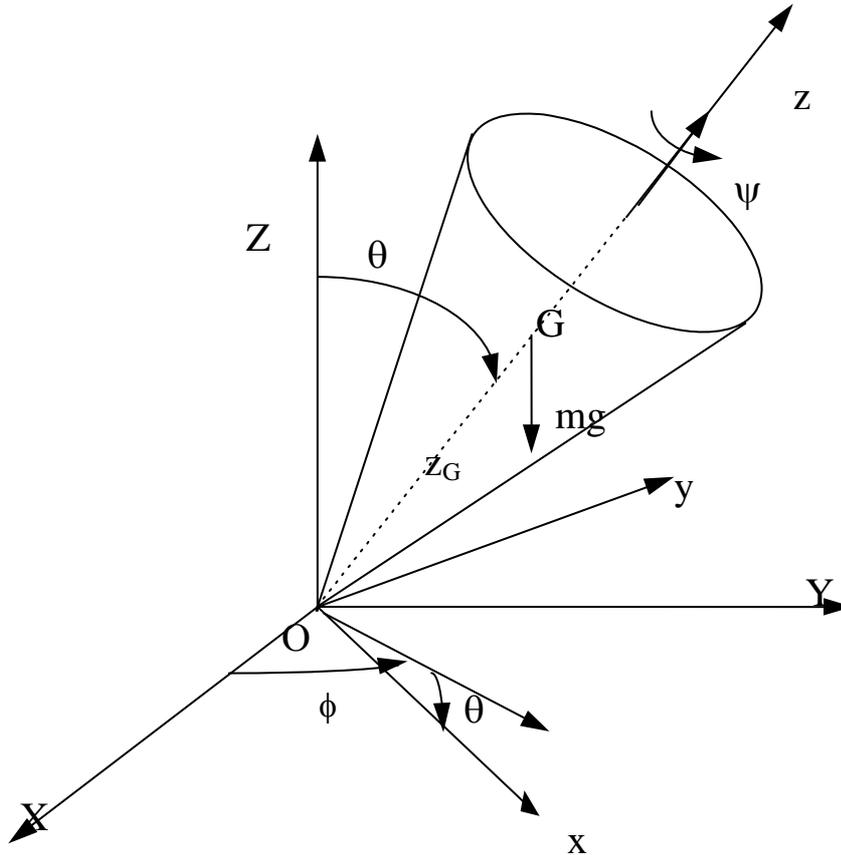


Figura 4 Cone em movimento em torno de um ponto fixo.

No sistema (O', x', y', z') ; com $O'z'$ como o eixo de simetria de massa, por exemplo, sistema este porém não solidário ao corpo e caracterizado cinematicamente por um vetor de rotação Ω_{ar} , a matriz de inércia é invariante no tempo, pois independe da rotação do corpo em torno deste eixo. A equação (4.34) ficaria dada então na forma,

$$\Omega_{ar} \wedge ([J_{O'}] \{\Omega\}) + [J_{O'}] \{\dot{\Omega}\}_{mov} = \mathbf{M}_{O'}^{ext} + (O' - G) \wedge m \mathbf{a}_{O'} \quad , \quad (4.38)$$

e, a forma mais simples, (4.36), como

$$\Omega_{ar} \wedge \mathbf{K}_G + [J_G] \{\dot{\Omega}\}_{mov} = \mathbf{M}_G^{ext} \quad . \quad (4.39)$$

4.2.2. Notação Matricial Alternativa

Com o intuito de eliminar a notação mista, utilizada até então, é interessante introduzir uma notação alternativa, matricial. Além da vantagem de tornar compacta a apresentação das equações, esta notação tem a virtude da elegância, na medida em que é homogênea na forma. Para tanto, considere o produto vetorial de dois vetores quaisquer $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ e $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$ do espaço vetorial V^3 , expressos em coordenadas cartesianas. Podemos definir a matriz

$$[\mathbf{P}] = \begin{bmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

e analogamente para \mathbf{q} de tal sorte que existe a seguinte equivalência matemática,

$$\mathbf{p} \wedge \mathbf{q} = [\mathbf{P}]\{\mathbf{q}\} \quad (4.41)$$

Dentro desta notação alternativa e tomando como exemplo de aplicação a equação(4.34), tem-se,

$$[\mathbf{\Omega}][J_{O'}]\{\mathbf{\Omega}\} + [J_{O'}]\{\dot{\mathbf{\Omega}}\} = \{\mathbf{M}_{O'}^{\text{ext}}\} - m[\mathbf{R}'_G]\{\mathbf{a}_{O'}\} \quad (4.42)$$

onde ,

$$[\mathbf{\Omega}] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad (4.43)$$

e

$$[\mathbf{R}'_G] = \begin{bmatrix} 0 & -z'_G & y'_G \\ z'_G & 0 & -x'_G \\ -y'_G & x'_G & 0 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

Esta forma de expressão é, evidentemente, muito prática quando implementações computacionais são consideradas. A matriz (4.43) é a matriz de rotação.

A equação (4.36), quando $O' \equiv G$, fica ainda mais simples,

$$[\mathbf{\Omega}]\{\mathbf{K}_G\} + [\mathbf{J}_G]\{\dot{\mathbf{\Omega}}\}_{mov} = \{\mathbf{M}_G^{ext}\} \quad (4.45)$$

4.2.3. Relação entre Energia Cinética e Quantidade de Movimento

A expressão geral da energia cinética pode ser escrita, na notação alternativa introduzida na seção anterior, como

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \{\mathbf{v}_{O'}\}' \{\mathbf{v}_{O'}\} + m \{\mathbf{\Omega}\}' [\mathbf{R}'_G] \{\mathbf{v}_{O'}\} + \frac{1}{2} \{\mathbf{\Omega}\}' [\mathbf{J}_{O'}] \{\mathbf{\Omega}\} = \\ &= \frac{1}{2} m \{\mathbf{v}_{O'}\}' \{\mathbf{v}_{O'}\} + m \{\mathbf{R}'_G\}' [\mathbf{v}_{O'}] \{\mathbf{\Omega}\} + \frac{1}{2} \{\mathbf{\Omega}\}' [\mathbf{J}_{O'}] \{\mathbf{\Omega}\} = \\ &= \frac{1}{2} m \{\mathbf{v}_{O'}\}' \{\mathbf{v}_{O'}\} + m \{\mathbf{v}_{O'}\}' [\mathbf{\Omega}] \{\mathbf{R}'_G\} + \frac{1}{2} \{\mathbf{\Omega}\}' [\mathbf{J}_{O'}] \{\mathbf{\Omega}\} \end{aligned} \quad (4.46)^{14}$$

O primeiro termo é uma forma quadrática na velocidade do ponto O' , ponto este pertencente ao corpo, e tomado como referência. O terceiro e último termo é uma forma bi-linear no vetor de rotação, reduzindo-se a uma forma puramente quadrática

¹⁴ Note, no segundo termo, a permutação cíclica do produto misto, aqui escrito na forma matricial.

quando a matriz de inércia é “principal” (diagonal). A segunda parcela é de natureza ‘mista’, envolvendo o vetor de rotação e o vetor de velocidade de O' .

É então imediato verificar que a derivada parcial da energia cinética com relação a cada uma das componentes do vetor de rotação nada mais é do que a correspondente componente do momento angular $\mathbf{K}_{O'}$. De fato, o momento angular, dado na forma (4.16), se escrito na notação matricial fica,

$$\{\mathbf{K}_{O'}\} = m[\mathbf{R}'_G]\{\mathbf{v}_{O'}\} + [J_{O'}]\{\boldsymbol{\Omega}\} \quad . \quad (4.47)$$

que constitui, explicitamente, um vetor formado pelas derivadas parciais da energia cinética com respeito a cada uma das componentes do vetor de rotação, ou seja,

$$\frac{\partial T}{\partial (\boldsymbol{\Omega})_i} = (m(G - O') \wedge \mathbf{v}_{O'})_i + ([J_{O'}]\{\boldsymbol{\Omega}\})_i; \quad i = x, y, z$$

ou, alternativamente, na forma matricial, . (4.48)¹⁵

$$\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\Omega}} = \left\{ \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\Omega}_i} \right\} = \mathbf{K}_{O'}$$

Tal fato era esperado, na medida em que, como foi visto, tanto a energia cinética quanto o momento angular são constituídos por parcelas que podem ser expressas através da matriz de inércia, do vetor de rotação e da velocidade do ponto tomado como pólo de referência.

Analogamente, existe uma relação entre as derivadas parciais da energia cinética em relação às componentes da velocidade do ponto O' e as componentes do vetor de

¹⁵ A notação $\partial f / \partial \mathbf{q}$, aqui empregada, onde \mathbf{q} é um vetor, indica um outro vetor, do mesmo espaço vetorial, formado pelas três derivadas parciais da função escalar $f(\mathbf{q})$ em relação a cada uma das componentes de \mathbf{q} .

quantidade de movimento. Basta derivar a expressão da Energia Cinética, ou sua forma alternativa (4.46)a, para obter-se,

$$\frac{\partial T}{\partial (\mathbf{v}_{O'})_i} = m(\mathbf{v}_{O'})_i + m(\boldsymbol{\Omega} \wedge (G - O'))_i = m(\mathbf{v}_G)_i = (\mathbf{Q})_i; \quad i = x, y, z$$

ou, alternativamente, na forma matricial (4.49)

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_{O'}} = \left\{ \frac{\partial T}{\partial (\mathbf{v}_{O'})_i} \right\} = m\{\mathbf{v}_{O'}\} + m[\boldsymbol{\Omega}]\{\mathbf{R}'_G\} = \mathbf{Q}$$

Na realidade, as expressões acima são casos especiais de relações muito mais gerais entre quantidade de movimento (*momentum*) e momento angular (*momento do momentum*) e as coordenadas de velocidade (velocidades generalizadas) de um sistema mecânico arbitrário. Estas relações são em geral deduzidas no âmbito da Teoria de Mecânica Analítica, abordagem que foge do escopo do presente texto (ver, p.ex., Goldstein, ou Landau & Lifshitz, ou ainda, Sommerfeld). Desempenham, naquele contexto, papel essencial, no entanto.

4.2.4. Binário Giroscópico

À esquerda da expressão (4.36) comparecem dois termos. O segundo é de interpretação imediata: trata-se da parcela da taxa de variação temporal do momento angular associada à variação da intensidade do vetor de rotação no tempo, variação esta vista no referencial solidário ao corpo, o qual se movimenta com rotação $\boldsymbol{\Omega}$. Mantendo o segundo termo no primeiro membro da referida equação, pode-se reescrevê-la como,

$$[J_G]\{\dot{\boldsymbol{\Omega}}\}_{mov} = \mathbf{M}_G^{ext} - \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{K}_G, \quad (4.50)$$

ou ainda, em notação matricial,

$$[J_G]\{\dot{\Omega}\}_{mov} = \{\mathbf{M}_G^{ext}\} - [\Omega]\{\mathbf{K}_G\} \quad . \quad (4.51)$$

Esta forma é particularmente útil, na medida que propicia fácil interpretação. De fato, a taxa de variação temporal do vetor de rotação, quando vista do referencial não-inercial, caracterizado pelo vetor de rotação Ω , é proporcional ao momento das forças externas (aqui calculado em relação ao centro de massa) subtraído de uma segunda parcela. Esta segunda parcela corresponde ao termo $\mathbf{G} \equiv \Omega \wedge \mathbf{K}_G \equiv [\Omega]\{\mathbf{K}_G\}$, conhecido como *'binário giroscópico'* ou *'conjugado giroscópico'*. Representa a parcela da taxa de variação temporal do vetor de momento angular que corresponde à variação de sua direção, variação esta associada à rotação. O nome 'giroscópico', portanto, está relacionado à sua origem: *a rotação do sistema de referência*.

O termo com sinal invertido $-\mathbf{G} = -\Omega \wedge \mathbf{K}_G \equiv -[\Omega]\{\mathbf{K}_G\}$ pode ser interpretado como o *momento giroscópico reativo* aplicado pelo corpo sobre o sistema externo que nele age.

Efeitos giroscópicos são, portanto, aqueles decorrentes da ação de binários giroscópicos.

Note que os efeitos giroscópicos são de natureza conservativa. De fato, tomando o produto escalar do momento giroscópico \mathbf{G} com o vetor de rotação Ω resulta

$$\mathbf{G} \cdot \Omega = (\Omega \wedge \mathbf{K}_G) \cdot \Omega = 0 \quad , \quad (4.52)$$

mostrando que a potência (portanto o trabalho) desenvolvida pelo binário giroscópico é nulo por construção.

A característica conservativa do efeito giroscópico pode também ser associada à antissimetria da transformação associada à pré-multiplicação do vetor de velocidade angular pela matriz antissimétrica $[\Omega]$, e posterior multiplicação pelo próprio vetor de

rotação, desde que seja lembrado que transformações antissimétricas levam à conservação de energia, no contexto da mecânica. ¹⁶Na realidade este é um raciocínio algo redundante, na medida em que a antissimetria da matriz $[\Omega]$ decorre da própria antissimetria (permutação cíclica) do produto vetorial.

O conceito de binário giroscópico pode, ainda, ser entendido como integrante de uma classe mais geral, a de forças de inércia, onde se incluem, por exemplo, a ‘força centrífuga’¹⁷, que comparece em qualquer movimento curvilíneo de um ponto material, e a ‘força de Coriolis’, no estudo do movimento relativo de um ponto material em um sistema de referência que apresenta rotação. Além de conservativo, o efeito giroscópico apresenta natureza restauradora, na medida em que representa uma certa “resistência inercial” à uma variação imposta ao momento angular. Esta natureza restauradora é responsável por um sem número de efeitos estabilizadores, como será visto nas seções subsequentes.

4.2.5. Suplemento: Adoção do Referencial Terrestre

Assim como no caso da aplicação do Teorema do Movimento do Baricentro, cabem aqui algumas considerações atinentes à adoção do referencial terrestre enquanto sistema de referências primário, em relação ao qual o movimento seria medido. O sistema de referências fixo na Terra é, como já observado, não-inercial. O Teorema do momento Angular foi no entanto deduzido considerando o movimento medido a partir de um referencial Newtoniano, ou inercial. Os efeitos da rotação da Terra podem vir a ser relevantes em algumas situações particulares como, por exemplo, no estudo da dinâmica de um girocompasso, instrumento dedicado a apontar o Norte Verdadeiro a partir do efeito giroscópico proporcionado pela própria rotação do globo terrestre, como será visto com maiores detalhes em seções posteriores. Em grande parte dos casos de interesse do dia-a-dia, no entanto, estes efeitos são em geral desprezíveis, porquanto representam parcela quantitativamente insignificante dos efeitos de inércia.

¹⁶ O leitor mais interessado poderá verificar que se o operador tiver parte simétrica, definida positiva, esta será responsável pela dissipação de energia.

¹⁷ Ver, p.ex., Sommerfeld, art. 10.

Considere então, o referencial S fixo na Terra como referencial primário¹⁸. Um segundo referencial S' , solidário ao corpo, será tomado para o estudo a seguir. Seja $\mathbf{\Omega}_e$ o vetor de rotação da Terra, ou seja do sistema de referência S e $\mathbf{\Omega}_r$ o vetor de rotação do corpo rígido em estudo relativamente a S , i.e., do sistema S' em relação a S . O vetor de rotação “absoluto” do C.R. será então dado por,

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_e + \mathbf{\Omega}_r \quad . \quad (4.53)$$

Considere O um ponto genérico do eixo de rotação do globo e O' um ponto pertencente ao C.R. O Teorema do Momento Angular, na forma da equação de Euler, (4.36), fica escrito no caso em estudo,

$$(\mathbf{\Omega}_e + \mathbf{\Omega}_r) \wedge ([J_{O'}](\{\mathbf{\Omega}_e\} + \{\mathbf{\Omega}_r\})) + [J_{O'}]\{\dot{\mathbf{\Omega}}_r\} = \mathbf{M}_{O'}^{\text{ext}} - (G - O') \wedge m\mathbf{a}_{O'} \quad , \quad (4.54)$$

onde foi considerada como desprezível, a taxa de variação do vetor de rotação da Terra, (e de fato o é, na escala de tempo característica dos fenômenos de maior interesse da engenharia). Na forma matricial equivalente, (4.42), a equação acima fica escrita,

$$([\mathbf{\Omega}_e] + [\mathbf{\Omega}_r])[J_{O'}](\{\mathbf{\Omega}_e\} + \{\mathbf{\Omega}_r\}) + [J_{O'}]\{\dot{\mathbf{\Omega}}_r\} = \{\mathbf{M}_{O'}^{\text{ext}}\} - m[\mathbf{R}'_G]\{\mathbf{a}_{O'}\} \quad . \quad (4.55)$$

Portanto, isolando-se no primeiro membro da equação, os termos que dependem apenas de $\mathbf{\Omega}_r$, segue

¹⁸ O globo terrestre é suposto um corpo rígido. Na realidade sua deformabilidade e os movimentos de grandes massas fluidas acabam por interferir em sua dinâmica. O estudo destes efeitos, no entanto, são de maior relevância à Geofísica e aqui serão desconsiderados.

$$\begin{aligned}
[\mathbf{\Omega}_r][J_{O'}]\{\mathbf{\Omega}_r\} + [J_{O'}]\{\dot{\mathbf{\Omega}}_r\} &= \{\mathbf{M}_{O'}^{\text{ext}}\} - m[\mathbf{R}'_G]\{\mathbf{a}_{O'}\} - \\
&\quad -([\mathbf{\Omega}_e][J_{O'}]\{\mathbf{\Omega}_r\} + [\mathbf{\Omega}_r][J_{O'}]\{\mathbf{\Omega}_e\} + [\mathbf{\Omega}_e][J_{O'}]\{\mathbf{\Omega}_e\}) \\
&\quad \cdot \\
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Note que, normalizando com respeito a $|\mathbf{\Omega}_r|$, e se $|\mathbf{\Omega}_e|/|\mathbf{\Omega}_r| \approx O(\varepsilon)$, então o primeiro e segundo termos da parcela entre parênteses, no lado direito da equação, serão, em geral, de ordem $O(\varepsilon)$, e o último termo será de ordem $O(\varepsilon^2)$. Cabe ressaltar, no entanto que este fato nem sempre é verdadeiro. Considere, como contra-exemplo, um caso que apresente quase-simetria esférica. Nesta situação, a matriz de inércia, além de diagonal, tem seus elementos praticamente idênticos. Fica claro, então que o primeiro termo do primeiro membro será muito pequeno (trata-se afinal de um produto vetorial de dois vetores quase-paralelos) e, contudo, se $\mathbf{\Omega}_e \cdot \mathbf{\Omega}_r \approx 0$, i.e., se os vetores de rotação forem praticamente perpendiculares entre si, os termos de ordem ε podem se tornar relevantes, mormente quando os momentos externos forem muito pequenos.

Ou seja, nesta situação particular de quasi-simetria esférica, tem-se,

$$[J_{O'}]\{\dot{\mathbf{\Omega}}_r\} \cong \{\mathbf{M}_{O'}^{\text{ext}}\} - m[\mathbf{R}'_G]\{\mathbf{a}_{O'}\} - ([\mathbf{\Omega}_e][J_{O'}]\{\mathbf{\Omega}_r\} + [\mathbf{\Omega}_r][J_{O'}]\{\mathbf{\Omega}_e\})$$

Isto posto, tem-se, por outro lado, que a aceleração do ponto O' em relação ao sistema S é dada por

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{O'} &= \mathbf{a}_{O'r} + \mathbf{\Omega}_e \wedge (\mathbf{\Omega}_e \wedge (O' - O)) + 2\mathbf{\Omega}_e \wedge \mathbf{v}_{O'} \equiv \\
&\equiv \{\mathbf{a}_{O'r}\} + [\mathbf{\Omega}_e][\mathbf{\Omega}_e]\{\mathbf{r}_{O'}\} + 2[\mathbf{\Omega}_e]\{\mathbf{v}_{O'r}\} = \{\mathbf{a}_{O'}\} \quad , \tag{4.57}
\end{aligned}$$

com $\{\mathbf{r}_{O'}\} = (O' - O)$ e onde foi desprezada a variação temporal do vetor de rotação da Terra e a aceleração de O foi desconsiderada. O segundo termo é a parcela centrípeta da “aceleração de arrastamento” e o último termo é a conhecida aceleração de Coriolis. Assim, o segundo termo do segundo membro de (4.56) fica,

$$-m[\mathbf{R}'_G]\{\mathbf{a}_{O'}\} = -m[\mathbf{R}'_G](\{\mathbf{a}_{O'r}\} + [\boldsymbol{\Omega}_e][\boldsymbol{\Omega}_e]\{\mathbf{r}_{O'}\} + 2[\boldsymbol{\Omega}_e]\{\mathbf{v}_{O'r}\}) \quad . \quad (4.58)$$

Ainda, o termo correspondente ao momento resultante das forças externas será decomposto em duas parcelas. A primeira, associada à ação gravitacional. A segunda, $\mathbf{M}_{O'}$, a todas as outras forças externas agentes sobre o corpo. Como visto anteriormente, a medida do peso já incorpora a “força centrífuga” associada à rotação da Terra (ver (2.11)). Portanto,

$$\mathbf{M}_{O'}^{ext} = (G - O') \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{C}) + \mathbf{M}_{O'} \quad (4.59)$$

ou, na forma matricial,

$$\{\mathbf{M}_{O'}^{ext}\} = [\mathbf{R}'_G](\{\mathbf{P}\} - \{\mathbf{C}\}) + \{\mathbf{M}_{O'}\} \quad . \quad (4.60)$$

A força de inércia, centrífuga, \mathbf{C} é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= -m\boldsymbol{\Omega}_e \wedge (\boldsymbol{\Omega}_e \wedge (G - O)) = -m\boldsymbol{\Omega}_e \wedge (\boldsymbol{\Omega}_e \wedge (G - O')) - m\boldsymbol{\Omega}_e \wedge (\boldsymbol{\Omega}_e \wedge (O' - O)) \equiv \\ &\equiv -m([\boldsymbol{\Omega}_e][\boldsymbol{\Omega}_e]\{\mathbf{R}'_G\} + [\boldsymbol{\Omega}_e][\boldsymbol{\Omega}_e]\{\mathbf{r}_{O'}\}) = \{\mathbf{C}\} \end{aligned} \quad , \quad (4.61)$$

e, portanto,

$$\{\mathbf{M}_{O'}^{ext}\} = [\mathbf{R}'_G]\{\mathbf{P}\} + m[\mathbf{R}'_G](\{\mathbf{R}'_G\} + [\boldsymbol{\Omega}_e][\boldsymbol{\Omega}_e]\{\mathbf{R}'_G\} + [\boldsymbol{\Omega}_e][\boldsymbol{\Omega}_e]\{\mathbf{r}_{O'}\}) + \{\mathbf{M}_{O'}\} \quad (4.62)$$

Substituindo, portanto, (4.62) e (4.58) em (4.56), vem, finalmente,

$$\begin{aligned}
[\mathbf{\Omega}_r][J_{O'}]\{\mathbf{\Omega}_r\} + [J_{O'}]\{\dot{\mathbf{\Omega}}_r\} &= \{\mathbf{M}_{O'}\} + [\mathbf{R}'_G]\{\mathbf{P}\} - m[\mathbf{R}'_G]\{\mathbf{a}_{O'r}\} + \\
&+ m[\mathbf{R}'_G][[\mathbf{\Omega}_e][\mathbf{\Omega}_e]]\{\mathbf{R}'_G\} - 2m[\mathbf{R}'_G][[\mathbf{\Omega}_e]]\{\mathbf{v}_{O'r}\} - \\
&-([\mathbf{\Omega}_e][J_{O'}]\{\mathbf{\Omega}_r\} + [\mathbf{\Omega}_r][J_{O'}]\{\mathbf{\Omega}_e\} + [\mathbf{\Omega}_e][J_{O'}]\{\mathbf{\Omega}_e\})
\end{aligned}
\tag{4.63}$$

A expressão acima separa os efeitos da rotação da Terra e da rotação do corpo a ela relativa. Note que tem caráter bastante geral. No segundo membro, o primeiro termo corresponde ao momento resultante das forças externas de origem não-gravitacional. O segundo termo, ao momento associado à força peso. Os demais termos estão associado a forças de inércia. O terceiro, ao momento da força de inércia correspondente à aceleração relativa do ponto O' . O quarto termo é um diferencial de momento da força centrífuga. O quinto termo corresponde ao momento da força de Coriolis. Os termos restantes são binários giroscópicos envolvendo o vetor de rotação da Terra.

Se o ponto O' , pertencente ao corpo, for tomado como o centro de massa G , a expressão acima simplifica-se sobremaneira, pois, neste caso, $\{\mathbf{R}'_G\} \equiv (G - O') = \mathbf{0}$.

Assim

$$\begin{aligned}
[\mathbf{\Omega}_r][J_{O'}]\{\mathbf{\Omega}_r\} + [J_{O'}]\{\dot{\mathbf{\Omega}}_r\} &= \{\mathbf{M}_{O'}\} - \\
&-([\mathbf{\Omega}_e][J_{O'}]\{\mathbf{\Omega}_r\} + [\mathbf{\Omega}_r][J_{O'}]\{\mathbf{\Omega}_e\} + [\mathbf{\Omega}_e][J_{O'}]\{\mathbf{\Omega}_e\})
\end{aligned}
\tag{4.64}$$

Em alguns outros caso de interesse, quando a rotação relativa se faz em torno de um eixo fixo relativamente à Terra, pode ser conveniente tomar o ponto O' de referência como um ponto deste eixo. Em outros casos ainda, quando existir um único ponto fixo relativamente à Terra, este será, evidentemente o ponto de referência adequado. Nestes dois casos $\{\mathbf{v}_{O'r}\} = \{\mathbf{a}_{O'r}\} = \{\mathbf{0}\}$, e portanto, (4.63) fica,

$$\begin{aligned}
[\mathbf{\Omega}_r][J_{O'}]\{\mathbf{\Omega}_r\} + [J_{O'}]\{\dot{\mathbf{\Omega}}_r\} &= \{\mathbf{M}_{O'}\} + [\mathbf{R}'_G]\{\mathbf{P}\} + \\
&+ m[\mathbf{R}'_G][\mathbf{\Omega}_e][\mathbf{\Omega}_e]\{\mathbf{R}'_G\} - \\
&-([\mathbf{\Omega}_e][J_{O'}]\{\mathbf{\Omega}_r\} + [\mathbf{\Omega}_r][J_{O'}]\{\mathbf{\Omega}_e\} + [\mathbf{\Omega}_e][J_{O'}]\{\mathbf{\Omega}_e\})
\end{aligned}
\tag{4.65}$$

Exemplos destes casos particulares são rotores de eixos com jzentes em bases fixas ao solo, giroscópios com base fixa, rotores com mancais esféricos instalados em base fixa, além do clássico problema do pião. Os termos quadráticos em $(\mathbf{\Omega}_e)$ são quase-sempre desprezíveis, de ordem superior. A equação acima se reduz então, no mínimo, a

$$\begin{aligned}
[\mathbf{\Omega}_r][J_{O'}]\{\mathbf{\Omega}_r\} + [J_{O'}]\{\dot{\mathbf{\Omega}}_r\} &\cong \{\mathbf{M}_{O'}\} + [\mathbf{R}'_G]\{\mathbf{P}\} + \\
&-([\mathbf{\Omega}_e][J_{O'}]\{\mathbf{\Omega}_r\} + [\mathbf{\Omega}_r][J_{O'}]\{\mathbf{\Omega}_e\})
\end{aligned}
\tag{4.66}$$

Note, ainda que se não houver simetria esférica de massa (ou ao menos quase-simetria), os termos linearmente dependentes em $\mathbf{\Omega}_e$ poderão, em geral, ser desconsiderados, e a equação ser reduzida ainda mais, na forma

$$[\mathbf{\Omega}_r][J_{O'}]\{\mathbf{\Omega}_r\} + [J_{O'}]\{\dot{\mathbf{\Omega}}_r\} \cong \{\mathbf{M}_{O'}\} + [\mathbf{R}'_G]\{\mathbf{P}\}
\tag{4.67}$$

que preserva a forma original da equação de Euler (4.44) ((4.42)na forma alternativa).

Exemplo 3.11 - Para o pêndulo composto analisado no exemplo 2.5 determinar as reações na articulação O.

Teorema da Resultante

$$m\mathbf{a}_G = \mathbf{R} + \mathbf{P}$$

Da cinemática $\mathbf{a}_G = -\omega^2 a\mathbf{i} + a\dot{\omega}\mathbf{j}$. Sendo $\dot{\omega} = -\frac{g}{l_{ef}} \sin \theta$ tem-se:

$$R_x = -ma\omega^2 - mg \cos \theta \stackrel{\text{por resultados anteriores}}{=} -mg \left(\cos \theta \left(1 + \frac{2a}{l_{ef}} \right) - \cos \theta_0 \frac{2a}{l_{ef}} \right)$$

$$R_y = ma\dot{\omega} + mg \sin \theta = mg \sin \theta \left(1 - \frac{a}{l_{ef}} \right)$$

$$R_z = 0$$

Para o cálculo dos momentos em O, deve-se utilizar a equação de Euler, notando que o referencial é solidário ao corpo:

$$[J_G]\{\dot{\omega}\} + \omega \wedge [I_G]\{\omega\} = \mathbf{M}_G^{\text{ext}}$$

Sendo $\mathbf{M}_G^{\text{ext}} = (M_x^O, M_y^O, M_z^O - R_y a)^T$, substituindo resultados anteriores na equação acima obtêm-se:

$$M_x^O = -J_{xz}^G \frac{g \sin \theta}{l_{ef}} - 2J_{yz}^G \frac{g}{l_{ef}} (\cos \theta - \cos \theta_0)$$

$$M_y^O = \frac{g}{l_{ef}} (2J_{xz}^G \cos \theta - J_{yz}^G \sin \theta)$$

$$M_z^O = 0$$

Para simetria em relação ao plano xy $M_x^O = M_y^O = 0$.

Exemplo 3.12 - Considerando o disco excêntrico do exemplo 2.10, utilize o TMA para calcular a velocidade angular em função de θ .

Considerando como pólo para a aplicação do TMA o ponto A do plano que em cada instante coincide com o ponto de contato C do disco. O TMA se escreve, então:

$$\dot{\mathbf{K}}_A = m\mathbf{v}_G \wedge \mathbf{v}_A + \mathbf{M}_A^{\text{ext}}$$

Utilizando:

$$\mathbf{K}_A = (G - A') \wedge m\mathbf{v}_{A'} + [J_{A'}]\{\Omega\} + (A' - A) \wedge \mathbf{Q},$$

tomando A' como o ponto C do disco ($v_C=0$), tem-se:

$$\mathbf{K}_A = J_C \omega \mathbf{k} = \left(J_O + m(R^2 - 2eR \cos \theta) \right) \omega \mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}_G = (e \cos \theta - R) \dot{\theta} \mathbf{i} + e \dot{\theta} \sin \theta \mathbf{j}$$

$$\mathbf{v}_A = -\dot{\theta} R \mathbf{i}$$

$$\mathbf{M}_A^{\text{ext}} = -mge \sin \theta \mathbf{k}$$

Logo:

$$2meR\dot{\theta}^2 \sin \theta + (J_O + mR^2 - 2meR \cos \theta)\ddot{\theta} = me\dot{\theta}^2 R \sin \theta - mge \sin \theta$$

$$(J_O + mR^2 - 2meR \cos \theta)\ddot{\theta} + meR\dot{\theta}^2 \sin \theta + mge \sin \theta = 0$$

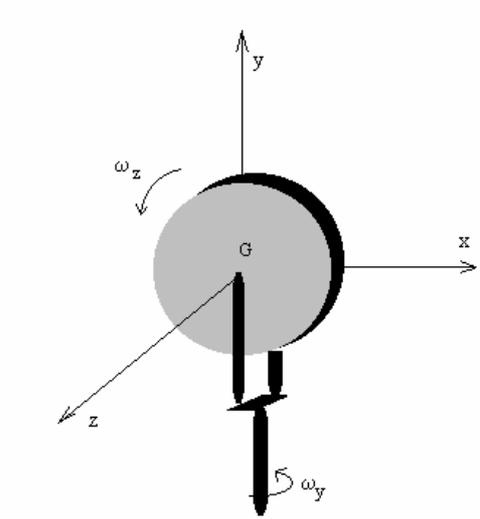
A equação acima pode ser integrada e fornece:

$$(J_O + mR^2 - 2meR \cos \theta)\dot{\theta}^2 - 2mge \cos \theta = cte$$

a qual, sob condições iniciais especificadas, fornece o valor de ω

Exemplo 3.13 - O disco homogêneo de massa m e raio R gira com velocidade angular constante ω_z em torno do eixo horizontal, sustentado pelo garfo que gira com

velocidade angular ω_y também constante. Determinar o momento exercido sobre o disco pela barra.



Da equação de Euler:

$$[I_G]\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\Omega}_{arr} \wedge [I_G]\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_G^{\text{ext}}$$

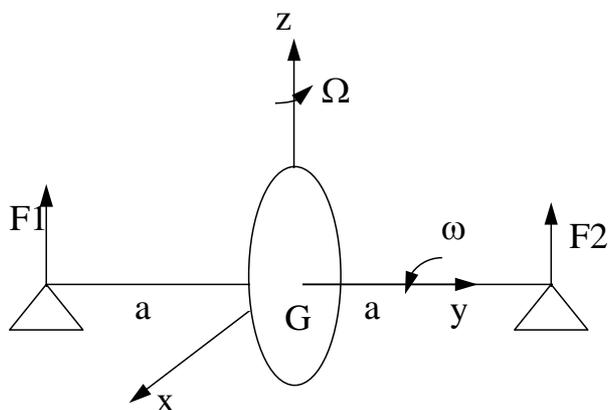
com $\boldsymbol{\omega} = (0, \omega_y, \omega_z)^T$, $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\Omega}_{arr} = (0, \omega_y, 0)^T$ e $[I_G] = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{pmatrix}$ obtém-

se:

$$\mathbf{M}_G^{\text{ext}} = \left(\frac{mR^2 \omega_y \omega_z}{2}, 0, 0 \right)^T$$

Exemplo 3.14 - Um sensor de direção é composto por um disco homogêneo (massa m e raio R) que gira com velocidade angular ω constante em torno de seu eixo. Este, por sua vez é apoiado em dois mancais 1 e 2, equipados com sensores de força. Todo

o conjunto está em um veículo que gira com velocidade angular Ω . Sendo $F_1 > F_2$ calcule o sentido de rotação do carro e deduza uma relação entre a diferença das forças de reação e a rotação Ω .



O momento angular do disco na base fixa no veículo $Gxyz$ é:

$$\mathbf{K}_G = [J_G] \{\Omega\}$$

$$\mathbf{K}_G = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \\ \Omega \end{pmatrix} = \frac{mR^2}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 2\omega \\ \Omega \end{pmatrix}$$

A derivada vale:

$$\dot{\mathbf{K}}_G = \boldsymbol{\Omega}_{Base} \wedge \mathbf{K}_G$$

$$\dot{\mathbf{K}}_G = \frac{mR^2}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 2\omega \\ \Omega \end{pmatrix} = \frac{mR^2}{4} \begin{pmatrix} -2\omega\Omega \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A componente x do momento das forças externas em relação ao baricentro é:

$$M_x^{ext} = (F_2 - F_1)a$$

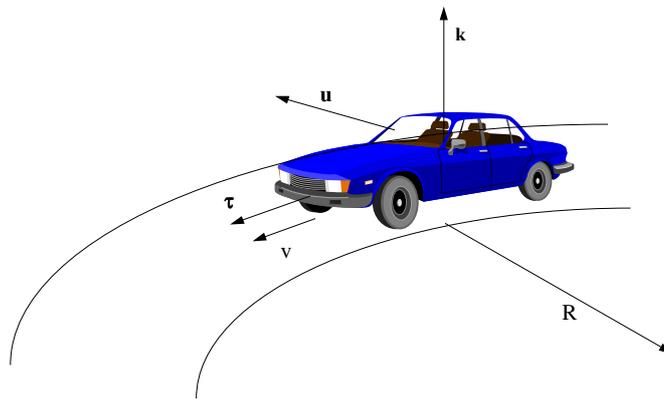
Aplicando o Teorema do momento angular obtém-se:

$$\dot{\mathbf{K}}_G = \mathbf{M}_{\text{ext}}$$

$$(F_2 - F_1)a = -\frac{mR^2}{2}\omega\Omega \Rightarrow \Omega = \frac{2a(F_1 - F_2)}{m\omega R^2}$$

Esta relação indica que se $F_1 > F_2$, Ω terá o sentido positivo, ou seja, direção de Gz .

Exemplo 3.15 - Um carro tem o motor instalado transversalmente e está fazendo uma curva com velocidade escalar constante v . As partes móveis do motor podem ser representadas dinamicamente por um eixo rígido que gira com vetor de rotação $\omega = \omega \mathbf{u}$. Sendo dados os momentos de inércia J_u , J_τ , J_k ao longo dos eixos principais de inércia do suposto eixo, calcule o momento a ele aplicado durante a curva. Neste carro, é maior o risco de capotamento em curvas à esquerda ou à direita?



O vetor de rotação do carro é dado por $\Omega = \frac{v}{R}\mathbf{k}$ e o do eixo vale

$$\omega_{\text{abs}} = \omega \mathbf{u} + \frac{v}{R}\mathbf{k}.$$

Sendo a equação de Euler:

$$[I_G]\dot{\omega}_{\text{abs}} + \Omega_{\text{arr}} \wedge [I_G]\omega_{\text{abs}} = \mathbf{M}_G^{\text{ext}}$$

na qual o vetor de rotação de arrastamento corresponde ao vetor de rotação do carro Ω .

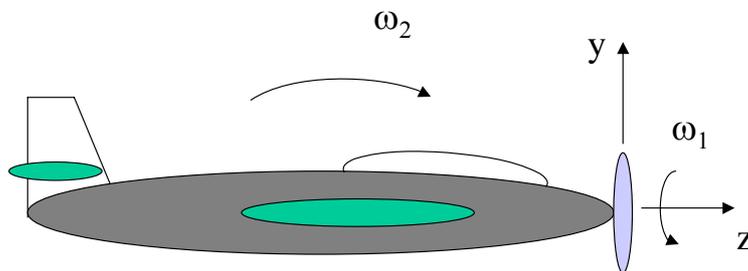
$$\text{Assim } \boldsymbol{\omega} = (\omega, 0, \frac{v}{R})^T, \dot{\boldsymbol{\omega}} = 0, \boldsymbol{\Omega}_{arr} = (0, 0, \frac{v}{R})^T \text{ e } [I_G] = \begin{pmatrix} J_u & 0 & 0 \\ 0 & J_\tau & 0 \\ 0 & 0 & J_k \end{pmatrix}.$$

Logo:

$$\mathbf{M}_G^{\text{ext}} = \left(0, \frac{J_u \omega v}{R}, 0 \right)^T$$

O momento aplicado pelo eixo sobre o carro vale, pelo Princípio da Ação e Reação, $-\mathbf{M}_G^{\text{ext}}$, ou seja, tem a direção e sentido de $-\tau$. Logo, tende a se contrapor ao capotamento do veículo. Para curvas à direita, o momento sobre o eixo seria $-\mathbf{M}_G^{\text{ext}}$ e a reação sobre o carro $\mathbf{M}_G^{\text{ext}}$, tendo a direção de $+\tau$, também se contrapondo ao capotamento.

Exemplo 3.16 - Considere a hélice de um avião monomotor como se fosse um disco homogêneo com $I_{xx}=I_{yy}=C$ e $I_{zz}=2C$. Relativamente ao avião a hélice gira com rotação $\boldsymbol{\omega}_1=\omega_1\mathbf{k}$, constante. O piloto inicia manobra de descida, fazendo o avião mergulhar com rotação $\boldsymbol{\omega}_2=\omega_2\mathbf{i}$, também constante. Calcule o binário giroscópico que o avião aplica sobre a hélice e indique se o avião tende a ir para a direita ou esquerda.



Da equação de Euler, sendo G o centro de gravidade da hélice:

$$[I_G]\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\Omega}_{arr} \wedge [I_G]\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_G^{\text{ext}}$$

com $\boldsymbol{\omega} = (\omega_2, 0, \omega_1)^T$, $\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0$, $\boldsymbol{\Omega}_{arr} = (\omega_2, 0, 0)^T$ e $[I_G] = \begin{pmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 2C \end{pmatrix}$ obtém-se:

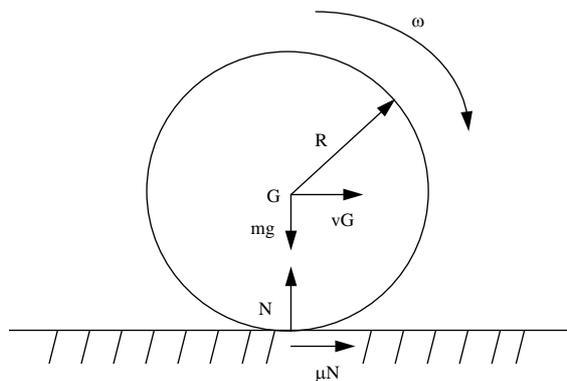
$$\mathbf{M}_G^{ext} = (0, -2C\omega_1\omega_2, 0)^T$$

Este é o momento giroscópico que o avião aplica sobre a hélice, a qual reage com um momento:

$$\mathbf{M}_G^{Aviao} = -\mathbf{M}_G^{Helice} = -\mathbf{M}_G^{ext} = (0, 2C\omega_1\omega_2, 0)^T,$$

existindo então a tendência do avião girar para a esquerda.

Exemplo 3.17 - Um disco de massa m , raio R e centro G rola com escorregamento sobre um plano. Inicialmente possui velocidade linear v_G^0 e angular ω_0 , sendo $v_G^0 < \omega_0 R$. Calcule a velocidade do centro do disco e sua velocidade angular em função do tempo. Determine o instante em que o disco pára de escorregar. É dado o coeficiente de atrito μ .



Do Teorema do Baricentro:

$$ma_G = \mu N = \mu mg \Rightarrow a_G = \mu g$$

integrando em relação ao tempo obtém-se:

$$v_G = \mu g t + v_G^0$$

Aplicando o Teorema do Momento Angular:

$$J_G \dot{\omega} = -\mu m g R$$

$$\text{como } J_G = \frac{1}{2} m R^2$$

$$\dot{\omega} = \frac{-2\mu g}{R}$$

que integrada fornece :

$$\omega = \frac{-2\mu g}{R} t + \omega_0$$

No instante em que o disco pára de escorregar, $v_G = \omega R$. Usando as expressões de $\omega(t)$ e $v_G(t)$ obtidas anteriormente tem-se:

$$t^* = \frac{\omega_0 R - v_G^0}{3\mu g}$$

5. ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO E BALANCEAMENTO

Este é um caso particular de fundamental importância, posto que representa toda uma classe de problemas na mecânica, em particular na engenharia. O estudo sistemático da dinâmica de rotores, por exemplo, seu balanceamento e, seu comportamento estrutural, depende do estudo mais geral abordado nesta seção.

Trata-se, por outro lado, de um típico caso que exemplifica o desenvolvimento apresentado na seção anterior, no qual os efeitos associados à rotação da Terra serão considerados desprezíveis¹⁹, de tal forma que será admitida válida a equação de Euler na forma (4.67).

5.1. EQUACIONAMENTO E REAÇÕES

Considere um referencial solidário ao corpo, e um sistema cartesiano de coordenadas (O, x, y, z) , orientado por uma base canônica $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, definindo como z o eixo de rotação, de tal forma que a origem O pertença a este eixo. Note que O é um ponto de velocidade e aceleração nulas, em relação ao referencial Terra.

¹⁹ Em centrífugas e rotores de altíssima velocidade, estes efeitos podem ter alguma relevância.

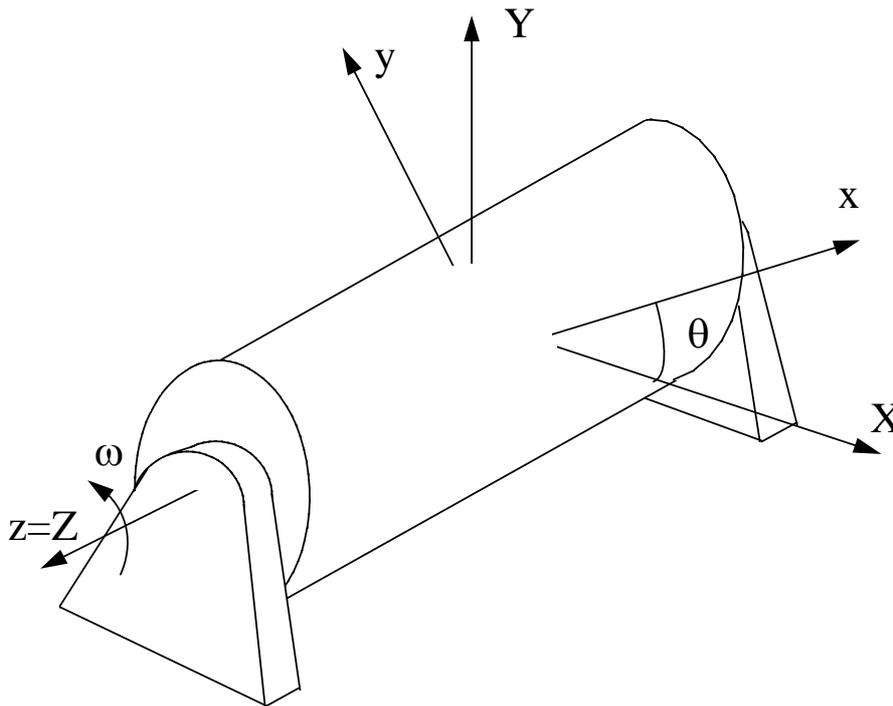


Figura 5 Rotor genérico e sistema de coordenadas

O vetor de rotação do corpo será denotado simplesmente por,

$$\mathbf{\Omega} = \omega \mathbf{k} = \dot{\theta} \mathbf{k} \quad (5.1)$$

posto que, conforme mencionado, os efeitos giroscópicos associados ao vetor de rotação do globo terrestre serão aqui desconsiderados. Em notação matricial, alternativamente,

$$\{\mathbf{\Omega}\} = (0, 0, \omega)^t \quad (5.2)$$

e, portanto, a matriz de rotação ficará

$$[\mathbf{\Omega}] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

A matriz de inércia, com respeito ao sistema considerado é, por sua vez, escrita,

$$[\mathbf{J}_O] = \begin{bmatrix} J_x & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_y & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_z \end{bmatrix} \quad . \quad (5.4)$$

A equação de Euler ficará simplesmente,

$$[\mathbf{\Omega}][J_O]\{\mathbf{\Omega}\} + [J_O]\{\dot{\mathbf{\Omega}}\} \cong \{\mathbf{M}_O\} + [\mathbf{R}_G]\{\mathbf{P}\} \quad . \quad (5.5)$$

onde \mathbf{M}_O representa o *momento resultante das forças externas não-gravitacionais*.

Adicionalmente o Teorema do Movimento do Baricentro fica escrito (desconsiderando o efeito da Força de Coriolis, que também depende da rotação da Terra) como

$$m\mathbf{a}_G = \mathbf{P} + \mathbf{F}' \quad (5.6)$$

onde \mathbf{F}' representa a resultante das forças externas de origem não-gravitacional, como por exemplo as reações \mathbf{A} e \mathbf{B} aplicadas ao eixo pelos mancais A e B , respectivamente. Além dos momentos proporcionados pelas reações dos mancais, considere aplicado, em torno do eixo z , um torque $\mathbf{H} = H\mathbf{k}$. Tem-se então,

$$\mathbf{M}_O = (A - O) \wedge \mathbf{A} + (B - O) \wedge \mathbf{B} + \mathbf{H} \quad (5.7)$$

ou, em notação matricial,

$$\{\mathbf{M}_O\} = [\mathbf{R}_A]\{\mathbf{A}\} + [\mathbf{R}_B]\{\mathbf{B}\} + \{\mathbf{H}\} \quad (5.8)$$

com,

$$[\mathbf{R}_A] = \begin{bmatrix} 0 & -z_A & 0 \\ z_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

e, analogamente para B .

No entanto, de(5.6),

$$\mathbf{B} = m\mathbf{a}_G - \mathbf{P} - \mathbf{A} \quad , \quad (5.10)$$

e portanto,

$$\{\mathbf{M}_O\} = ([\mathbf{R}_A] - [\mathbf{R}_B])\{\mathbf{A}\} + m[\mathbf{R}_B]\{\mathbf{a}_G\} - [\mathbf{R}_B]\{\mathbf{P}\} + \{\mathbf{H}\} \quad , \quad (5.11)$$

que substituída em (5.5) fornece uma equação que, com (5.10) relaciona as reações aplicadas pelos mancais com as variáveis dinâmicas e cinemáticas do rotor,

$$[\boldsymbol{\Omega}][J_O]\{\boldsymbol{\Omega}\} + [J_O]\{\dot{\boldsymbol{\Omega}}\} \cong [\mathbf{R}_{AB}]\{\mathbf{A}\} + m[\mathbf{R}_B]\{\mathbf{a}_G\} + [\mathbf{R}_{GB}]\{\mathbf{P}\} + \{\mathbf{H}\} \quad . \quad (5.12)$$

ou, em notação mista,

$$\boldsymbol{\Omega} \wedge [J_O]\{\boldsymbol{\Omega}\} + [J_O]\{\dot{\boldsymbol{\Omega}}\} = (A - B) \wedge \mathbf{A} + m(B - O) \wedge \mathbf{a}_G + (G - B) \wedge \mathbf{P} + \mathbf{H}. \quad (5.13)$$

Para o rotor sujeito apenas à força peso, às reações dos mancais e ao torque, e a menos de uma indeterminação, na direção do próprio eixo, a reação \mathbf{A} fica então,

$$\mathbf{A} = \frac{(A - B)}{|A - B|^2} \wedge \left((m(B - O) \wedge \mathbf{a}_G + (G - B) \wedge \mathbf{P} + \mathbf{H}) - \left(\boldsymbol{\Omega} \wedge [J_O]\{\boldsymbol{\Omega}\} + [J_O]\{\dot{\boldsymbol{\Omega}}\} \right) \right) \quad (5.14)$$

Embora a solução acima seja geral, é interessante reescrevê-la de forma explícita em face das simplificações do problema - o vetor de rotação tem direção do eixo e os pontos A e B tem apenas a coordenada z não-nula.

De fato, o termo giroscópico da equação (5.5) fica, em vista de (5.3), bastante simplificado, com componente nula na direção do eixo de rotação,

$$\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{K}_O = -J_{yz}\omega^2 \mathbf{i} + J_{xz}\omega^2 \mathbf{j} \quad , \quad (5.15)$$

ou, ainda

$$[\boldsymbol{\Omega}][\mathbf{J}_O]\{\boldsymbol{\Omega}\} = \omega^2 (-J_{yz}; J_{xz}; 0)^t \quad . \quad (5.16)$$

Por sua vez, o momento externo associado (a) às reações dos mancais (*assumindo-se que aplicadas nos pontos A e B*), e (b) ao torque aplicado ao eixo fica dado por

$$\mathbf{M}_O = -(z_A A_y + z_B B_y) \mathbf{i} + (z_A A_x + z_B B_x) \mathbf{j} + H \mathbf{k} \quad (5.17)$$

ou,

$$\{\mathbf{M}_O\} = \left(-(z_A A_y + z_B B_y); (z_A A_x + z_B B_x); H \right)^t \quad . \quad (5.18)$$

O momento da força peso, em relação a O , é por sua vez, dado por

$$(G - O) \wedge \mathbf{P} = (yP_z - zP_y) \mathbf{i} + (zP_x - xP_z) \mathbf{j} + (xP_y - yP_x) \mathbf{k} \quad (5.19)$$

ou,

$$[\mathbf{R}_G]\{\mathbf{P}\} = \left((yP_z - zP_y); (zP_x - xP_z); (xP_y - yP_x) \right)^t \quad (5.20)$$

Assim, a equação de Euler, segundo suas três componentes cartesianas, fica

$$\begin{cases} J_{xz}\dot{\omega} - J_{yz}\omega^2 = -(z_A A_y + z_B B_y) + (y_G P_z - z_G P_y) \\ J_{yz}\dot{\omega} + J_{xz}\omega^2 = (z_A A_x + z_B B_x) + (z_G P_x - x_G P_z) \\ J_z\dot{\omega} = (x_G P_y - y_G P_x) + H \end{cases} \quad (5.21)$$

Por sua vez, o Teorema do Movimento do Baricentro fornece,

$$\begin{cases} A_x + B_x = -P_x + m(-\dot{\omega}y_G - \omega^2 x_G) \\ A_y + B_y = -P_y + m(\dot{\omega}x_G - \omega^2 y_G) \\ A_z + B_z = -P_z \end{cases} \quad (5.22)$$

onde foi utilizado o vínculo cinemático de C.R. para o cálculo da aceleração do centro de massa.

Se o sistema (O, x, y, z) for escolhido, sem perda de generalidade, de tal forma que o centro de massa G esteja contido no eixo Ox , i.e., $(y_G; z_G) = (0; 0)$, as equações acima ficam bastante simplificadas,

$$\begin{cases} (z_A A_y + z_B B_y) = -(J_{xz}\dot{\omega} - J_{yz}\omega^2) \\ (z_A A_x + z_B B_x) = J_{yz}\dot{\omega} + J_{xz}\omega^2 + x_G P_z \\ J_z\dot{\omega} = x_G P_y + H \end{cases} \quad (5.23)$$

e,

$$\begin{cases} A_x + B_x = -P_x - m\omega^2 x_G \\ A_y + B_y = -P_y + m\dot{\omega}x_G \\ A_z + B_z = -P_z \end{cases} \quad (5.24)$$

Ainda, definindo α (constante) como o ângulo formado entre o eixo de rotação e a horizontal e $\theta(t)$ tal que $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$, como o ângulo entre o eixo Ox e a horizontal, segue ainda que,

$$\begin{cases} (z_A A_y + z_B B_y) = -(J_{xz} \ddot{\theta} - J_{yz} \dot{\theta}^2) \\ (z_A A_x + z_B B_x) = J_{yz} \ddot{\theta} + J_{xz} \dot{\theta}^2 - x_G P \operatorname{sen} \alpha \\ J_z \ddot{\theta} = H - x_G P \cos \alpha \cos \theta \end{cases}, \quad (5.25)$$

e

$$\begin{cases} A_x + B_x = P \cos \alpha \operatorname{sen} \theta - m \dot{\theta}^2 x_G \\ A_y + B_y = P \cos \alpha \cos \theta + m \dot{\theta}^2 x_G \\ A_z + B_z = P \operatorname{sen} \alpha \end{cases}. \quad (5.26)$$

As equações acima são gerais, para um rotor “desbalanceado” que gira em torno de um eixo, fixo em relação ao solo, mesmo que este apresente um ângulo α em relação ao plano horizontal. A única hipótese assumida, além da usual, de C.R., é serem desprezíveis os efeitos giroscópicos e da força de Coriolis, desde que associados à rotação da Terra.

Conhecido o peso P , a matriz de inércia do rotor em relação aos eixos (O, x, y, z) , e a posição do seu centro de massa (excentricidade), e dado o torque H , (aplicado p.ex., por um motor elétrico), a equação (5.25)c pode ser integrada, a partir de condições iniciais conhecidas $(\theta; \dot{\theta})_{t=t_0} = (\theta_0; \omega_0)$, determinando-se $\theta(t)$. Esta função horária, substituída nas equações (5.25)a,b e (5.26)a,b, permite então clacular, em função do tempo, as componentes $(A_x; A_y; B_x; B_y)$ das forças de reação nos mancais.

Note, contudo, que resta um grau de indeterminação, na equação (5.26)c, a qual é, na realidade, independente das demais, pois trata apenas do equilíbrio estático na direção do eixo e envolve duas incógnitas, as componentes $(A_z; B_z)$. Se o eixo for vertical, seus valores dependerão de uma eventual compressão pré-existente. Se por outro lado, o eixo for inclinado, o mancal inferior, que deverá ser um mancal de escora, suportará a carga axial em quase toda a sua totalidade. O equacionamento completo destas duas componentes reativas depende da aplicação de teorias e modelos outros como, por exemplo, da Teoria da Resistência dos Materiais e da Tribologia²⁰, as quais fogem ao escopo do presente livro.

Fica evidente, do equacionamento acima, que para a minimização das reações dinâmicas nos mancais, é desejável o balanceamento do rotor. O balanceamento de um corpo que gira em torno de um eixo fixo é, usualmente, separado em duas operações. A primeira, denominada “balanceamento estático” impõe que o centro de massa do rotor seja posicionado sobre o eixo de rotação. Com isso, ficam nulos os termos centrípetos e tangenciais das forças de inércia, que comparecem nas reações dos mancais (ver(5.25)). A segunda, denominada “balanceamento dinâmico” impõe que a matriz de inércia seja diagonal, i.e., anulando, portanto, os termos de forças que dependem dos produtos de inércia (ver (5.25)). Uma introdução sobre conceitos de balanceamento será o objeto da seção a seguir.

Se as condições de balanceamento forem satisfeitas, portanto,

$$\begin{cases} (z_A A_y + z_B B_y) = 0 \\ (z_A A_x + z_B B_x) = 0 \\ J_z \ddot{\theta} = H \end{cases} \quad (5.27)$$

e

$$\begin{cases} A_x + B_x = P \cos \alpha \sin \theta \\ A_y + B_y = P \cos \alpha \cos \theta \\ A_z + B_z = P \sin \alpha \end{cases} \quad (5.28)$$

²⁰ (que estuda as leis do atrito)

Nestas condições ideais,

$$\begin{aligned}
 A_x &= \frac{1}{1 - z_A/z_B} P \cos \alpha \sin \theta \\
 B_x &= \frac{1}{1 - z_B/z_A} P \cos \alpha \sin \theta \\
 A_y &= \frac{1}{1 - z_A/z_B} P \cos \alpha \cos \theta \\
 B_y &= \frac{1}{1 - z_B/z_A} P \cos \alpha \cos \theta
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

Desconsiderando a ação do atrito nos mancais na direção do eixo, é razoável supor que o mancal inferior suportará toda a componente ao longo de z . Seja A o mancal inferior então o módulo das reações será dado por:

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{A}| &= P \sqrt{\left(\frac{1}{1 - z_A/z_B} \cos \alpha \right)^2 + \sin^2 \alpha} \\
 |\mathbf{B}| &= \frac{1}{1 - z_B/z_A} P \cos \alpha
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

Note que o centro de massa G é o pólo agora considerado, o qual pode estar posicionado em qualquer lugar do eixo. No caso particular, de simetria longitudinal, em que o centro de massa se situa a meio vão entre os mancais A e B , tem-se $z_B = -z_A$ e, portanto,

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{A}| &= P \sqrt{\frac{1}{4} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} \\
 |\mathbf{B}| &= \frac{1}{2} P \cos \alpha;
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

com G no eixo, a meio vão

5.2. BALANCEAMENTO

Conforme adiantado na seção anterior, o balanceamento de um corpo que gira em torno de um eixo fixo, aqui designado genericamente “rotor”, é, usualmente, separado em duas operações. A primeira, denominada “balanceamento estático” impõe que o centro de massa do rotor seja posicionado sobre o eixo de rotação. Com isso, ficam nulos os termos centrífugos e tangenciais das forças de inércia que comparecem nas reações dos mancais (ver(5.25)). A segunda, denominada “balanceamento dinâmico” impõe que a matriz de inércia seja diagonal, anulando assim os termos de forças que dependem dos produtos de inércia (ver(5.26)).

No que segue, e sem perda de generalidade, o eixo em torno do qual gira o rotor será suposto vertical ($\alpha = \pi/2$). Isto é feito para que o efeito da força peso no balanceamento seja nulo, facilitando assim a análise, muito embora seja possível equacionar o problema de balanceamento para o caso geral. As equações que regem o movimento serão dadas por,

$$\begin{cases} (z_A A_y + z_B B_y) = -(J_{xz} \ddot{\theta} - J_{yz} \dot{\theta}^2) \\ (z_A A_x + z_B B_x) = J_{yz} \ddot{\theta} + J_{xz} \dot{\theta}^2 - x_G P \\ J_z \ddot{\theta} = H \end{cases} \quad (5.32)$$

e

$$\begin{cases} A_x + B_x = -m \dot{\theta}^2 x_G \\ A_y + B_y = m \ddot{\theta} x_G \\ A_z + B_z = P \end{cases} \quad (5.33)$$

5.2.1. Medida do desbalanceamento

O primeiro passo, do ponto de vista de análise, consiste em medir o desbalanceamento do corpo original.

Suponha então que o rotor seja acionado, sob um sistema de controle que permita impor determinada velocidade angular constante, com valor $\dot{\theta} = \omega$. No caso real, quando também existe dissipação de energia nos mancais, por atrito, este sistema de controle deve ser necessariamente do tipo realimentado, realimentação esta que se faz a partir da medida da velocidade angular. No caso ideal, quando são desprezados os efeitos dissipativos, basta “cortar” o acionamento assim que o rotor atinge a velocidade requerida, que a rotação permanecerá constante. Ou seja, (5.32) e (5.33) transformam-se em,

$$\begin{cases} (z_A A_y + z_B B_y) = J_{yz} \omega^2 \\ (z_A A_x + z_B B_x) = J_{xz} \omega^2 - x_G P \\ \dot{\omega} = 0 \end{cases} \quad (5.34)$$

e

$$\begin{cases} A_x + B_x = -m\omega^2 x_G \\ A_y + B_y = 0 \\ A_z + B_z = P \end{cases} \quad (5.35)$$

Suponha também que exista um sistema de sensores de força que medem as componentes $(A_X; A_Y; B_X; B_Y)$ das reações aplicadas pelos mancais, segundo duas direções horizontais e ortogonais fixas (X, Y) , porém arbitrariamente escolhidas. O ângulo θ é medido a partir do eixo X . A figura abaixo mostra o rotor, em um dado instante, e os mancais A e B .

Note que,

$$\begin{bmatrix} A_X(t) \\ A_Y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta(t) & -\text{sen } \theta(t) \\ \text{sen } \theta(t) & \cos \theta(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

e, analogamente para a reação em B .

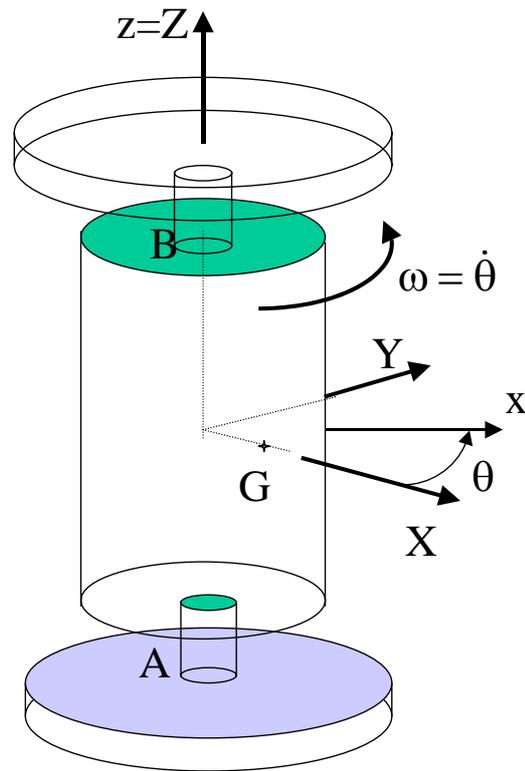


Figura 6 Rotor vertical e sistemas de referência

Se (5.35)a,b forem respectivamente multiplicadas por $\cos\theta$ e $\sin\theta$ e subtraídas entre si, vem,

$$-m\omega^2 x_G \cos\theta(t) = (A_x + B_x)\cos\theta(t) - (A_y + B_y)\sin\theta(t) \quad . \quad (5.37)$$

A expressão acima fornece a componente da força centrípeta na direção X . O segundo membro é na realidade a soma das componentes das reações nesta direção, aplicadas pelos mancais sobre o eixo em A e B . Ou seja,

$$-m\omega^2 x_G \cos\theta(t) = A_x(t) + B_x(t) \quad . \quad (5.38)$$

Vale ainda (5.34)b e, portanto,

$$A_X(t) + B_X(t) = (A_x + B_x) \cos \theta(t) \quad . \quad (5.39)$$

Se o experimento for feito medindo-se o ângulo de rotação, a partir de uma posição arbitrária, porém previamente demarcada, o instante em que a componente em X da resultante passar por um máximo definirá o plano (xz) procurado, ao qual pertence o centro de massa G . Seja β o ângulo, medido a partir da posição previamente demarcada, que define o plano procurado e seja, também,

$$F_X(t) = -(A_X(t) + B_X(t)) = -(A_x + B_x) \cos \theta(t) = F_0 \cos \theta(t) = F_0 \cos(\omega t + \phi) \quad . \quad (5.40)$$

a medida correspondente à *componente X da resultante das reações aplicadas nos mancais*. F_0 é a amplitude e ϕ é o avanço de fase, medido relativamente à passagem da seção previamente demarcada pela direção X . A excentricidade será dada então por,

$$x_G = \frac{F_0}{m\omega^2} \quad (5.41)$$

e a posição angular do plano que contém o centro de massa em relação à seção demarcada será o próprio avanço de fase, ou seja,

$$\beta = \phi \quad . \quad (5.42)$$

Note que estas medidas poderiam ser feitas estaticamente, com o eixo na horizontal. No entanto poderiam estar mais sujeitas a erros se o atrito nos mancais fosse relativamente grande e a excentricidade pequena. Ademais, o procedimento dinâmico acima descrito pode ser incorporado naquele que permitirá medir o desbalanceamento dinâmico, ou seja aquele da matriz de inércia.

Note também, como foi adiantado, que se o rotor tivesse eixo fora da vertical, ainda assim seria possível escrever expressões equivalentes, eliminando-se,

matematicamente, o efeito da força peso das equações²¹. No entanto, na prática, seria muito mais difícil controlar a velocidade angular, posto que existiria então uma aceleração angular provocada pelo torque da força peso em torno do eixo do rotor.

Suponha agora que, analogamente, a coordenada z_G do centro de massa tenha sido determinada, a partir do cálculo dos momentos das reações em torno de eixos paralelos a X e Y (ou previamente, por meio de um ensaio estático, com o eixo do rotor posicionado na horizontal). Podem, assim, ser supostas conhecidas as coordenadas z_A e z_B , dos mancais, relativamente à seção que contém o centro de massa. Das equações (5.34)a,b segue que

$$\begin{aligned} J_{yz} &= \frac{1}{\omega^2} (z_A A_y + z_B B_y) \\ J_{xz} &= \frac{1}{\omega^2} ((z_A A_x + z_B B_x) + x_G P) \end{aligned} \quad , \quad (5.43)$$

e, portanto, de (5.35)

$$\begin{aligned} J_{yz} &= \frac{1}{\omega^2} ((z_A A_Y(t) + z_B B_Y(t)) \cos \theta(t) - (z_A A_X(t) + z_B B_X(t)) \sin \theta(t)) \\ J_{xz} &= \frac{1}{\omega^2} ((z_A A_X(t) + z_B B_X(t)) \cos \theta(t) + (z_A A_Y(t) + z_B B_Y(t)) \sin \theta(t) + x_G P) \end{aligned} \quad (5.44)$$

Assim,

$$\begin{aligned} J_{yz} &= \frac{1}{\omega^2} (z_A A_Y(\theta(t)) + z_B B_Y(\theta(t)))_{\theta=2n\pi} = \\ &= \frac{1}{\omega^2} (z_A A_Y(\theta(t)) + z_B B_Y(\theta(t)))_{t=(2n\pi-\phi)/\omega} \\ J_{xz} &= \frac{1}{\omega^2} ((z_A A_X(\theta(t)) + z_B B_X(\theta(t)))_{\theta=2n\pi} + x_G P) = \\ &= \frac{1}{\omega^2} ((z_A A_X(\theta(t)) + z_B B_X(\theta(t)))_{t=(2n\pi-\phi)/\omega} + x_G P) \end{aligned} \quad . \quad (5.45)$$

que permitem determinar o desbalanceamento dinâmico.

²¹ Sugere-se que o leitor verifique a assertiva.

5.2.2. Balanceamento

O segundo passo, após medir o desbalanceamento original, consiste em balancear o corpo. O corpo, uma vez balanceado, deverá apresentar:

$$\begin{aligned} x_{\bar{G}} &= 0 \\ y_{\bar{G}} &= 0 \\ \bar{J}_{xz} &= 0 \\ \bar{J}_{yz} &= 0 \end{aligned} \quad . \quad (5.46)$$

Tem-se quatro “variáveis de balanceamento”, portanto. Considere que o balanceamento seja realizado pela adição (ou subtração) de dois corpos, de dimensão diminuta, de massas m_1 e m_2 , a serem posicionados nos pontos $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, respectivamente (ver figura abaixo, ilustrativa de uma máquina de balanceamento de rodas automotivas). São, assim, oito os “graus de liberdade” para o balanceamento. Em geral os parâmetros $z_1, z_2, r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ e $r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ são fixados, a priori, e deixados como “graus de liberdade” os parâmetros m_1, m_2, γ_1 e γ_2 , onde $x_i = r_{i1} \cos \gamma_i$, $i = 1, 2$. Outras alternativas existem, no entanto. Por exemplo, podem ser fixados (z_1, m_1, z_2, m_2) deixando por determinar $(r_1, \gamma_1, r_2, \gamma_2)$.

Da definição de centro de massa e lembrando que os eixos (x, y) foram escolhidos de forma que $y_G = 0$, as equações (5.46)a,b podem ser escritas,

$$\begin{aligned} mx_G + m_1x_1 + m_2x_2 &= mx_{\bar{G}} = 0 \\ m_1y_1 + m_2y_2 &= my_{\bar{G}} = 0 \end{aligned} \quad . \quad (5.47)$$

Por outro lado, as equações (5.45)c,d requerem, por sua vez, que

$$\begin{aligned} J_{xz} - m_1x_1z_1 - m_2x_2z_2 &= \bar{J}_{xz} = 0 \\ J_{yz} - m_1y_1z_1 - m_2y_2z_2 &= \bar{J}_{yz} = 0 \end{aligned} \quad . \quad (5.48)$$

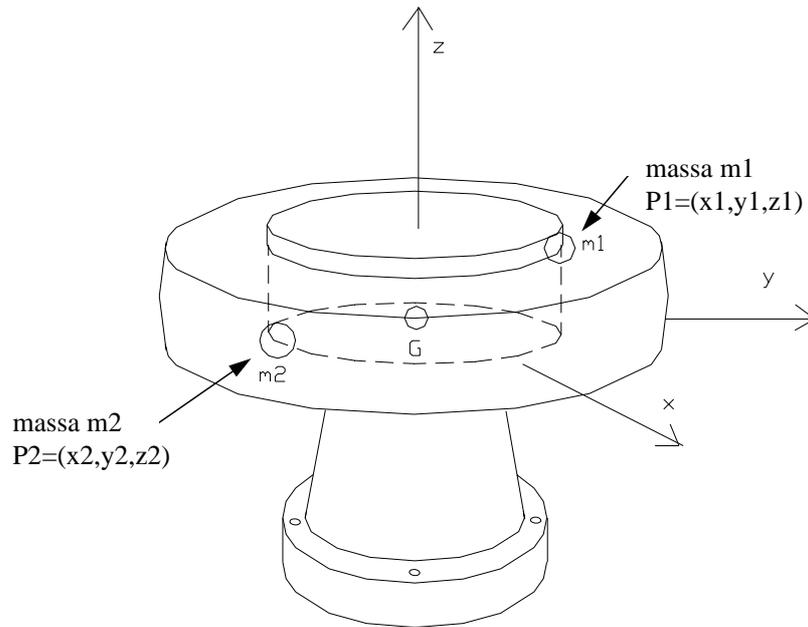


Figura 7 Balanceamento. Definições.

Considere, ainda, as seguintes variáveis auxiliares,

$$\begin{aligned} \xi_i &= m_i x_i = m_i r_i \cos \gamma_i \\ \psi_i &= m_i y_i = m_i r_i \sin \gamma_i \\ i &= 1, 2 \end{aligned} \quad . \quad (5.49)$$

As expressões (5.47) e (5.48) podem, assim, ser escritas na forma de um sistema linear de equações algébricas, nas variáveis $\xi_i, \psi_i; i = 1, 2$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ z_1 & 0 & z_2 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \psi_1 \\ \xi_2 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m x_G \\ 0 \\ J_{xz} \\ J_{yz} \end{bmatrix} \quad , \quad (5.50)$$

ou ainda, rearranjando,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_1 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -mx_G \\ 0 \\ J_{xz} \\ J_{yz} \end{bmatrix} \quad . \quad (5.51)$$

Para que o sistema acima tenha solução é necessário que o determinante da matriz de coeficientes não se anule, isto é, é necessário que,

$$(z_1 - z_2)^2 \neq 0 \quad . \quad (5.52)$$

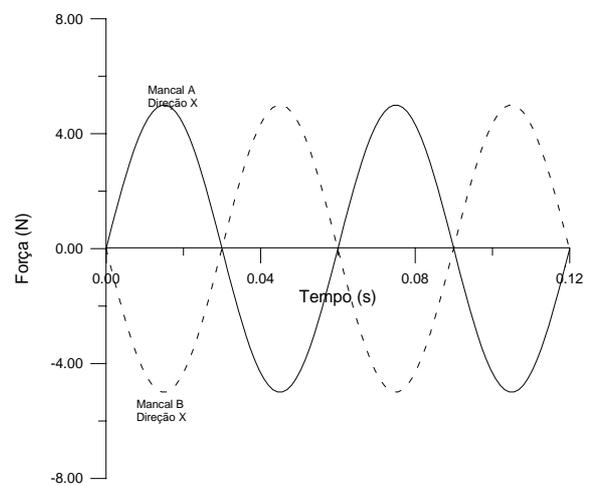
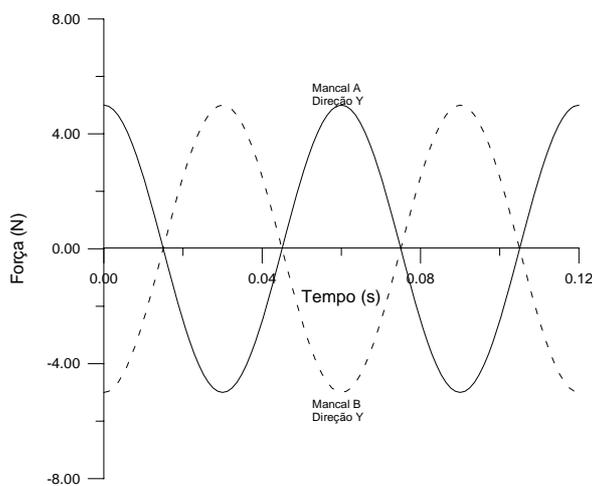
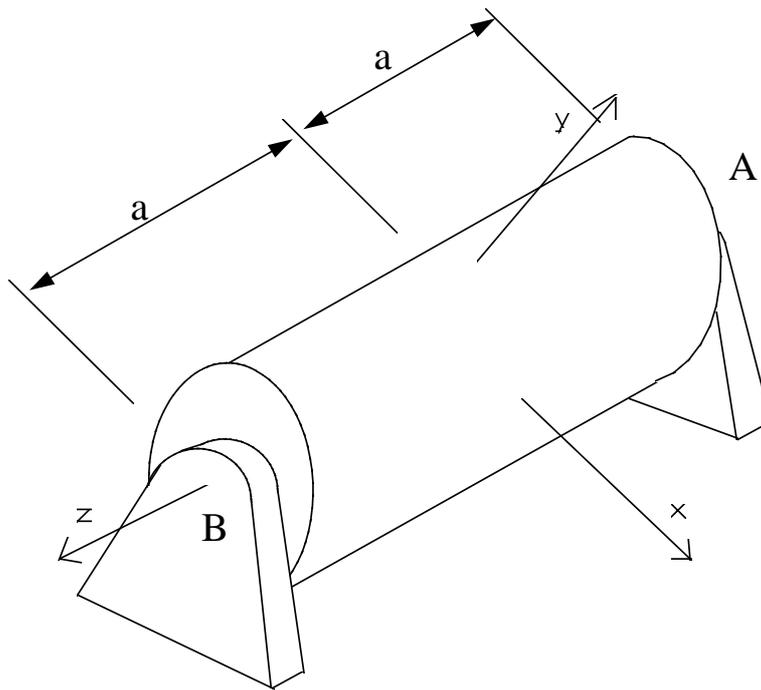
A condição acima estabelece, portanto, que *são necessários dois planos distintos de balanceamento*. A solução do sistema conduz então a

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{z_2 - z_1} \begin{bmatrix} z_2 & 0 & -1 & 0 \\ -z_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & -1 \\ 0 & -z_1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -mx_G \\ 0 \\ J_{xz} \\ J_{yz} \end{bmatrix} \quad . \quad (5.53)$$

Finalmente, fixados, por exemplo, (r_1, r_2) , os parâmetros $(m_1, \gamma_1; m_2, \gamma_2)$ são prontamente determinados através de

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \arctan(\psi_i / \xi_i) \\ m_i &= \frac{1}{\cos \gamma_i} \frac{\xi_i}{r_i} \\ i &= 1, 2 \end{aligned} \quad . \quad (5.54)$$

Exemplo 3.8 - Os mancais da máquina de balanceamento abaixo possuem sensores de força nas direções horizontal (X) e vertical (Y). A massa do rotor cilíndrico a ser balanceado é 20Kg e possui comprimento $2a=0,5m$ e raio $R=0,1m$. Dados os gráficos gerados pelos sensores durante um teste, calcule as massas e suas posições angulares a serem adicionadas nos planos dos mancais para balancear o rotor. As massas devem ser posicionadas na superfície do rotor. Os gráficos indicam as forças exercidas sobre o rotor.



Por definição, o eixo Ox passa pelo centro de massa do rotor; logo $y_G=0$. Para calcular x_G , utiliza-se:

$$F_X = -(A_X + B_X) = -(5 \operatorname{sen} 104,72.t - 5 \operatorname{sen} 104,72.t) = 0$$

$$\text{logo } x_G = \frac{|F_X^{\max}|}{m\omega^2} = 0$$

, ou seja, a rotor está balanceado estaticamente.

Utilizando as fórmulas para o cálculo de J_{yz} e J_{xz} dadas na parte teórica notando que $z_A \cong -z_B \cong -a$ (ou seja considerando simetria na direção axial), obtém-se:

$$J_{xz} = 0$$

$$J_{yz} = -\frac{2 \times 5}{104,72^2} \times 0,25 = -2,28 \cdot 10^{-4} \text{ kgm}^2$$

O objetivo agora é anular, com adição das massas m_1 (em A) e m_2 (em B), o produto de inércia J_{yz} . Para isso:

$$\left| \begin{array}{ll} m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0 & \text{manter } x_G = 0 \\ m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0 & \text{manter } y_G = 0 \\ 0,25 m_1 x_1 - 0,25 m_2 x_2 = 0 & \text{manter } J_{xz} \text{ em } 0 \\ 0,25 m_1 y_1 - 0,25 m_2 y_2 = 2,28 \cdot 10^{-4} & \text{transformar } J_{yz} \text{ em } 0 \end{array} \right.$$

que pode ser resolvido e fornece:

$$x_1 = x_2 = 0$$

$$y_1 = -y_2 = 0,1m (= R)$$

$$m_1 = m_2 = 4,56g$$

6. MOVIMENTO EM TORNO DE UM PONTO FIXO

Este caso ocupa lugar de destaque no estudo da dinâmica de um corpo rígido. Não apenas por sua importância histórica, conceitual e didática, mas também por sua relevância prática.

Cabe aqui observar que, na presente seção, entende-se por “ponto fixo” um ponto pertencente ao C.R. em estudo e que não se movimenta em relação a um referencial solidário à Terra. Casos mais gerais, onde este ponto é solidário a um referencial que se move em relação à Terra, podem ser abordados, obviamente, com a aplicação dos teoremas fundamentais relativos ao *movimento do baricentro* e à *variação do momento angular* em sua forma mais geral, vista nos capítulos 2 e 4, respectivamente. Nas seções 6.2 e 6.3 os efeitos giroscópicos associados à rotação da Terra não serão abordados. Já na seção 6.4, que estuda o movimento da bússola giroscópica, estes efeitos serão os de maior relevância, posto que este é um mecanismo cuja função é determinar o Norte Verdadeiro, o que é realizado através dos efeitos giroscópicos acima mencionados.

Como o movimento estudado se faz em torno de um ponto fixo, as trajetórias de todo e qualquer ponto do C.R. se faz sobre uma superfície esférica de raio igual à distância do ponto considerado ao ponto fixo. Esta particularidade do movimento induz a adoção de um sistema especial de coordenadas, constituído pelos denominados *Ângulos de Euler*.

Antes que se adentre o estudo da dinâmica, propriamente dita, faz-se necessário introduzir as definições derivadas deste especial sistema de coordenadas e propriedades delas decorrentes.

6.1. ÂNGULOS DE EULER

Os ângulos de Euler constituem-se em escolha “natural” de um sistema de coordenadas adequadas ao tratamento do presente problema. Contudo, podem ser qualificados dentro de uma classe genérica de coordenadas, denominadas *coordenadas generalizadas*. O tratamento geral da mecânica sob a ótica das coordenadas generalizadas é objeto da Mecânica Analítica²².

Considere a figura abaixo. O é o ponto fixo. O sistema cartesiano de coordenadas $(OXYZ)$, de base canônica $(\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$, orienta um referencial “fixo”, com o eixo Z indicando a vertical. O sistema $(Oxyz)$ é um sistema não-solidário ao corpo de base canônica $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, com o eixo z passante, se conveniente, por seu centro de massa G , i.e., orientado pelo versor \mathbf{k} . O sistema $(Ox'y'z')$ é solidário ao corpo, com o eixo z' coincidente a z , ou seja, orientado pelo mesmo versor \mathbf{k} . O ângulo θ é definido como o ângulo $(Z\hat{O}z)$, ou seja, o ângulo que o eixo z faz com o eixo vertical Z . O eixo y será definido como o traço do plano (x, y) no plano horizontal (X, Y) , apontando no sentido positivamente orientado segundo o ângulo θ . Ou seja, o eixo y está contido no plano horizontal e é normal ao plano (Z, z) ²³. O versor \mathbf{j} que orienta o eixo y é dado, portanto, por

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\sin \theta} (\mathbf{K} \wedge \mathbf{k})^{24} \quad . \quad (6.1)$$

Sem perda de generalidade, sejam ϕ o ângulo $(Y\hat{O}y)$, que o eixo y faz com o eixo Y , e ψ o ângulo $(x\hat{O}x')$, que o eixo x' faz com x . As taxas de variação temporal

²² ver, p.ex., Goldstein, Sommerfeld, Meirovitch, Grenwwod, Whittaker, entre outros.

²³ Este eixo é, por vezes denominado, *linha dos nós*, termo emprestado à astronomia.

²⁴ Embora esta expressão tenha módulo de limite unitário quando $\theta \rightarrow 0$, a singularidade se manifesta na indefinição da direção do versor \mathbf{j} . Esta singularidade é inerente ao sistema Euleriano e pode ser removida dentro da álgebra dos quaternions de Hamilton.

$(\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$ dos ângulos (θ, ϕ, ψ) são muitas vezes denominadas *nutação*, *precessão* e *rotação própria*^{25,26}. O movimento de nutação corresponde à movimentação angular do eixo Oz em torno de Oy , ou seja, em relação à vertical OZ . O movimento de precessão corresponde à rotação do eixo Oy em torno do eixo OZ .

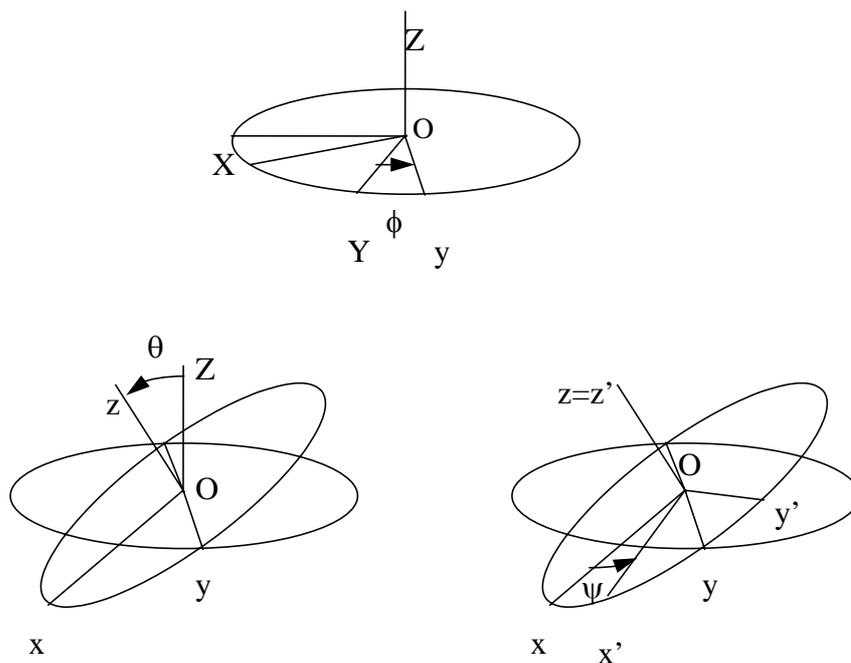


Figura 8 Ângulos de Euler.

O movimento de rotação própria, por sua vez, também conhecido na literatura científica de língua inglesa como “*spin*”, caracteriza o movimento de rotação que o corpo faz em torno de seu próprio eixo Oz . Dentro da hipótese de movimento em

²⁵ Embora, mais uma vez, emprestada da astronomia, esta nomenclatura pode lá ter significado diverso, dependendo do movimento estudado. Pode referir-se, por exemplo, ao movimento de nutação astronômico do eixo terrestre, porém não àquele associado ao movimento livre do eixo de rotação, mas outro, decorrente da ação da Lua, resultante que é da precessão da normal à órbita lunar em torno da normal à eclíptica terrestre. (ver Sommerfeld, art. 26.2, página. 146).

²⁶ Embora curvilíneas $(\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$ são *holonômicas*, enquanto as correspondentes cartesianas $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ são retilíneas porém *não-holonômicas*.

torno de “ponto fixo”, estes três graus de liberdade são suficientes para definir, univocamente, a posição do corpo rígido no espaço.

Estabeleceremos como *referencial móvel*, em relação ao qual o corpo apresentará apenas o movimento de rotação própria, o referencial orientado pelo sistema $(Oxyz)$. Assim, o *vetor de rotação* de arrastamento, $\mathbf{\Omega}_a$, será composto pelos movimentos de nutação e precessão. Já o *vetor de rotação relativa* $\mathbf{\Omega}_r$, estará associado unicamente ao movimento de rotação própria.

Tem-se então,

$$\mathbf{\Omega}_a = \dot{\theta} \mathbf{j} + \dot{\phi} \mathbf{K} \quad (6.2)$$

e

$$\mathbf{\Omega}_r = \dot{\psi} \mathbf{k} \quad (6.3)$$

Visto, também, que

$$\mathbf{K} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{k} \quad , \quad (6.4)$$

o vetor de rotação de arrastamento fica escrito, na base, $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$,

$$\mathbf{\Omega}_a = -\dot{\phi} \sin \theta \mathbf{i} + \dot{\theta} \mathbf{j} + \dot{\phi} \cos \theta \mathbf{k} \quad . \quad (6.5)$$

O *vetor de rotação “absoluto”* $\mathbf{\Omega}$, do referencial $(Ox'y'z')$, i.e., do corpo, será então composto pelos vetores de rotação de arrastamento e de rotação relativa,

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_a + \mathbf{\Omega}_r \quad , \quad (6.8)$$

que, escrito em termos dos movimentos de nutação, precessão e rotação própria, fica,

$$\boldsymbol{\Omega} = -\dot{\phi} \sin \theta \mathbf{i} + \dot{\theta} \mathbf{j} + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \mathbf{k} \quad . \quad (6.9)$$

6.2. APLICAÇÃO DO TEOREMA DO MOMENTO ANGULAR

Evidentemente, a forma de aplicação mais adequada do Teorema do Momento Angular, ou Equação de Euler, será aquela associada ao movimento em torno de um ponto fixo.

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O^{ext} \quad , \quad (6.10)$$

Em geral, quando o problema tratado envolver um corpo rígido *sem simetria de distribuição de massa em torno do eixo próprio Oz*, esta equação será escrita, então

$$\left(\frac{d\mathbf{K}'_O}{dt} \right)_{(Ox'y'z')} + \boldsymbol{\Omega}' \wedge \mathbf{K}'_O = \mathbf{M}'_O^{ext} \quad , \quad (6.11)$$

com o momento angular do corpo em relação ao ponto fixo O dado por,

$$\mathbf{K}'_O \equiv \{\mathbf{K}'_O\} = [\mathbf{J}'_O] \{\boldsymbol{\Omega}'\} \quad (6.12)$$

onde $[\mathbf{J}'_O]$ é a matriz de inércia do corpo, segundo o sistema coordenado $(Ox'y'z')$.

Note que no sistema $(Ox'y'z')$, solidário ao corpo, a matriz de inércia é obviamente invariante e, portanto a equação fica escrita,

$$[\mathbf{J}'_O]\{\dot{\Omega}'\}_{(Ox'y'z')} + \Omega' \wedge ([\mathbf{J}'_O]\{\Omega'\}) = \mathbf{M}'_O{}^{ext} \quad , \quad (6.13)$$

ou em notação tão somente matricial,

$$[\mathbf{J}'_O]\{\dot{\Omega}'\}_{(Ox'y'z')} + [\Omega'][\mathbf{J}'_O]\{\Omega'\} = \{\mathbf{M}'_O{}^{ext}\} \quad , \quad (6.14)$$

Consonante à definição mais geral, $[\Omega']$ é a matriz de rotação,

$$[\Omega'] = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega'_z & \Omega'_y \\ \Omega'_z & 0 & -\Omega'_x \\ -\Omega'_y & \Omega'_x & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad (6.15)$$

que no presente caso toma a forma específica,

$$[\Omega'] = [\mathbf{B}][\Omega][\mathbf{B}]^t$$

com

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & -(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) & \dot{\theta} \\ (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) & 0 & \dot{\phi} \sin \theta \\ -\dot{\theta} & -\dot{\phi} \sin \theta & 0 \end{bmatrix}; [\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

6.2.1. Casos que exibem axi-simetria de distribuição de massa

Casos importantes existem, no entanto, em que o corpo em estudo exhibe axi-simetria de distribuição de massa, em torno de seu eixo próprio Oz . Este será, obviamente, um eixo principal de inércia, assim como o será qualquer eixo diametral. Nestes caso, é evidente que a matriz de inércia é também invariante com respeito ao sistema $(Oxyz)$, móvel, porém não-solidário ao corpo, e que Oy e Oz são eixos principais de inércia. Um exemplo importante, além de usual e cotidiano, é o de um pião. O momento de inércia J_z em torno do eixo de rotação própria Oz será designado J , e os momentos de inércia diametraes, $J_x = J_y$ designados I , de tal forma que a matriz de inércia, no sistema $(Oxyz)$ ficará escrita,

$$[\mathbf{J}_O] = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \quad . \quad (6.17)$$

O momento angular do corpo, em relação ao polo fixo O , será dado então por

$$\mathbf{K}_O = -I\dot{\phi}\text{sen}\theta\mathbf{i} + I\dot{\theta}\mathbf{j} + J(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\mathbf{k} \quad (6.18)$$

e sua derivada temporal por

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} \right)_{(Oxyz)} + \boldsymbol{\Omega}_a \wedge \mathbf{K}_O \quad , \quad (6.19)$$

Como a matriz de inércia é invariante com relação a $(Oxyz)$, o TMA fica reduzido à forma,

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = [\mathbf{J}_O] \left\{ \dot{\boldsymbol{\Omega}} \right\}_{(Oxyz)} + \boldsymbol{\Omega}_a \wedge \mathbf{K}_O = \mathbf{M}_O^{ext} \quad , \quad (6.20)$$

ou, na notação matricial,

$$[\mathbf{J}_O] \left\{ \dot{\boldsymbol{\Omega}} \right\}_{(Oxyz)} + [\boldsymbol{\Omega}_a] [\mathbf{J}_O] \left\{ \boldsymbol{\Omega} \right\} = \left\{ \mathbf{M}_O^{ext} \right\} \quad , \quad (6.21)$$

com

$$[\boldsymbol{\Omega}_a] = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\phi}\cos\theta & \dot{\theta} \\ \dot{\phi}\cos\theta & 0 & \dot{\phi}\text{sen}\theta \\ -\dot{\theta} & -\dot{\phi}\text{sen}\theta & 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (6.22)$$

Note que a rotação própria não comparece nesta matriz. O termo “giroscópico” escrito explicitamente fica, portanto,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_a \wedge \mathbf{K}_O = & \left(-I\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta + J\dot{\theta}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) \right) \mathbf{i} + \\ & + \left(-I\dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta + J\dot{\phi}\sin\theta(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) \right) \mathbf{j} \end{aligned} \quad (6.23)$$

e a equação (6.21) explícita, na forma de três equações nas componentes cartesianas (x,y,z) , fica por sua vez,

$$\begin{cases} -I \frac{d}{dt}(\dot{\phi}\sin\theta) - I\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta + J\dot{\theta}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = M_{Ox} \\ I \frac{d\dot{\theta}}{dt} - I\dot{\phi}^2 \sin\theta\cos\theta + J\dot{\phi}\sin\theta(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = M_{Oy} \\ J \frac{d}{dt}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = M_{Oz} \end{cases} \quad (6.24)$$

Como será visto adiante, é interessante multiplicar a primeira destas equações por $-\sin\theta$ e reescrevê-la como,

$$\frac{d}{dt} \left(I\dot{\phi}\sin^2\theta + J\cos\theta(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) \right) - J\cos\theta \frac{d}{dt}(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = -M_{Ox}\sin\theta \quad (6.25)$$

Identificando, ainda, o segundo termo da equação acima como o primeiro membro de (6.24)c multiplicado por $\cos\theta$, vem, então,

$$\frac{d}{dt} \left(I\dot{\phi}\sin^2\theta + J\cos\theta(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) \right) = -M_{Ox}\sin\theta + M_{Oz}\cos\theta \quad (6.26)$$

O leitor poderá verificar que o segundo membro da equação (6.26) nada mais é do que a projeção do vetor \mathbf{M}_O^{ext} na direção do eixo fixo OZ , ou seja

$$\mathbf{M}_O^{ext} \cdot \mathbf{K} = M_{OZ} = -M_{Ox} \sin \theta + M_{Oz} \cos \theta \quad , \quad (6.27)$$

e que o termo entre parênteses no primeiro membro de (6.26) é a componente do momento angular na direção deste mesmo eixo,

$$\mathbf{K}_O \cdot \mathbf{K} = K_{OZ} = I\dot{\phi} \sin^2 \theta + J \cos \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \quad . \quad (6.28)$$

Assim, o sistema de equações (6.24) pode ser substituído por²⁷,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (I\dot{\phi} \sin^2 \theta + J \cos \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)) = -M_{Ox} \sin \theta + M_{Oz} \cos \theta = M_{OZ} \\ I \frac{d\dot{\theta}}{dt} - I\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta + J\dot{\phi} \sin \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = M_{Oy} \\ J \frac{d}{dt} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = M_{Oz} \end{cases} \quad (6.29)$$

ou de forma compacta,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (K_{OZ}) = M_{OZ} \\ \frac{d}{dt} (K_{Oy}) = M_{Oy} \\ \frac{d}{dt} (K_{Oz}) = M_{Oz} \end{cases} \quad . \quad (6.30)$$

Esta forma de descrever as equações do movimento é particularmente útil em casos de bastante relevância:

²⁷ Estas são as equações de movimento, escritas segundo as coordenadas generalizadas (ϕ, θ, ψ) , e que podem ser deduzidas diretamente do formalismo da Mecânica Analítica, a partir da aplicação da Equação de Lagrange.

- (i) quando O for o próprio centro de massa G , ou
- (ii) quando as únicas forças externas agentes sobre o corpo forem o peso e a reação do apoio, no ponto fixo O .

Em ambas as situações $M_{Oz} = M_{Oz} = 0$ e, portanto as componentes do momento angular nestas direções serão invariantes, ou seja, constantes do movimento. No primeiro caso em que $O \equiv G$, a ser exemplificado a seguir através do estudo de um giroscópio, tem-se adicionalmente $M_{Oy} = 0$, o que significa que o momento angular será invariante. Por outro lado, um pião simétrico, sob ações únicas do próprio peso e da reação no apoio, é típico do segundo caso.

6.3. ENERGIA CINÉTICA DE UM C.R. EM MOVIMENTO EM TORNO DE UM PONTO FIXO

No caso particular do *movimento de um C.R. em torno de um ponto fixo* a energia cinética reduz-se apenas ao termo associado à rotação em torno deste ponto:

$$T = \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\Omega}\}^T [\mathbf{J}_O] \{\boldsymbol{\Omega}\}; \quad O \text{ um ponto fixo} \quad . \quad (6.31)$$

Pode-se escrever também,

$$T = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{K}_O \quad , \quad (6.32)$$

ou, na forma matricial,

$$T = \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\Omega}\}' \{\mathbf{K}_O\} \quad . \quad (6.33)$$

A equação acima pode ser escrita explicitamente, em termos das coordenadas Eulerianas, para um corpo rígido genérico. Fica então

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left\{ J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2 + 2J_{xy} \omega_x \omega_y + 2J_{yz} \omega_y \omega_z + 2J_{zx} \omega_z \omega_x \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ J_x (\dot{\phi} \sin \theta)^2 + J_y \dot{\theta}^2 + J_z (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \right\} + \\ &\quad + J_{xy} \dot{\phi} \sin \theta \dot{\theta} + J_{yz} \dot{\theta} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) + J_{zx} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \dot{\phi} \sin \theta \end{aligned} \quad (6.34)$$

Quando a matriz de inércia é diagonal, ou seja, quando os eixos considerados são *eixos principais de inércia*, a energia cinética de um C.R., movendo-se em torno de um ponto fixo, ponto este pertencente a um dos eixos principais fica, simplesmente,

$$T = \frac{1}{2} \left\{ J_x (\dot{\phi} \sin \theta)^2 + J_y \dot{\theta}^2 + J_z (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \right\} \quad (6.35)$$

É, no entanto, no caso particular quando Oz é um eixo de simetria de distribuição de massa que esta forma acaba por desempenhar papel de maior relevância prática. Tomando assim, (6.17), a energia cinética fica simplesmente,

$$T = \frac{1}{2} \left\{ I (\dot{\phi} \sin \theta)^2 + I \dot{\theta}^2 + J (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 \right\} \quad (6.36)$$

Considere que não haja qualquer dissipação de energia por atrito, seja na articulação O , seja de origem fluido-dinâmica. A reação na articulação não realiza trabalho, pois o ponto O é fixo, por hipótese. Se todas as outras forças agentes sobre o corpo forem conservativas, ou seja, se derivarem de um potencial de energia V , como é o caso quando da ação única da força peso, e como os efeitos giroscópicos são conservativos, conforme foi demonstrado anteriormente, a energia mecânica total do C.R. será conservada,

$$\frac{d}{dt}(T + V) = 0 \quad (6.37)$$

Se, além disso $O \equiv G$, a energia cinética será um invariante,

$$\frac{dT}{dt} = 0 \quad (6.38)$$

A natureza conservativa dos termos giroscópicos está associada ao seu efeito estabilizador, assunto que será tratado a seguir.

6.4. O GIROSCÓPIO

Como o próprio nome diz, o giroscópio é um mecanismo que se utiliza dos efeitos giroscópicos para tornar estável um rotor em torno de um determinado eixo. Sua aplicação como instrumento de navegação ou de estabilização é de fundamental importância na engenharia e na ciência. O assunto é excepcionalmente vasto e tem sido exaustivamente estudado. Não existe qualquer pretensão, portanto, de abordar o problema de forma sistemática e completa, mesmo porque tal tarefa fugiria completamente dos objetivos do presente texto²⁸. Apenas alguns rudimentos conceituais serão objeto desta seção.

O giroscópio mais simples consiste de um rotor, montado sobre uma suspensão *Cardan*, podendo assumir qualquer posição no espaço. No entanto, seu centro de massa G deve permanecer fixo, ou seja, coincidente a O . A figura abaixo apresenta um desenho esquemático de um giroscópio, com os eixos coordenados de referência bem como os ângulos de Euler. O sistema $(Oxyz)$ será tomado fixo no anel interno, que suporta o eixo Oz , em torno do qual o *rotor balanceado* gira com rotação própria $\dot{\psi}$, relativamente a $(Oxyz)$, portanto. A *linha dos nós* BB' fica agora evidente, coincidindo com o eixo Oy e orientada pelo versor \mathbf{j} .

²⁸ Diversas monografias têm sido publicadas, ver, p.ex., Klein & Sommerfeld, *Theorie des Kreisels*, Crabtree, *Spinning Top and Gyroscope Motion*, Scarbrough, *The Gyroscope, theory and applications*, Greenhill, *Gyroscopic Theory*, Radix, *Techniques Inertielles*, para mencionar alguns, além de textos clássicos em mecânica teórica, como p.ex., Whittaker, *A Treatise of the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*.

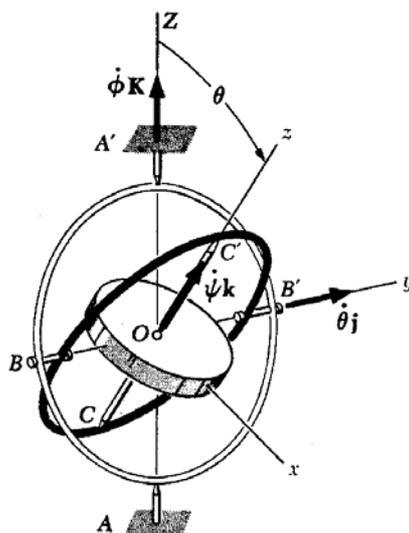


Figura 9 Giroscópio

O sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda-ordem (6.24) ou, alternativamente, (6.29), rege o movimento do *rotor*, aqui *considerado como o C.R. em estudo*. Estas equações são, em geral, de difícil tratamento, quando da ação de sistemas genéricos de forças externas. Cabe, então, tratamento numérico²⁹. Alguns casos particulares existem, no entanto, onde é possível um aprofundamento analítico. Embora particulares, são de extrema relevância.

6.4.1. Precessão estacionária ou regular

Considere, primeiramente, e desprezando dissipações por atrito, que o rotor tenha *rotação própria* com taxa constante $\dot{\psi}$, e que seu eixo Oz apresente um ângulo θ , constante, em relação à vertical, descrevendo um *movimento de precessão* a uma taxa $\dot{\phi}$, também constante. Esta condição de “equilíbrio dinâmico” é denominada *precessão estacionária* ou *regular*. Sob que condições seria este movimento possível?

Tome a equação(6.24), com $\theta, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}$ constantes e obtenha,

²⁹ Lembre, no entanto, da indefinição na *linha dos nós* quando $\theta=0$.

$$\begin{cases} M_{O_x} = 0 \\ M_{O_y} = -I\dot{\phi}^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + J\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \\ M_{O_z} = 0 \end{cases} \quad . \quad (6.39)$$

Ou seja, para manter o giroscópio neste estado de “equilíbrio dinâmico” é necessária apenas a aplicação de um momento em torno da *linha dos nós*, i.e., do eixo Oy . Este momento pode ser reescrito,

$$M_{O_y} = [(J - I)\dot{\phi} \cos \theta + J\dot{\psi}] \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \quad , \quad (6.40)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} M_{O_y} \mathbf{j} &= \left((J - I) \frac{\dot{\phi}}{\dot{\psi}} \cos \theta + J \right) \dot{\phi} \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} = \\ &= \left((J - I) \frac{\dot{\phi}}{\dot{\psi}} \cos \theta + J \right) (\dot{\phi} \mathbf{K} \wedge \dot{\psi} \mathbf{k}) = \\ &= \left((J - I) \frac{\dot{\phi}}{\dot{\psi}} \cos \theta + J \right) (\boldsymbol{\Omega}_p \wedge \boldsymbol{\Omega}_r) \end{aligned} \quad , \quad (6.41)$$

onde $\boldsymbol{\Omega}_p = \dot{\phi} \mathbf{K}$ e $\boldsymbol{\Omega}_r = \dot{\psi} \mathbf{k}$ são, respectivamente, os vetores de rotação associados à precessão e à rotação própria. Usualmente, $J > I$, para rotores “achatados”³⁰, e portanto o momento necessário para contrabalançar o binário giroscópio é positivo. Em outras palavras, o binário giroscópio tem caráter restaurador.

Note ainda que, quando a rotação própria é muito alta, a precessão é usualmente pequena, em termos comparativos. Nesta situação, desprezando-se a primeira parcela que comparece entre parênteses na expressão acima, o momento fica, aproximadamente dado por,

$$M_{O_y} \mathbf{j} \cong J \dot{\phi} \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} = J (\boldsymbol{\Omega}_p \wedge \boldsymbol{\Omega}_r); \quad \dot{\phi} \ll \dot{\psi} \quad . \quad (6.42)$$

Esta expressão, embora simplificada, permite enunciar a seguinte assertiva: *a taxa de precessão estacionária é inversamente proporcional à taxa de rotação própria*

³⁰ Para um disco, p. ex., $J = 2I = mr^2/2$.

quando o rotor é submetido a um binário em torno da linha dos nós. Esta expressão é exata, contudo se $\theta = \pi/2$ e/ou se $J = I$ (ver (6.40)).

6.4.2. Precessão livre

Note que, no caso anterior, eram especificadas as taxas de rotação própria e de precessão e determinado, por conseguinte, o momento externo a ser aplicado para manter esta situação de equilíbrio dinâmico. O presente problema, em contrapartida, pressupõe que o rotor possua velocidade angular inicial e busca-se determinar a taxa de precessão estacionária compatível com a ausência de quaisquer outras forças que não as de origem gravitacional. Neste caso, $\mathbf{M}_G^{ext} = \mathbf{0}$, e diz-se que o giroscópio gira livremente, em *precessão livre*. Tomando a equação (6.40) e fazendo $M_{Gy} \equiv M_{Oy} = 0$, tem-se, desde que $\theta \neq 0$ e $\dot{\phi} \neq 0$,

$$(J - I)\dot{\phi} \cos \theta + J\dot{\psi} = 0 \quad , \quad (6.43)$$

ou seja,

$$\dot{\phi} = -\frac{J\dot{\psi}}{(J - I)\cos \theta} \quad . \quad (6.44)$$

Cabe observar, da expressão acima, que, quando $J > I$ e $\theta < \pi/2$ a precessão será *retrógrada*, isto é, se fará no sentido inverso ao de rotação própria. Ao contrário, quando $J < I$ e $\theta < \pi/2$, ou ainda, quando $J > I$ e $\theta > \pi/2$, a precessão será *direta*, ou seja, se fará no mesmo sentido da rotação própria.

Se $(J - I) < J$, por outro lado, tem-se $J/((J - I)\cos \theta) > 1$. Ou seja, a taxa de precessão é, em módulo, maior do que a de rotação própria, atingindo valores muito altos para $\theta \rightarrow \pi/2$.

6.4.3. Movimento geral sob ação de torque em torno da linha dos nós.

Considere, agora, o movimento de um 'gyro', sob a ação exclusiva de um torque externo em torno da linha dos nós, ou seja, de Oy . O sistema (6.29) reduz-se, então a

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(I\dot{\phi}\sin^2\theta + J\cos\theta(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)) = 0 \\ I\frac{d\dot{\theta}}{dt} - I\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta + J\dot{\phi}\sin\theta(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = M_{Oy} \\ \frac{d}{dt}(J(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)) = 0 \end{cases} \quad (6.45)$$

Como visto em (6.30), os termos entre parênteses da primeira e terceira equações são, respectivamente, as componentes K_{OZ} e K_{Oz} do momento angular, em torno dos eixos OZ e Oz . Na situação estudada, são *invariantes do movimento*. Deve ser observado que

$$I\dot{\phi}\sin^2\theta = K_{OZ} - K_{Oz}\cos\theta \quad , \quad (6.46)$$

e que portanto,

$$\dot{\phi} = \frac{K_{OZ} - K_{Oz}\cos\theta}{I\sin^2\theta} \quad . \quad (6.47)$$

Assim, o segundo e terceiro termos que comparecem em (6.45)b podem ser escritos,

$$-I\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta = -(K_{OZ} - K_{Oz}\cos\theta)^2 \frac{\cos\theta}{I\sin^3\theta} \quad , \quad (6.48)$$

e

$$J\dot{\phi}\sin\theta(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = \frac{(K_{OZ} - K_{Oz}\cos\theta)K_{Oz}}{I\sin\theta}$$

e, se substituídos naquela equação, conduzem, após algumas transformações algébricas à seguinte equação diferencial ordinária, não-linear, que rege o movimento do ‘gyro’,

$$I\ddot{\theta} + \frac{(\alpha - \beta\cos\theta)(\beta - \alpha\cos\theta)}{I\sin^3\theta} = M_{Oy} \quad , \quad (6.49)$$

onde $\alpha = K_{OZ}$, $\beta = K_{Oz}$ são os dois invariantes. Note que (6.46) pode ser escrita,

$$\alpha = \beta\cos\theta + I\dot{\phi}\sin^2\theta \quad , \quad (6.46a)$$

6.5. O PROBLEMA DO PIÃO

O movimento do pião, em torno de um ponto fixo, segue o mesmo equacionamento geral visto até então. No entanto o centro de massa G não mais coincide com o ponto fixo O^{31} . Considere, conforme mostra a figura abaixo, um pião simétrico. O eixo fixo OZ é vertical.

Além da reação no apoio, a única força considerada será o próprio peso, de tal forma que apenas existirá momento em torno da *linha dos nós*, ou seja, do eixo Oy . Assim (6.45) regerá o movimento considerado, com $M_{Oy} = mgz_G \text{ sen } \theta$,

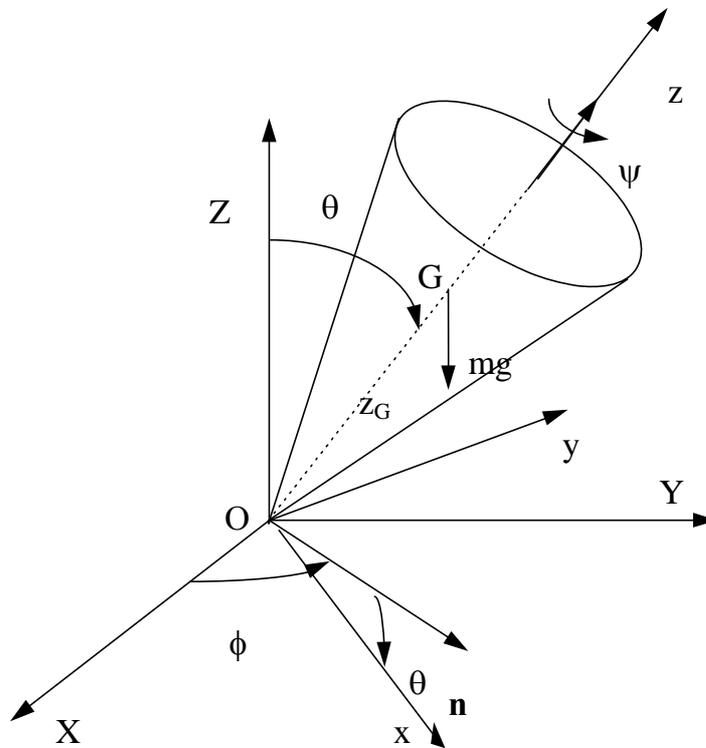


Figura 10 Pião Simétrico

³¹ (pode-se dizer que o pião é um giroscópio com o centro de massa não coincidente com o ponto de pivotamento)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(I\dot{\phi}\sin^2\theta + J\cos\theta(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)) = 0 \\ I\frac{d\dot{\theta}}{dt} - I\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta + J\dot{\phi}\sin\theta(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = mgz_G\sin\theta \\ \frac{d}{dt}(J(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)) = 0 \end{cases} \quad (6.50)$$

O movimento decorrente não será, em geral, uma precessão estacionária, mesmo sob ação exclusiva da força peso. A situação encontrada usualmente é denominada de *precessão pseudo-estacionária*, porquanto, se estável, o pião desenvolverá um movimento de precessão com pequenas flutuações, associadas às correspondentes flutuações de rotação própria e nutação.

6.5.1. Precessão estacionária

Apenas em situações muito particulares a precessão estacionária terá lugar. Para tanto é necessário que as taxas de precessão e rotação própria sejam constantes e que o ângulo do eixo próprio com respeito à vertical seja invariante. Isto ocorrerá se e só se (use (6.50))

$$(J\dot{\psi} + (J - I)\dot{\phi}\cos\theta)\dot{\phi} = mgz_G \quad (6.51)$$

ou ainda,

$$\dot{\phi}^2 + \frac{J\dot{\psi}}{(J - I)\cos\theta}\dot{\phi} - \frac{mgz_G}{(J - I)\cos\theta} = 0 \quad (6.52)$$

Para um dado ângulo de “equilíbrio”, poderá existir ao menos um par $(\dot{\phi}, \dot{\psi})$, de taxas constantes de precessão e rotação próprias que satisfaçam a equação acima. Sua solução fornece,

$$\dot{\phi} = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{J\dot{\psi}}{(J - I)\cos\theta} \pm \sqrt{\left(\frac{J\dot{\psi}}{(J - I)\cos\theta}\right)^2 + \frac{4mgz_G}{(J - I)\cos\theta}} \right\} \quad (6.53)$$

que tem soluções reais apenas se $(J - I)\cos\theta \neq 0$ e se

$$\left(\frac{J\dot{\psi}}{(J - I)\cos\theta}\right)^2 + \frac{4mgz_G}{(J - I)\cos\theta} \geq 0 \quad (6.54)$$

isto é, se

$$\dot{\psi}^2 \geq -4mgz_G \cos \theta \frac{(J-I)}{J^2} \quad . \quad (6.55)$$

Note que, para $0 < \theta < \pi/2$, esta condição será sempre satisfeita se o corpo for “achatado” ($J > I$). Nem sempre o será, no entanto, se o corpo for esbelto, ou “alongado”. Em outras palavras, corpos achatados apresentam maior “estabilidade giroscópica”. De fato, resolvendo (6.51) em termos de $\cos \theta$, vem

$$\cos \theta = \frac{1}{(1 - \frac{I}{J})\dot{\phi}^2} \left(\frac{mgz_G}{J} - \dot{\psi}\dot{\phi} \right) \quad , \quad (6.56)$$

que mostra que quanto *menor* for I/J , ou seja quanto mais “achatado” o pião, tanto *maior* será o ângulo do eixo com a vertical, para um mesmo estado de precessão e rotação própria.

Vem ainda de (6.53), para um corpo “achatado”, considerando $0 < \theta < \pi/2$, portanto satisfeita a equação (6.55), que à raiz de maior módulo corresponderia uma precessão *retrógrada*, com respeito à rotação própria. Seria *direta*, no entanto, a de menor módulo. Discussão acerca da estabilidade destas duas possíveis soluções matemáticas foge ao escopo do presente texto. Observa-se, no entanto, que à precessão estacionária de menor módulo (*direta*) corresponde o estado de menor energia cinética do pião.

Por fim, escrevendo (6.51) na forma,

$$\left(J + (J - I) \frac{\dot{\phi}}{\dot{\psi}} \cos \theta \right) \dot{\phi}\dot{\psi} = mgz_G \quad (6.57)$$

e admitindo que $\dot{\psi} \gg \dot{\phi}$, ou seja, que a rotação própria seja muito elevada, tem-se, aproximadamente, com erro da ordem $O(\dot{\phi}/\dot{\psi})$,

$$J\dot{\phi}\dot{\psi} \cong mgz_G \quad . \quad (6.58)$$

Esta expressão, aproximadamente válida quando $\dot{\psi} \gg \dot{\phi}$, é independente de θ e mostra que quanto maior for a rotação própria (“spin”), tanto menor será a taxa de precessão estacionária.

6.5.2. Movimento geral

O movimento geral de um pião simétrico, na ausência de quaisquer forças dissipativas, pode ser determinado através da solução de uma única equação diferencial ordinária não-linear, a equação (6.49) que, com $M_{Oy} = mgz_G \sin \theta$, torna-se homogênea,

$$I\ddot{\theta} + \frac{(\alpha - \beta \cos \theta)(\beta - \alpha \cos \theta)}{I \sin^3 \theta} - mgz_G \sin \theta = 0 \quad (6.59)$$

As componentes do momento angular $\alpha = K_{Oz}$, $\beta = K_{Oz}$ são dois invariantes do movimento. Note, das relações (6.28) e (6.18), que os invariantes

$$\begin{aligned} \alpha = K_{Oz} &= I\dot{\phi} \sin^2 \theta + J \cos \theta (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \\ \beta = K_{Oz} &= J(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \end{aligned} \quad (6.60)$$

dependem apenas das condições iniciais. Note também que, após a determinação de $\theta(t)$, integrando-se numericamente a equação (6.59), a taxa de precessão em cada instante fica calculada, a partir de (6.47) que, se substituída em (6.60), leva à taxa de rotação própria,

$$\dot{\psi} = \frac{\beta}{J} - \dot{\phi} \cos \theta \quad (6.61)$$

Para melhor visualização do movimento do pião, é interessante determinarmos as coordenadas de seu centro de massa, no sistema (OX, Y, Z) , fixo. Da Figura 11, vem,

$$\begin{aligned} X_G &= z_G \sin \theta \cos \phi \\ Y_G &= z_G \sin \theta \sin \phi \\ Z_G &= z_G \cos \theta \end{aligned} \quad (6.62).$$

O leitor poderá verificar que a trajetória do centro de massa G será uma curva apoiada sobre uma superfície esférica de raio z_G , conforme mostra a Figura 12,

correspondente à simulação numérica do problema ilustrado na Figura 11, através da integração de (6.59).

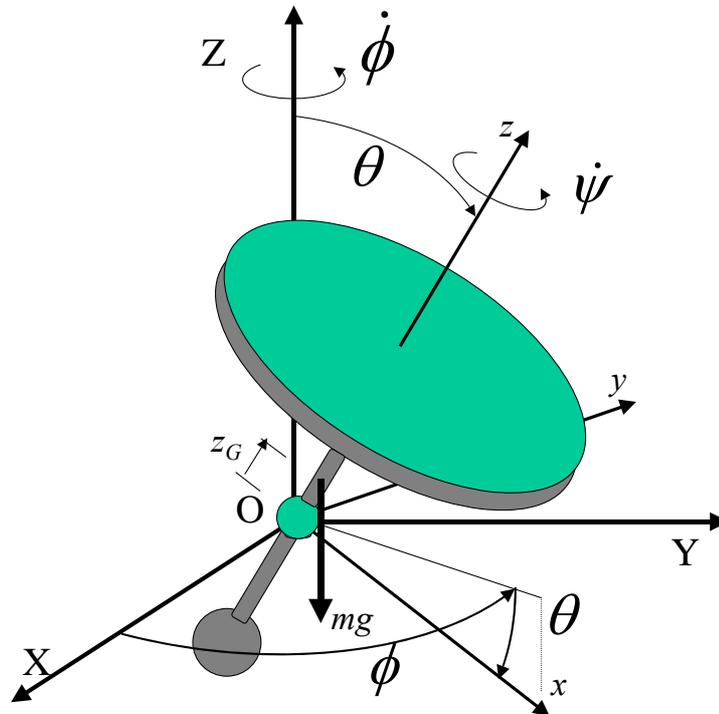


Figura 11 Pêlo simétrico.

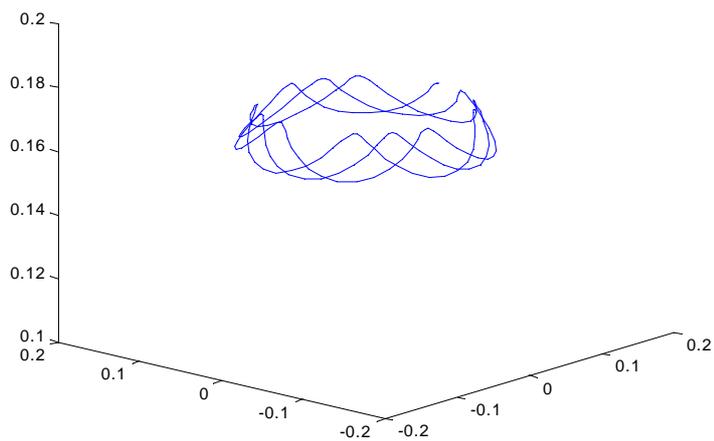


Figura 12 Exemplo de movimento do centro de massa de um pêlo (X_G, Y_G, Z_G).

6.5.3. Notas Suplementares sobre Precessão Pseudo-Regular

Pode-se dizer que a equação (6.59) é uma “equação de pêndulo generalizada”. Ao invés de integrá-la, no entanto, é preferível fazer uso de um terceiro invariante do problema: a *energia mecânica*. De fato, como mencionado anteriormente, os efeitos giroscópicos são conservativos e, como a única força considerada a realizar trabalho é a força peso³², o sistema é, portanto, conservativo. Assim, vale a equação da conservação da energia

$$T + V = E \quad , \quad (6.63)$$

onde E é a energia total, um invariante, e $V = mgz_G \cos \theta$ é a energia potencial gravitacional. Lembrando que

$$\beta = K_{Oz} = J(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \quad , \quad (6.64)$$

e substituindo (6.46), na forma

$$I\dot{\phi} \sin^2 \theta = \alpha - \beta \cos \theta \quad , \quad (6.65)$$

na expressão da energia cinética, dada por (6.36), a equação de conservação de energia (6.63) fica escrita

$$\frac{1}{2} I \left(\dot{\theta}^2 + \left(\frac{\alpha - \beta \cos \theta}{I \sin \theta} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{J} + mg \cos \theta = E \quad . \quad (6.66)$$

A equação acima, nos parâmetros (α, β, E) é a *integral primeira de energia* para o problema do pião. Considere a seguinte transformação de variáveis,

$$\begin{aligned} \eta &= \cos \theta \\ \dot{\eta} &= -\dot{\theta} \sin \theta \end{aligned} \quad . \quad (6.67)$$

A equação (6.66) é transformada em,

$$\left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 = U(\eta) \quad (6.68)$$

³² A reação do apoio não realiza trabalho, pois O é suposto um ponto fixo.

onde,

$$U(\eta) = \frac{1}{I} \left(2E - \frac{\beta}{J} - 2mg\eta \right) (1 - \eta^2) - \frac{1}{I^2} (\alpha - \beta\eta)^2 \quad . \quad (6.69)$$

Esta equação é análoga à do pêndulo esférico, que conduz a soluções dadas em termos de integrais elípticas. De fato, posto que U é um polinômio de terceiro grau em η , o tempo fica escrito como uma integral elíptica de primeira espécie³³, na forma

$$t = \int \frac{d\eta}{U^{1/2}} \quad . \quad (6.70)$$

De (6.65) segue também,

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{d\eta} \frac{d\eta}{dt} = \frac{\alpha - \beta\eta}{I(1 - \eta^2)} \quad , \quad (6.71)$$

e portanto, de (6.68)

$$\frac{d\phi}{d\eta} = \frac{\alpha - \beta\eta}{I(1 - \eta^2)} \frac{1}{U^{1/2}} \quad . \quad (6.72)$$

O ângulo azimutal vem então na forma de uma integral elíptica de terceira espécie,

$$\phi = \frac{1}{I} \int \frac{\alpha - \beta\eta}{(1 - \eta^2)} \frac{d\eta}{U^{1/2}} \quad . \quad (6.73)$$

Finalmente, de (6.64) e de (6.71),

$$\dot{\psi} = \frac{\beta}{J} - \frac{\alpha\eta - \beta\eta^2}{I(1 - \eta^2)} \quad , \quad (6.74)$$

e, novamente de (6.68),

$$\frac{d\psi}{d\eta} = \left(\frac{\beta}{J} - \frac{\alpha\eta - \beta\eta^2}{I(1 - \eta^2)} \right) \frac{1}{U^{1/2}} \quad , \quad (6.75)$$

que leva a

³³ Ver, p.ex., Sommerfeld.

$$\psi = \frac{\beta}{J} \int \frac{\eta}{U^{1/2}} d\eta - \frac{1}{I} \int \frac{\alpha\eta - \beta\eta^2}{(1-\eta^2) U^{1/2}} d\eta \quad . \quad (6.76)$$

Note que (6.70) pode ser invertida para fornecer $\cos\theta = \eta = \eta(t)$, e assim pode-se obter $\phi = \phi(t)$ e $\psi = \psi(t)$. As integrais acima são do tipo *elípticas* e como funções elípticas são periódicas, $\cos\theta, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}$ serão periódicas no tempo.

Como $U(\eta)$ é um polinômio cúbico em η , para que os três invariantes correspondam a um problema físico real, deve-se ter $U(\eta) > 0$. Ou seja, duas raízes reais $-1 < \eta_1 < \eta_2 < 1$ deverão existir, tal que $U(\eta) > 0$ no interior deste intervalo. Note que, da definição (6.67), $-1 < \eta < 1$ e portanto, $\eta_1 = \cos\theta_1$ e $\eta_2 = \cos\theta_2$, definem os *limites de latitude*, entre os quais o pião oscilará. Simultaneamente, o pião avançará em precessão, de forma também oscilatória. À medida que a integração de (6.70) ou de (6.73) alcança um dos limites, η_1 ou η_2 , não apenas a direção de integração deve mudar de sinal, mas também $U^{1/2}(\eta)$, de forma a mantê-las reais e positivas. As figuras abaixo ilustram a função $U(\eta)$, bem como um possível movimento, através do traço da extremidade do eixo do pião sobre uma superfície esférica. Note que este traço toca os limites θ_1 e θ_2 e que nos pontos de tangência a trajetória pode meramente avançar como também apresentar um retorno, na forma de um laço. Um caso degenerado deste laço é uma *cúspide*, quando então a trajetória toca o limite de forma perpendicular à circunferência que o define, ou seja, com velocidade azimutal, i.e., taxa de precessão, nula.

Entre dois pontos de retorno sucessivos um quarto do período completo de oscilação se passa, ou seja,

$$T = 4 \int_{\eta_2}^{\eta_1} \frac{d\eta}{U^{1/2}} \quad . \quad (6.77)$$

O avanço azimutal correspondente a um período completo de oscilação será, por sua vez, dado por uma integral elíptica completa de terceira espécie,

$$\delta\phi = \frac{4}{I} \int_{\eta_2}^{\eta_1} \frac{\alpha - \beta\eta}{(1-\eta^2) U^{1/2}} d\eta - 2\pi \quad (6.78)$$

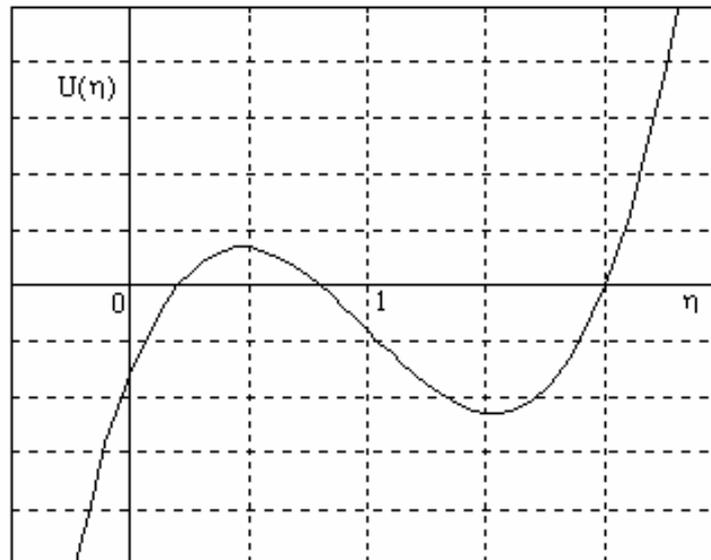


Figura 13 Função $U(\eta)$ no movimento de um pião simétrico

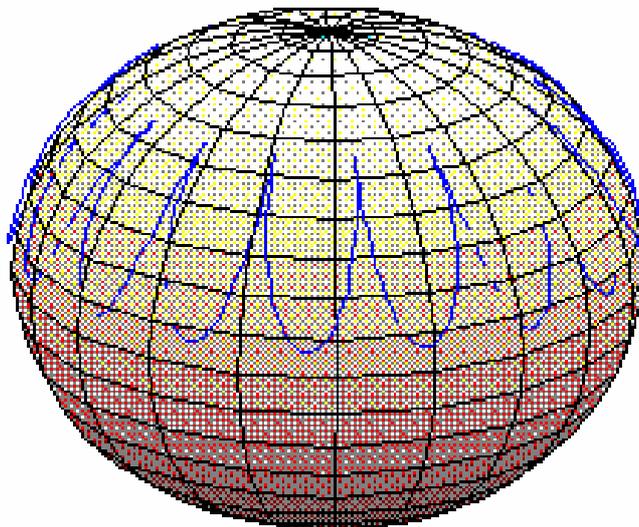
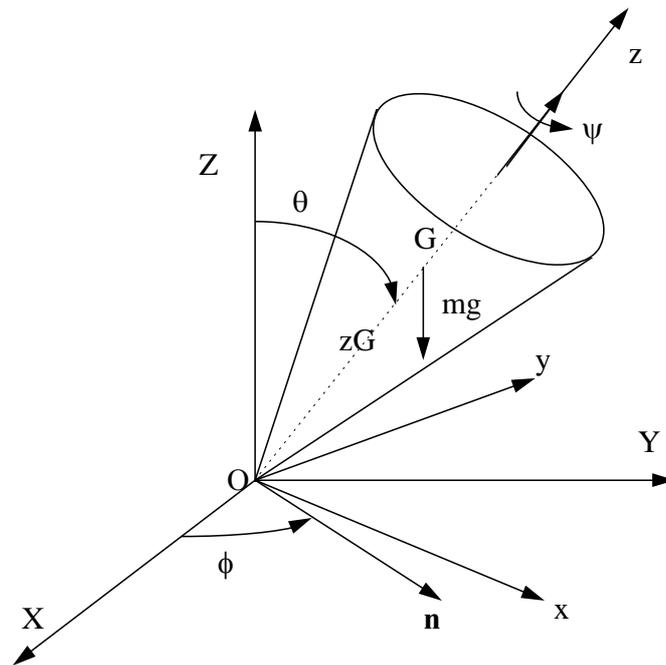


Figura 14 Traço do eixo de um pião simétrico sobre uma superfície esférica, determinado analiticamente.

A precessão regular, ou estacionária, é um caso particular do movimento estudado, quando $\eta_1 = \eta_2$. Nesta situação, a função $U(\eta)$ é tangente ao eixo η , por baixo. Se $\eta_1 \approx \eta_2$, no entanto, o pião apresentará um movimento de precessão quase-regular, superposto por pequenas amplitudes de nutação de curtíssimo período e, obviamente, por pequenas flutuações na taxa de rotação própria. Este estado de movimento, usualmente observado, é geralmente denominado *precessão pseudo-regular* (ou *pseudo-estacionária*)³⁴.

³⁴ Para um estudo detalhado, porém em um nível acessível para estudantes de graduação, ver, p.ex., Scarborough, *The Gyroscope, theory and applications*.

Exemplo 3.180 - Considere o movimento de um pião em precessão estacionária. Além disso, seja $\dot{\psi} \gg \dot{\phi}$. Determine uma relação entre a velocidade e precessão $\dot{\phi}$ e a de rotação própria $\dot{\psi}$, e calcule as reações no apoio suposto ideal. Dados massa m , momento de inércia axial J e o momento de inércia em relação a um eixo perpendicular ao eixo de simetria I , ambos em relação ao ponto O .



O momento angular na base que orienta $Oxyz$, que acompanha o pião e em relação à qual ele apresenta rotação própria é:

$$\mathbf{K}_O = I\dot{\phi} \text{sen } \theta \mathbf{i} + J(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \mathbf{k}$$

Como $\dot{\phi}$, $\dot{\psi}$ e θ são supostos constantes, $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\phi}(-\text{sen } \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{k})$ é a rotação de $Oxyz$ e o momento das forças externas em relação à O é $\mathbf{M}_O = mgz_G \text{sen } \theta \mathbf{j}$, obtém-se, pela aplicação do Teorema do Momento Angular:

$$\mathbf{M}_O = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{K}_O$$

$$mgz_G = -I\dot{\phi}^2 \cos \theta + J\dot{\phi}(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)$$

Como $\dot{\psi} \gg \dot{\phi}$, a equação se reduz a:

$mgz_G \cong J\dot{\phi}\dot{\psi}$, que é a relação procurada.

Para calcular as reações no apoio, basta aplicar o Teorema do Baricentro, verificando que a aceleração do centro de massa do pião é $\mathbf{a}_G = -z_G \text{sen}\theta\dot{\phi}^2 \mathbf{n}$.

Assim:

$$\mathbf{F}_O = mg\mathbf{K} - mz_G \text{sen}\theta\dot{\phi}^2 \mathbf{n}$$

Exemplo 3.11: Girocompasso (simplificado).

O girocompasso é um instrumento de navegação que fornece a orientação em relação ao Norte Verdadeiro. Constitui-se, basicamente de um giroscópio com eixo quase-horizontal de rotação própria. O eixo do rotor, se compelido a “precessionar” em torno de um eixo paralelo ao eixo de rotação da Terra com a mesma velocidade angular da Terra, ou o que é equivalente, em torno da vertical local com velocidade angular igual à componente vertical local do vetor de rotação da Terra, tenderá a se alinhar com a horizontal e no plano meridional. Para tanto é necessária a aplicação de um torque em torno da linha dos nós, conforme mostra a figura abaixo.

O equacionamento completo seguiria então aquele apresentado na seção 6.4, de acordo com (6.45) e equações subsequentes. Com o intuito de facilitar a análise do problema, contudo, considere um sistema simplificado, onde a precessão foi restrita. A figura 15 apresenta os componentes essenciais deste sistema. O anel vertical pode girar em torno do eixo AB. O rotor tem rotação própria (elevada) $\dot{\psi}$. A latitude local é λ . θ é o ângulo formado entre o plano do anel e o meridiano. A velocidade angular da Terra é ω_e . O sistema (Gxyz) é solidário ao anel, sendo Gz o eixo de rotação própria.

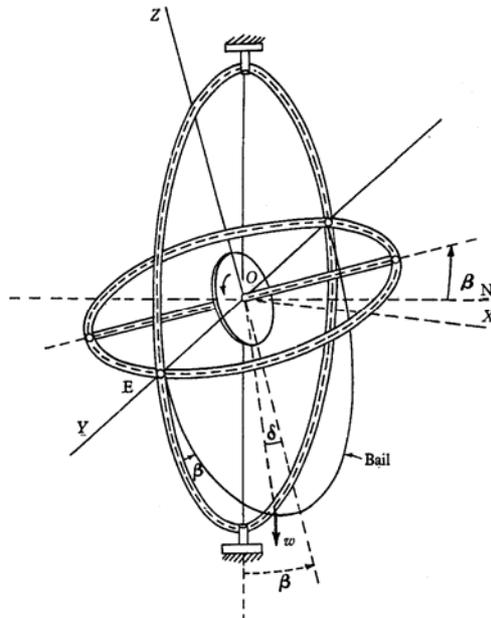


Figura 15 Girocompasso.

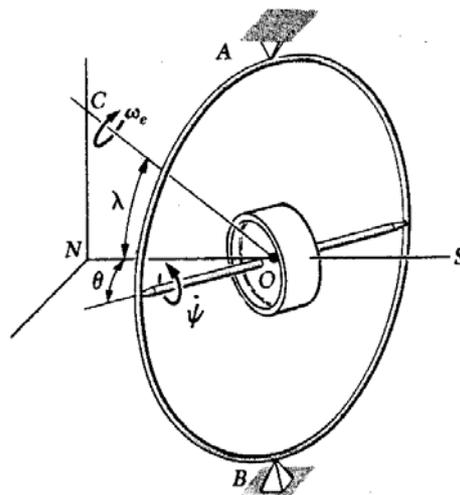


Figura 16 Girocompasso Simplificado

O vetor de rotação do anel é dado, portanto, por

$$\Omega_a = \dot{\theta} \mathbf{j} + \omega_e \mathbf{u}$$

onde \mathbf{u} é um versor na direção do eixo de rotação da Terra, ou seja

$$\mathbf{u} = -\cos \lambda \sin \theta \mathbf{i} + \sin \lambda \mathbf{j} + \cos \lambda \cos \theta \mathbf{k}$$

O vetor de rotação do rotor, por sua vez, é a composição

$$\Omega = \Omega_a + \dot{\psi} \mathbf{k}$$

A aplicação do Teorema do Momento Angular, na ausência de toque externo, conduz a uma equação, em θ , na forma

$$I\ddot{\theta} + J(\omega_e \cos \lambda \cos \theta + \dot{\psi})(\omega_e \cos \lambda) \sin \theta - I\omega_e^2 \cos^2 \lambda \sin \theta \cos \theta = 0$$

A equação diferencial, ordinária e não-linear, tem obviamente dois pontos de equilíbrio em $\theta = 0; \pi$. O primeiro é estável, o segundo instável. Note que os termos de segunda ordem em ω_e são desprezíveis e a equação pode ser reduzida à forma,

$$\ddot{\theta} + \frac{J}{I} \dot{\psi} \omega_e \cos \lambda \sin \theta = 0$$

A equação acima é uma equação de pêndulo simples, obviamente estável em $\theta = 0$ e instável em torno de $\theta = \pi$. Para pequenos deslocamentos, tal que $\sin \theta \cong \theta$,

$$\ddot{\theta} + \frac{J}{I} \dot{\psi} \omega_e \cos \lambda \theta = 0$$

que é a equação de um oscilador linear com frequência natural

$$\omega_N^2 = \frac{J}{I} \dot{\psi} \omega_e \cos \lambda$$

O sistema tende a se alinhar, portanto, com o plano meridional, indicando portanto o Norte Verdadeiro. Note que no equador ($\lambda = 0$) a “rigidez” é máxima. Já nos polos verdadeiros, a rigidez é nula e o girocompasso perde sua estabilidade. Como era esperado, além disso, quanto maior a rotação própria, maior a “rigidez” e, portanto, ‘melhor’ a estabilidade.

Exemplo 3.12: Movimento Livre de um Corpo de Revolução

Considere um corpo de revolução, de geratriz com forma arbitrária, em movimento livre de ação de forças, a não ser, eventualmente de seu próprio peso. Trata-se de um exemplo típico de precessão livre. Além disso, é um caso particularmente importante em engenharia espacial, porquanto representa um número de problemas da dinâmica de satélites em órbita.

Suponha que o corpo apresente movimento de rotação, com momento angular \mathbf{K}_G , em relação ao seu centro de massa. Como o movimento é livre, $\mathbf{M}_G = \mathbf{0}$ e por conseguinte existe conservação do momento angular. Defina GZ paralelo a \mathbf{K}_G . Este eixo é na realidade o eixo de precessão estacionária. Considere também, no referencial do corpo, o sistema coordenado $(Gxyz)$, com Gz o eixo de revolução do corpo, conforme mostra a figura abaixo. O eixo Gx é, por definição, um eixo do plano Zz . O eixo Gy , de acordo com a regra da mão direita, completa o sistema. Este será a linha dos nós.

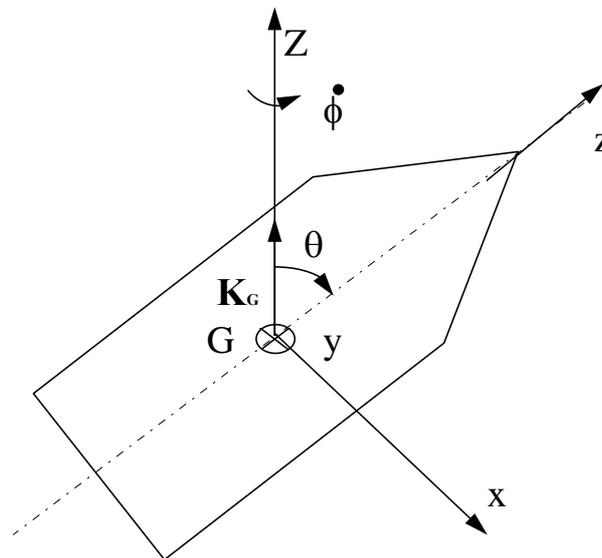


Figura 17 Corpo de revolução e eixos coordenados

O momento angular, invariante, será escrito, então

$$\mathbf{K}_G = I\omega_x \mathbf{i} + J\omega_z \mathbf{k}$$

ou, na forma de ângulos de Euler,

$$\mathbf{K}_G = -I\dot{\phi} \sin \theta \mathbf{i} + J(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \mathbf{k}$$

pois, evidentemente, $\omega_y = \dot{\theta} = 0$.

Por outro lado,

$$K_{Gx} = \mathbf{K}_G \cdot \mathbf{i} = -K_G \sin \theta$$

$$K_{Gz} = \mathbf{K}_G \cdot \mathbf{k} = K_G \cos \theta$$

e portanto

$$\frac{\omega_x}{\omega_z} = -\frac{J}{I} \tan \theta = -\tan \gamma$$

onde γ é o ângulo que o vetor de rotação faz com o eixo de revolução. O vetor de rotação definirá a direção do eixo instantâneo de rotação. Em particular, o lugar geométrico descrito pelo vetor de rotação visto do referencial do corpo denomina-se “cone do corpo”. O lugar geométrico correspondente, no referencial $GXYZ$, denomina-se “cone espacial”. Como a precessão é estacionária, θ é constante, e portanto os cones são circulares e retos. O movimento do corpo pode ser idealizado através de um rolamento do cone do corpo sobre o cone espacial.

Ainda, (6.47) é aplicável e valem as observações feitas na seção 6.4, relativa à precessão livre:

Cabe observar, da expressão acima, que, quando $J > I$ e $\theta < \pi/2$ a precessão será “retrógrada”, isto é, se fará no sentido inverso ao de rotação própria. O cone espacial ficará interno ao cone do corpo, pois $\gamma > \theta$. Ao contrário, quando $J < I$ e $\theta < \pi/2$, a precessão será “direta”, ou seja, se fará no mesmo sentido da rotação própria. O cone espacial será externo ao eixo do corpo, ou seja, $\gamma < \theta$. A situação se inverte, quando $\theta > \pi/2$. A figura abaixo ilustra o caso $\theta < \pi/2$.

Se $(J-I) < J$, por outro lado, tem-se $J/((J-I)\cos\theta) > 1$. Ou seja, a taxa de precessão é, em módulo, maior do que a de rotação própria, atingindo valores altíssimos para $\theta \rightarrow \pi/2$.

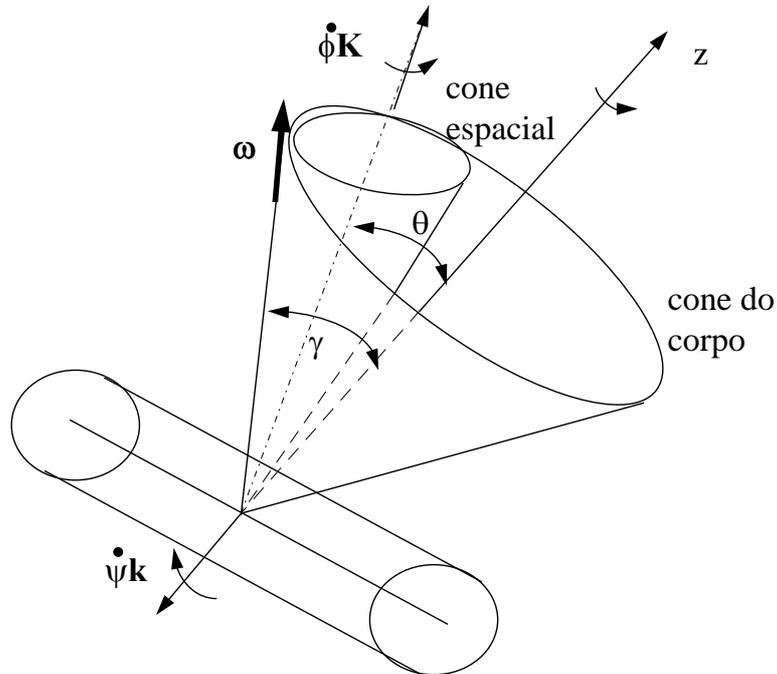


Figura 18 Movimento Livre de um Corpo de Revolução. Cones espacial e do corpo para $\theta < \pi/2$ e $J > I$

7. BIBLIOGRAFIA

- [1] BEER, F.P. & JOHNSTON Jr., E.R. Mecânica Vetorial para Engenheiros. Vol. II, Dinâmica. McGraw-Hill do Brasil, São Paulo, 1980, 3^a. ed., 545 p.
- [2] CRABTREE, H., Elementary Treatment of the theory of Spinning Tops and Gyroscopic Motion. Chlesea Publishing Co., N.Y., 1967, 3^a. ed., 193 p.
- [3] FRANÇA, L.N.F. & MATSUMURA, A.Z., Mecânica Geral. Edgard Blücher Ltda. 2001, 235 p.
- [4] GIACAGLIA, G.E.O, Mecânica Geral. Ed. Campus, S.P., 1982, 10^a. ed, 587 p.
- [5] GOLDSTEIN, H. Classical Mechanics. Addison-Wesley Publishing Co., Masachussets, 1981, 2^a. ed., 672 p.
- [6] GREENHILL, G. Gyroscope Theory. Chelsea Publishing Co., N.Y., 1966, 275 p.
- [7] GREENWOOD, D.T. Principles of Dynamics. 2nd Ed., Prentice Hall, N.J., 1988, 552 p.
- [8] LANDAU, L. & LIFCHITZ, E. Mécanique. Ed. Mir, Moscou, 1966, 227 p.
- [9] MEIROVITCH, L. Methods of Analytical Dynamics. McGraw-Hill Inc., N.Y., 1970, 524 p.
- [10] MERIAM, J.L. & KRAIGE, L.G. Dynamics. 2nd Ed., John Wiley and Sons, Inc, 1987, 641 p.
- [11] SCARBOROUGH, J.B. The Gyroscope: theory and applications. Interscience Publishers, Inc., N.Y., 1958, 257 p.

- [12] SYNGE, J.L. & GRIFFITH, B.A Principles of Mechanics. McGraw-Hill Book Co., Inc., N.Y., 1959, 552 p.
- [13] SOMMERFELD, A, Mechanics. *Lectures on Theoretical Physics, vol. I*. Academic press, Inc., Publishers, N.Y., 1952, 289 p.
- [14] SOMMERFELD, A, Mechanics of Deformable Bodies. *Lectures on Theoretical Physics, vol. II*. Academic press, Inc., Publishers, N.Y., 1952, 396 p.
- [15] WHITTAKER, E.T. A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies. Cambridge University Press, 4^a. ed., 1965, 456p.

8. ANEXO - SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS³⁵

Este anexo traz uma série de exercícios de modelamento e simulação computacional, que devem ser trabalhados através de módulos de simulação de sistemas dinâmicos, como por exemplo o módulo SIMULINK do programa MATLAB, ou ainda o módulo SCICOS do programa SCILAB.

O primeiro é marca-registrada de MathWorks Inc., e o segundo é de domínio público, (<ftp://ftp.inria.fr/INRIA/Projects/Meta2/Scilab/distributions>). Estes exercícios ilustram série regularmente aplicada na disciplina PME2200, Mecânica B, ministrada na Escola Politécnica a alunos da Grande Área Mecânica (habilitações em Engenharia Mecânica, Mecatrônica, Naval e Produção) e conta com a contribuição de diversos colegas do Departamento de Engenharia Mecânica. A nosso ver tem-se constituído em diferencial pedagógico, porquanto permitem o exercício do modelamento e da análise de diversos problemas da dinâmica de um C.R., com ganho de percepção física e conceitual.

Cada exercício divide-se em duas etapas. A primeira traz a proposição do problema e um roteiro de análise. Nela, as tarefas solicitadas são de três naturezas:

1. Modelagem do sistema dinâmico, deduzindo as equações do movimento e interpretando-as.
2. Modelagem do sistema através do *software* SCILAB, utilizando a ferramenta SCICOS.
3. Simulação do modelo computacional, com conseqüente análise e interpretação dos resultados numéricos.

³⁵ Contribuições de C.A.Martins, R.G. Lima; D.C. Donha e L.R. Padovese.

A segunda parte traz um exemplo de análise empreendida, que pode servir de guia para o leitor, em sua própria investida.

8.1. EXERCÍCIO DE SIMULAÇÃO #1. PROPOSIÇÃO.

A figura representa um sistema dinâmico composto por um anel rígido, de raio R , e uma haste diametral, em torno da qual situa-se uma mola helicoidal de constante elástica K e um amortecedor linear de coeficiente de amortecimento C . A mola e o amortecedor prendem um bloco de massa m ao anel. A mola tem comprimento indeformado igual a R . O bloco, idealizado como um ponto material, pode deslizar sem atrito sobre a haste diametral, que tem densidade linear de massa $F(t)$, igual à do anel. O anel gira em torno de um eixo fixo Oz , perpendicular à haste diametral, com velocidade angular $\omega(t)$. O sistema pode ser interpretado, do ponto vista da engenharia, como um dispositivo de controle de rotação. Este sistema pode também modelar, de forma simplificada, um eixo flexível com um rotor desbalanceado.

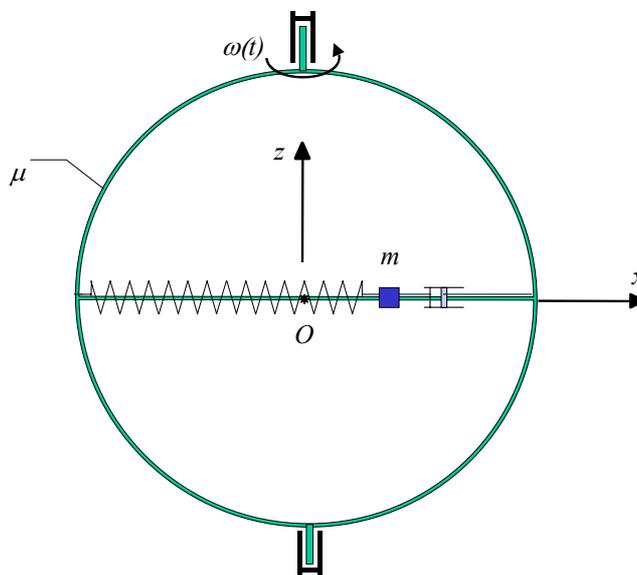


Figura 19 Sistema rotativo com oscilador amortecido.

8.1.1. Modelagem do sistema dinâmico, deduzindo as equações do movimento.

- (a) Elabore um diagrama de corpo livre e determine as equações que regem o movimento relativo do bloco, expressando-as no sistema de referências solidário

ao anel, orientado pelos versores $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Designe o movimento do bloco pela coordenada de posição $x(t)$. Por enquanto considere que a velocidade angular $\omega(t)$ é conhecida.

- (b) Considerando que $\omega(t) = 0$, ou seja na ausência de rotação, determine a frequência natural não-amortecida, Ω_{N0} , do sistema massa-mola. Reescreva a equação de movimento obtida em (a), em termos de Ω_{N0} . Determine, nesta situação particular, a posição de equilíbrio x_{E1} do bloco.
- (c) Considere agora que a velocidade angular imposta, conhecida, é constante e não nula, de magnitude ω_c . Determine o valor crítico ω_{CR} que define a mudança de comportamento dinâmico do movimento relativo do bloco, de “oscilatório” (estável) para “exponencial” (instável). Supondo $\omega_c < \omega_{CR}$, determine a nova frequência natural não-amortecida, Ω_{NC} do sistema massa-mola.
- (d) Com $\omega_c < \omega_{CR}$, determine a posição \bar{x} em torno da qual o bloco oscilará. Será $\bar{x} \neq x_{E1}$? Interprete os resultados até então obtidos.
- (e) Imagine agora que a mola seja não-linear de tal forma que a força de restauração seja dada por $F_E(x) = -(Kx + K_3x^3)$; $K_3 > 0$. Esta relação modela um mola não-linear que se torna progressivamente mais rígida. Qual será a posição de equilíbrio relativo x_{E3} , supondo ainda que $\omega_c < \omega_{CR}$? Se $\omega > \omega_{CR}$, poderá haver mais de uma posição de equilíbrio, uma instável e duas estáveis. Calcule-as e interprete o resultado, justificando-o.
- (f) Suponha, diferentemente, que $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\vec{k}$ não seja conhecido, resultando da aplicação de um torque $\vec{Q}(t) = Q(t)\vec{k}$. Elabore o diagrama de corpo livre do anel e deduza a equação de movimento que rege $\omega(t)$. Note que a força de Coriolis agente sobre o bloco atuará na haste diametral, por ação e reação, proporcionando um torque reativo sobre o anel. Note também que as equações dinâmicas em $x(t)$ e $\omega(t)$ estarão agora acopladas.

8.1.2. Modelagem do sistema através de simulador.

- (g) Elabore em ambiente SCILAB/SCICOS (ou em ambiente MATLAB/SIMULINK) um diagrama de blocos, representando as equações deduzidas no item (a). A entrada do sistema considerada neste caso é a velocidade angular, que durante as simulações poderá ser adotada como constante (incluindo a situação nula) ou uma função dependente do tempo, como por exemplo uma senóide. A saída será a posição relativa do bloco, $x(t)$.
- (h) Uma vez mais, elabore em ambiente SCILAB/SCICOS (ou em ambiente MATLAB/SIMULINK) um novo diagrama de blocos, agora representando as duas equações deduzidas no item (a) e (f). Lembre que estas equações são acopladas, ou seja, o diagrama apresentará linhas de conexão entre os laços (“loops”) representativos de cada equação. A entrada do sistema considerada neste caso é o torque aplicado, $\vec{Q}(t) = Q(t)\vec{k}$ que, a exemplo do item anterior, poderá ser adotada, durante as simulações, como uma constante (incluindo-se aí a situação nula); ou ainda poderá ser uma função dependente do tempo, como por exemplo uma senóide. As saídas serão a posição relativa do bloco $x(t)$ e a velocidade angular $\omega(t)$.

(i) Re-elabore o diagrama (g) de acordo com o item (e).

8.1.3. Simulação do modelo computacional

- (j) Teste o seu modelo de simulação (g), com $\omega(t) = 0$, atribuindo diferentes condições iniciais de posição x_0 e velocidade \dot{x}_0 . Interprete os resultados à luz do item (b). Teste também situações em que $C = 0$.
- (k) Repita o teste anterior, agora com $\omega(t) = \omega_c \neq 0$. Verifique as conclusões relativas aos itens (c) e (d). Simule situações com $\omega_c < \omega_{CR}$ e $\omega_c > \omega_{CR}$. Tente simular também a situação em que $\omega_c \equiv \omega_{CR}$. Interprete os resultados obtidos. Note que no caso instável o bloco acabará por atingir o anel, chocando-se contra ele.
- (l) Teste o seu modelo de simulação (h), inicialmente com $Q(t) = 0$, para as mesmas condições iniciais de (j), atribuindo uma condição inicial $\omega_0 \neq 0$. Compare os resultados com as simulações de (j).
- (m) Com o seu modelo de simulação (h), repita (l) agora com $Q(t) = Q_c \neq 0$, constante e $x_0 = 0,05\text{m}$. Verifique as conclusões relativas aos itens (c) e (d). Interprete os resultados obtidos.
- (n) Repita as simulações com o diagrama re-elaborado em (i). Analise os casos $\omega_c < \omega_{CR}$ e $\omega > \omega_{CR}$. Verifique as conclusões relativas ao item (e).

DADOS PARA SIMULAÇÃO:

$$K = 400\pi^2 \text{ N/m}; K_3 = 6400\pi^2 \text{ N/m}^3; m = 100 \text{ kg};$$

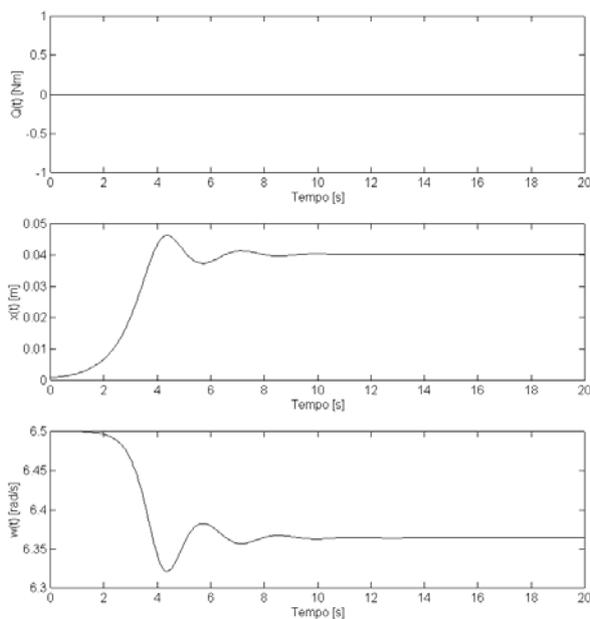
$$\omega_c = \pi; \text{ e } \omega_c = \sqrt{8}\pi$$

$$R = 1,0 \text{ m}; \mu = 2,4145 \text{ kg/m}; C = 40\pi \text{ N/(m/s)}$$

$$Q_C = 0,10 \text{ Nm}; Q(t) = Q_0 \text{ sen}(2\pi t); Q_0 = 0,10 \text{ Nm}$$

8.2. EXERCÍCIO DE SIMULAÇÃO # 1. EXEMPLO DE ANÁLISE.

- (a) Deduza as duas equações (diferenciais) que regem o movimento do sistema segundo as variáveis $x(t)$ e $\omega(t)$. Construa um diagrama de simulação que represente o sistema.
- (b) Particularize as equações para o caso em que a velocidade é imposta $\omega(t) = \omega_c$ (constante) e a mola é linear. Existe uma rotação crítica, ω_{CR} . Determine-a e interprete-a. Determine o ponto de equilíbrio e discuta sua estabilidade em função de ω_c comparado a ω_{CR} . No caso em que $\omega_c < \omega_{CR}$, qual será o tipo de solução $x(t)$, sob condições iniciais $x(0) = x_0 \neq 0$ e $\dot{x}(0) = 0$? Esboce um gráfico de $x(t)$.
- (c) Considerando a mola cúbica, com a força de restauração dada por $F(x) = -Kx - K_3x^3$ e tomando o caso em que $\omega(t) = \omega_c > \omega_{CR}$, determine os novos pontos de equilíbrio x_{E3} indicando se são estáveis ou instáveis; justifique.
- (d) Simulando as equações gerais, a figura abaixo mostra a evolução de $x(t)$ e $\omega(t)$, para o caso em que **o torque é nulo**. A velocidade angular inicial $\omega(0) = \omega_0 = 6,5$ rad/s é superior à rotação crítica ω_{CR} . Justifique **qualitativamente** o resultado da simulação, tendo em vista as variações ocorrentes em $x(t)$ e $\omega(t)$.



DADOS DA SIMULAÇÃO:

$$x(0) = x_0 = 0,001 \text{ m}; \quad \dot{x}(0) = 0; \quad \omega(0) = 6,5 \text{ rad/s}; \quad Q(t) \equiv 0$$

ANÁLISE DETALHADA E COMENTADA

(a)

A aceleração do bloco de massa m , expressa na base solidária ao anel, é dada por

$$\vec{a} = (\ddot{x} - \omega^2 x)\vec{i} + (\dot{\omega}x + 2\omega\dot{x})\vec{j} \quad (1).$$

No primeiro parentesis (componente radial), a primeira parcela corresponde à aceleração relativa e a segunda à aceleração centrípeta. No segundo parêntesis, (componente transversal) a primeira parcela é associada à aceleração angular e a segunda é a aceleração de Coriolis (ou complementar).

A resultante das forças externas (desconsiderando a força peso) agente sobre o bloco é dada por:

$$\vec{R} = -(Kx + K_3 x^3)\vec{i} - C\dot{x}\vec{i} + F\vec{j} \quad (2),$$

onde o termo entre parêntesis corresponde à força de restauração elástica da mola, o segundo termo é a força, resitiva ao movimento, aplicada pelo amortecedor e o terceiro termo representa a força normal *aplicada pela haste*.

A Segunda lei de Newton, aplicada ao bloco, fornece portanto

$$\begin{aligned} m(\ddot{x} - \omega^2 x) &= -(Kx + K_3 x^3) - C\dot{x} \\ m(\dot{\omega}x + 2\omega\dot{x}) &= F \end{aligned} \quad (3).$$

A taxa de variação do momento angular do conjunto anel+haste (**ah**), calculada em relação ao polo O (fixo) é igual à somatória dos momentos das forças externas agentes sobre ele calculado com respeito ao mesmo polo (TMA). Admitindo simetria geométrica e de distribuição de massa deste conjunto (a matriz de inércia com respeito a $Oxyz$ é diagonal e o centro de massa do conjunto **ah** coincide com O - de tal sorte que ($Oxyz$) são eixos centrais de inércia) a aplicação do TMA fica reduzida a:

$$I_{Ozz}\dot{\omega} = Q(t) - xF \quad (4),$$

ou seja, de (3b),

$$I_{Ozz}\dot{\omega} = Q(t) - xm(\dot{\omega}x + 2\omega\dot{x}) \quad (5)$$

onde I_{Ozz} é o momento de inércia do conjunto **ah** em relação ao eixo Oz .

Rearranjando as equações (3a) e (5) seguem as equações diferenciais ordinárias (não-lineares) que regem o movimento do sistema, segundo as variáveis $x(t)$ e $\omega(t)$:

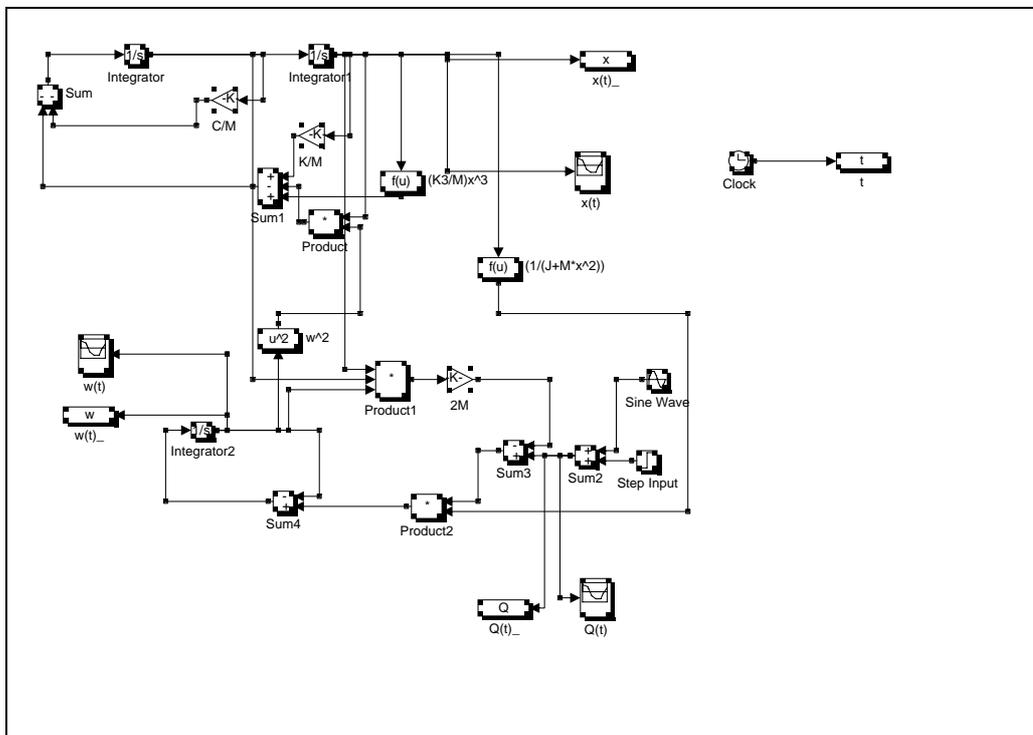
$$\begin{cases} m\ddot{x} + C\dot{x} + (K - m\omega^2 + K_3x^2)x = 0 \\ (I_{O_{zz}} + mx^2)\dot{\omega} + 2mx\dot{x}\omega = Q(t) \end{cases} \quad (6),$$

ainda na forma

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{C}{m}\dot{x} + \left(\Omega_{N0}^2 - \omega^2 + \frac{K_3}{m}x^2 \right)x = 0 \\ (\rho_{O_{zz}} + x^2)\dot{\omega} + 2x\dot{x}\omega = \frac{Q(t)}{m} \end{cases} \quad (7)$$

onde $\Omega_{N0} = \sqrt{K/m}$ é a frequência natural não amortecida do conjunto massa-mola-amortecedor, quando a mola é linear e a rotação é nula; e onde $\rho_{O_{zz}} = I_{O_{zz}}/m$.

Um possível diagrama de simulação é apresentado abaixo.



(b)

Particularizando para o caso de rotação $\omega(t) = \omega_c$, constante, e mola linear ($K_3 \equiv 0$), a equação (7a) fica simplificada à forma

$$\ddot{x} + \frac{C}{m}\dot{x} + (\Omega_{N0}^2 - \omega_c^2)x = 0 \quad (8).$$

(Note que para manter a rotação constante ($\dot{\omega} = 0$) deve ser aplicado um torque $Q(t) = 2max\dot{x}$ ao anel, de tal forma a contrabalançar o momento reativo associado à força de Coriolis).

Portanto existe uma rotação crítica,

$$\boxed{\omega_{CR} = \Omega_{N0} = \sqrt{K/m}} \quad (9)$$

acima da qual a “restauração” equivalente do oscilador (8), representada pelo termo $F_R = -m(\Omega_{N0}^2 - \omega_c^2)x = -m(\omega_{CR}^2 - \omega_c^2)x$ se torna negativa, ou seja, transforma-se em “repulsão” e o ponto de equilíbrio (“trivial”) $x_{E1} \equiv 0$, torna-se (assintoticamente) instável. Se, por outro lado, $\omega_c < \omega_{CR}$, $x_{E1} \equiv 0$ é um ponto de equilíbrio (assintoticamente) estável. (No caso numérico estudado, $\omega_{CR} = 2\pi$ rad/s).

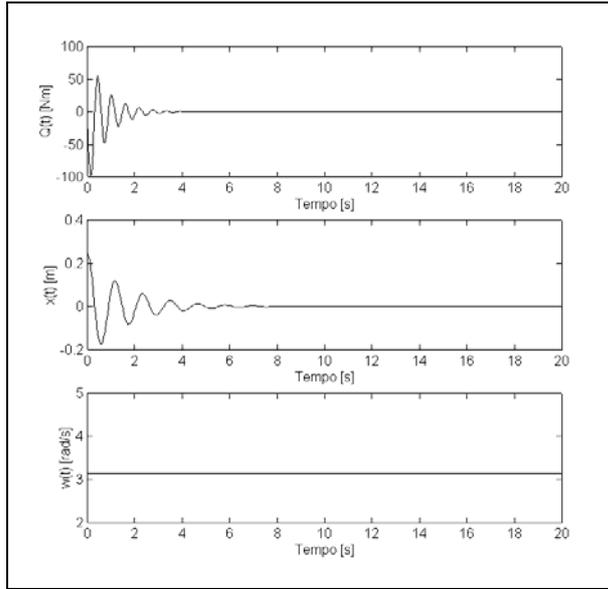
Se tomarmos $\omega_c < \omega_{CR}$, $\lambda_{1,2} = -\frac{C}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{C}{2m}\right)^2 - (\omega_{CR}^2 - \omega_c^2)}$ serão as raízes da equação característica $\lambda^2 + \frac{C}{m}\lambda + (\omega_{CR}^2 - \omega_c^2) = 0$ (condição para que a solução seja não trivial, i.e., $x(t)$ não-identicamente nula). Se as raízes forem complexas conjugadas (caso de amortecimento sub-crítico) a função $x(t)$ será uma cossenóide modulada por uma exponencial decrescente

$$x(t) = x_0 e^{-(C/2m)t} \cos\left(\sqrt{(\omega_{CR}^2 - \omega_c^2) - \left(\frac{C}{2m}\right)^2} t\right);$$

$$\text{se } \left(\frac{C}{2m}\right)^2 < (\omega_{CR}^2 - \omega_c^2)$$

Se as raízes forem reais e distintas (certamente negativas), o que denota amortecimento super-crítico, a solução será uma função exponencial (decrescente)

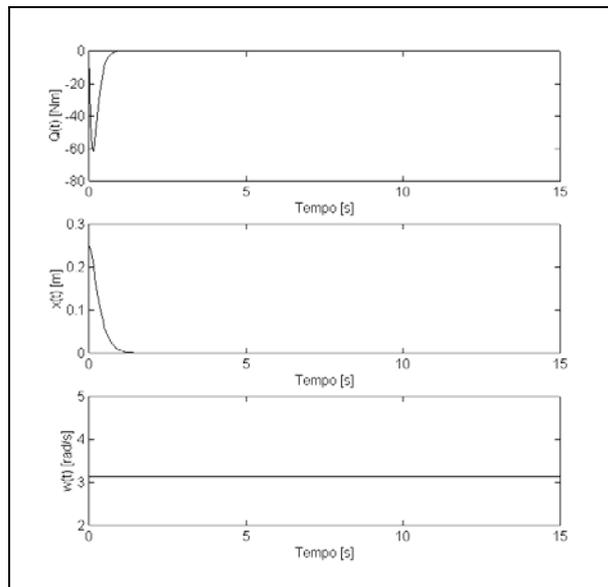
$$x(t) = x_0 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} \right); \text{ se } \left(\frac{C}{2m}\right)^2 > (\omega_{CR}^2 - \omega_c^2)$$



SIMULAÇÃO

(COSSENÓIDE EXPONENCIALMENTE AMORTECIDA):

$K = 400\pi^2 \text{ N/m}$; $K_3 = 0 \text{ N/m}^3$; $m = 100 \text{ Kg}$; $Q(t) \equiv 2\max\dot{x}$; $R = 1,0 \text{ m}$; $\mu = 2,4145 \text{ kg/m}$;
 $C = 40\pi \text{ N/(m/s)}$ $x(0) = x_0 = 0,251 \text{ m}$; $\dot{x}(0) = 0$; $\omega(0) = \pi \text{ rad/s}$;



SIMULAÇÃO (EXPONENCIAL DECRESCENTE):

$K = 400\pi^2 \text{ N/m}$; $K_3 = 0 \text{ N/m}^3$; $m = 100 \text{ Kg}$; $R = 1,0 \text{ m}$; $\mu = 2,4145 \text{ kg/m}$;
 $C = 200\sqrt{3}\pi \text{ N/(m/s)}$; $x(0) = x_0 = 0,25 \text{ m}$; $\dot{x}(0) = 0$; $\omega(0) = \pi \text{ rad/s}$; $Q(t) \equiv 2\max\dot{x}$

(c)

Com $\omega_c > \omega_{CR}$ e considerando a mola cúbica, a condição de equilíbrio ($\ddot{x} \equiv \dot{x} \equiv 0 = \dot{\omega}$) aplicada a (7) implicará em

$$\left(\omega_{CR}^2 - \omega_c^2 + \frac{K_3}{m} x^2 \right) x = 0 \quad (10)$$

$$0 = Q(t)$$

que tem três raízes reais

$$\boxed{\bar{x} = 0; x_{E3} = \pm \sqrt{\frac{m}{K_3} (\omega_c^2 - \omega_{CR}^2)}} \quad (11)$$

A primeira denota um ponto de equilíbrio instável. Esta afirmação é fácil de ser verificada. Basta ver que para uma perturbação ε em torno de $\bar{x} = 0$, a parcela cúbica será desprezível e a parcela $(\omega_c^2 - \omega_{CR}^2)\varepsilon$, dominante, será a aceleração decorrente desta perturbação, que terá o mesmo sinal da perturbação, já que consideramos $\omega_c > \omega_{CR}$, denotando tendência de repulsão.

Os dois outros pontos de equilíbrio são (assintoticamente) estáveis e posicionados de forma simétrica em torno do primeiro. Para verificar a estabilidade basta calcular a aceleração decorrente de uma perturbação em posição em torno destes pontos e verificar que ela terá sinal contrário à perturbação imposta.

(d)

Como a velocidade angular inicial é superior ao valor crítico, o ponto $\bar{x} = 0$ é de equilíbrio instável. Partindo do repouso, qualquer perturbação inicial (por exemplo $x_0 = 0,001\text{m}$) será amplificada. Ou seja o bloco será atraído para um dos dois pontos

de equilíbrio estáveis $x_{E3} = \pm \sqrt{\frac{m}{K_3} (\omega_c^2 - \omega_{CR}^2)}$. No entanto, quando o bloco começar

a se movimentar, a inércia $(I_{Ozz} + mx^2)$ aumentará quadraticamente com x e, na ausência de torque externo ($Q(t) \equiv 0$), a velocidade angular variará segundo a equação (12b) abaixo

$$\ddot{x} + \frac{C}{m} \dot{x} + \left(\omega_{CR}^2 - \omega^2 + \frac{K_3}{m} x^2 \right) x = 0 \quad (12).$$

$$(\rho_{Ozz} + x^2) \dot{\omega} = -2x\dot{x}\omega$$

Resumindo, quanto mais afastado o bloco estiver do centro, maior a inércia. Se a velocidade for de afastamento a taxa de variação de $\omega(t)$ no tempo é negativa e tanto menor quanto mais distante o bloco estiver do ponto O . Se a velocidade for de aproximação, em relação ao centro O , a taxa de variação será positiva, ou seja, $\omega(t)$ tende a aumentar.

NOTA: Este problema é análogo ao da bailarina/patinadora que, ao recolher (afastar) os braços, faz com que sua velocidade de rotação aumente (diminua).

8.3. EXERCÍCIO DE SIMULAÇÃO 2. PROPOSIÇÃO.

A figura representa um disco de massa M e raio R que rola sem escorregar sobre um plano horizontal. Ao disco está preso um pino P de massa m e que dista d de O . Sobre o disco pode agir a força horizontal $F(t)$, aplicada em O . Este sistema pode ser interpretado, do ponto de vista da engenharia, como um primeiro modelo de uma roda desbalanceada. Despreze o "atrito de rolamento"³⁶.

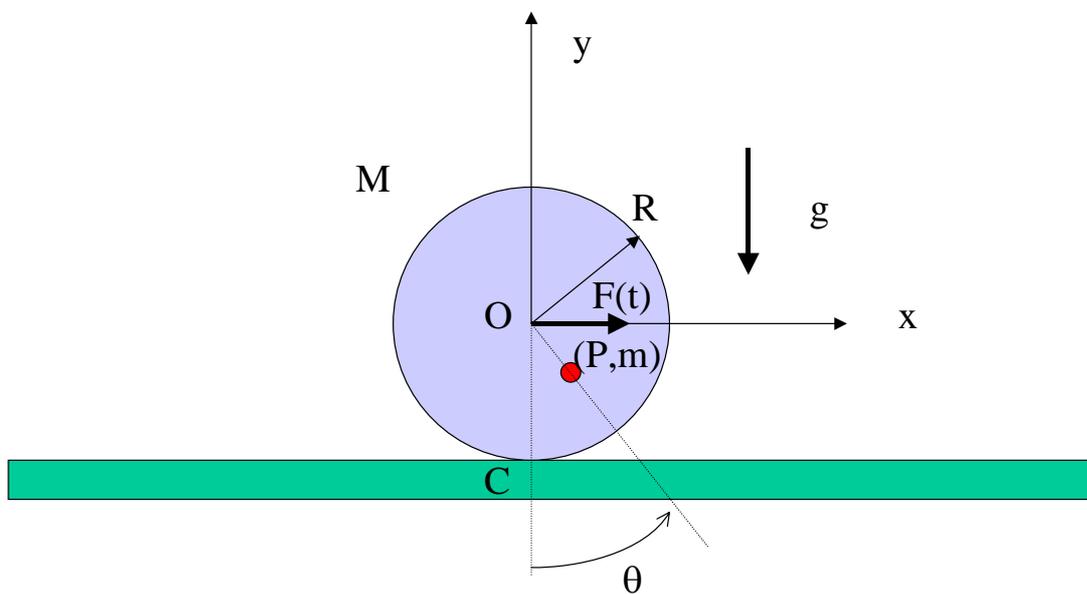


Figura 20 Disco excêntrico que rola em plano horizontal sem escorregamento.

8.3.1. Modelagem do sistema dinâmico; deduzindo as equações do movimento.

- Denote o movimento do centro geométrico O por $x(t)$ e o deslocamento angular por θ . Elabore um diagrama de corpo livre e deduza a equação dinâmica (não-linear) que rege o movimento do disco, segundo o ângulo θ . Note que a velocidade angular do disco excêntrico é $\Omega(t) = \dot{\theta}$. Lembre que o centro O do disco tem aceleração.
- Determine as posições de equilíbrio do sistema na ausência de forças e momentos externos outros que os gravitacionais, e discuta a estabilidade das possíveis configurações, do ponto de vista físico.

³⁶ Momento resistivo ao rolamento, normalmente associado a deformações do disco na região de contato. Sob a hipótese de C.R. este momento deve ser, consistentemente, desconsiderado.

- (c) Linearize as equações de movimento, i.e., tome θ muito pequeno, tal que $\sin \theta \cong \theta$ e $\cos \theta \cong 1$, e despreze termos quadráticos (ou bi-lineares) em θ e $\dot{\theta}$.
- (d) Ainda, sob a equação linearizada, tome o problema homogêneo (sem forçante), e determine a frequência natural ω_N do sistema. Interprete-a tendo em vista a analogia com um pêndulo, definindo um comprimento equivalente.

8.3.2. Modelagem do sistema através de simulador.

- (e) Elabore em ambiente SCILAB/SCICOS (ou em ambiente MATLAB/SIMULINK) um diagrama de blocos, representando a equação deduzida no item (a). A entrada do sistema considerada neste caso é $F(t)$, função dependente do tempo, como por exemplo senóide de frequência ω e fase relativa ϕ . A saída será a posição angular θ .
- (f) Uma vez mais, elabore em ambiente SCILAB/SCICOS (ou em ambiente MATLAB/SIMULINK) um novo diagrama de blocos, agora representando a equação linearizada, deduzida no item (c).

8.3.3. Simulação do modelo computacional

- (g) Teste o modelo de simulação (f), ou seja com as equação linearizada, não-forçada, utilizando condição inicial $\theta(0) = \theta_0; \dot{\theta}(0) = 0$. Interprete os resultados à luz de (c,d). Ou seja, verifique o caráter oscilatório do sistema e determine numericamente o período natural. Plote gráficos de $\theta(t); x_p(t); y_p(t); x(t)$. Plote também gráficos de $y_p \times x_p$.
- (h) Repita o teste anterior, agora com o modelo de simulação (e), ou seja com a equação não-linear. Interprete os resultados obtidos. Compare os resultados dos dois modelos e discuta-os. Use saídas gráficas conforme sugerido em (g).
- (i) Faça testes com o modelo não-linear, variando as condições iniciais. Por exemplo teste as situações em que $(\theta(0) = \pi + \varepsilon; \dot{\theta}(0) = 0)$, ε um número muito pequeno. Ou situações em que $(\theta(0) = 0; \dot{\theta}(0) = \Omega_0)$.
- (j) Faça simulações dos modelos linear e não-linear quando o bloco está sujeito a uma força senoidal $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$. Varie a frequência ω , elevando-a gradativamente até o caso em que $\omega = 0,99\omega_N$. Repita o procedimento iniciando a variação de ω a partir de $\omega = 1,01\omega_N$ até $\omega = 3\omega_N$.
- (k) Varie os valores numéricos dos parâmetros m , d , F_0 e analise os resultados.

DADOS PARA SIMULAÇÃO:

$$M = 2 \text{ kg}; m = 0,25 \text{ kg}; R = 0,25 \text{ m}; d = 0,10 \text{ m};$$

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t); F_0 = 0,1 \text{ N};$$

$$g = 10 \text{ m/s}^2;$$

8.4. EXERCÍCIO DE SIMULAÇÃO # 2. EXEMPLO DE ANÁLISE.

Você deve ter deduzido que a equação de movimento que rege a dinâmica do sistema, em θ , sob a ação tão somente da gravidade é dada por,

$$\ddot{\theta} = -\frac{mgd \sin \theta}{J_C(\theta)} \left(1 + \frac{R\dot{\theta}^2}{g} \right); \quad (1)$$

$$\text{com: } J_C = \left(\frac{1}{2}MR^2 + (M+m)R^2 + m(d^2 - 2Rd \cos \theta) \right)$$

- Quais são as possíveis posições de equilíbrio do sistema? São estáveis? Justifique fisicamente.
- Linearize a equação (1), i.e., tome θ muito pequeno, tal que $\sin \theta \cong \theta$ e $\cos \theta \cong 1$, e despreze termos quadráticos (ou bi-lineares) em θ e $\dot{\theta}$. Determine então a frequência natural ω_N do sistema. Interprete-a tendo em vista a analogia com um pêndulo, definindo um comprimento equivalente.
- Elabore um diagrama de blocos para simulação da equação (1) em ambiente SCICOS/SCILAB (ou em ambiente MATLAB/SIMULINK).
- A figura abaixo mostra três resultados de simulação da equação (1), i.e., sob a ação exclusiva da gravidade. Nas duas primeiras simulações o sistema parte do repouso. Na terceira é imposta uma velocidade angular inicial $\omega_0 = 0,001 \text{ rad/s}$. Responda às seguintes perguntas:

1 - Por que os sinais $\theta(t)$ nas simulações (I) e (II) apresentam caráter periódico?

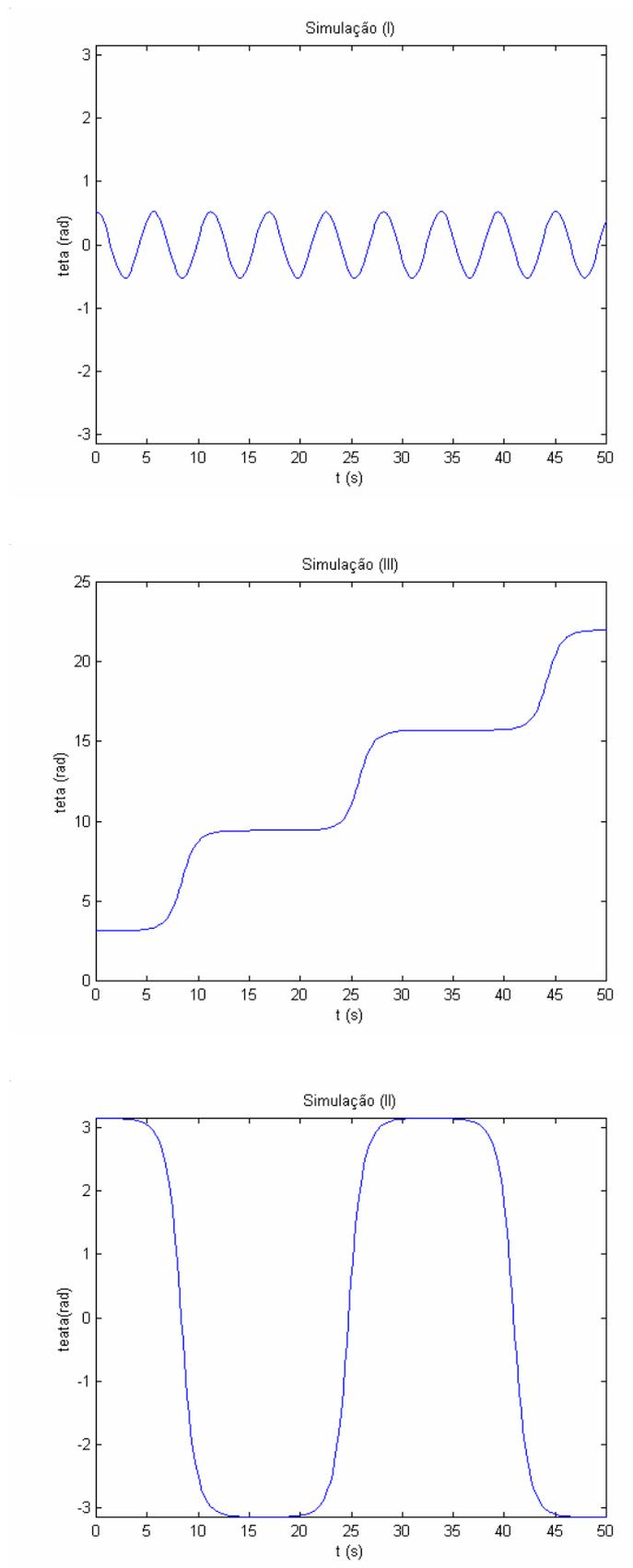
2 - Por que o período de oscilação na simulação (I) é menor do que aquele na simulação (II)?

3 - Por que o caráter de (I) é quasi-cossenoidal e o de (II) não?

4 - Por que $\theta(t)$ na simulação (III) é não periódico porém apresenta um caráter crescente e oscilatório?

Parâmetros da simulação:

$$M = 2 \text{ kg}; m = 0,25 \text{ kg}; R = 0,25 \text{ m}; d = 0,10 \text{ m}; g = 10 \text{ m/s}^2.$$



ANÁLISE DETALHADA E COMENTADA

(a) *Equilíbrio* implica em $\dot{\theta} = \ddot{\theta} \equiv 0$. Assim:

$$\boxed{\sin \theta = 0 \Rightarrow \theta_{eq} = n\pi \quad \text{com } n \in \mathbb{Z}} \quad (1)$$

Os pontos de equilíbrio correspondentes a: (i) n par, são estáveis; (ii) n ímpar, são instáveis; pois para os primeiros o CG do sistema está abaixo do centro geométrico do disco e, para os segundos, acima dele.

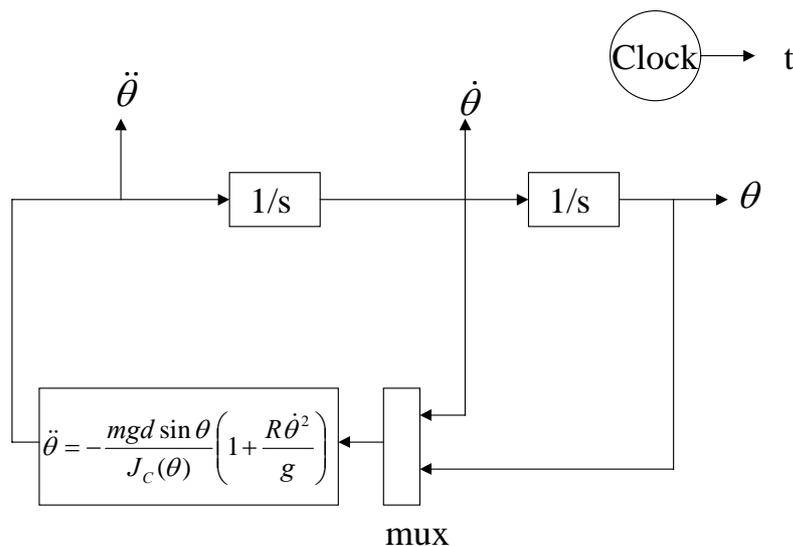
(b) *Linearizando* a equação vem:

$$\boxed{\begin{aligned} \ddot{\theta} + \frac{mgd\theta}{\tilde{J}_C} = 0 ; \quad \text{para } \frac{R\dot{\theta}^2}{g} \ll 1 \text{ e } \theta \ll 1; \\ \text{com : } \tilde{J}_C = \left(\frac{1}{2}MR^2 + (M+m)R^2 + m(d^2 - 2Rd) \right) \end{aligned}} \quad (2)$$

que é análoga à equação de um pêndulo equivalente, linear, $\ddot{\theta} + \frac{g}{l_{eq}}\theta = 0$. A frequência natural do sistema linearizado é dada, portanto, por

$$\boxed{\omega_N = \sqrt{\frac{g}{l_{eq}}}} ; \quad \text{com } \boxed{l_{eq} = \frac{\tilde{J}_C}{md}}$$
 o comprimento de um pêndulo equivalente.

(c) *Diagrama para simulação* da equação de movimento (incluindo diversas saídas de: posição velocidade e aceleração):



(d) 1 - Por que $\theta(t)$ nas simulações (I) e (II) apresentam caráter periódico?

Resposta: porque em ambas, a velocidade angular inicial é nula. Como o sistema é conservativo (não há dissipação nem ação de forças externas não-conservativas) a energia potencial máxima corresponde àquela da posição inicial, que não pode ser ultrapassada. O disco portanto oscila em torno da posição de equilíbrio estável mais próximo (no caso $\theta_{eq} = 0$).

2 - Por que o período de oscilação na simulação (I) é menor do que aquele na simulação (II)?

Resposta: porque a amplitude de oscilação em (I) é menor do que em (II) (a equação que rege o movimento é análoga a uma equação de pêndulo não-linear). Podemos notar também que o binário desestabilizador em (II) é, inicialmente, muito pequeno, causando uma aceleração inicial bastante pequena se comparada à aceleração inicial em (I).

3 - Por que o caráter de (I) é quasi-cossenoidal e o de (II) não?

Resposta: No caso (I) a amplitude é relativamente pequena e o movimento se assemelha ao movimento de um "pêndulo linear equivalente", que é regido pela equação linearizada.

4 - Por que $\theta(t)$ na simulação (III) é não periódico porém apresenta um caráter crescente e oscilatório?

Resposta: No caso (III) o disco excêntrico parte da posição em que o pino está na vertical acima do centro O , ou seja de uma posição de equilíbrio instável. No entanto, parte com velocidade angular diferente de zero (embora muito pequena). A velocidade angular inicial é positiva fazendo com que o disco se desloque para a esquerda. Como o sistema é conservativo, o disco rola sobre si mesmo indefinidamente (pelo Teorema da Conservação de Energia). No entanto, superposto ao movimento de rolamento do disco, coexiste um movimento acelerado (desacelerado) associado à ação positiva (negativa) do binário desestabilizador provocado pela excentricidade do pino de peso mg . Este movimento composto tem, portanto, caráter oscilatório.

8.5. EXERCÍCIO DE SIMULAÇÃO # 3. PROPOSIÇÃO.

Considere, conforme mostra a figura abaixo, um pião simétrico, sujeito à ação da força peso, desprezando qualquer forma de atrito. O eixo fixo OZ é vertical e O é uma articulação.

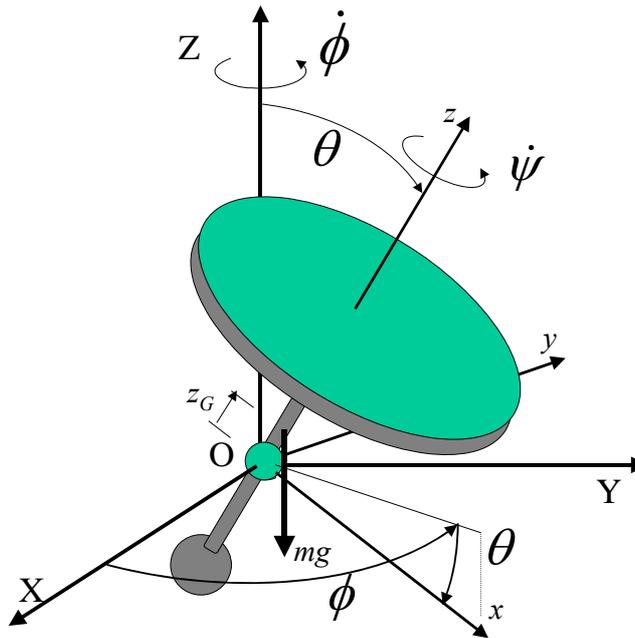


Figura 21 Pião simétrico.

Nestas condições, (ver Capítulo 6) pode-se mostrar que uma única equação diferencial ordinária, não-linear, rege o movimento do ‘pião’,

$$I\ddot{\theta} + \frac{(\alpha - \beta \cos \theta)(\beta - \alpha \cos \theta)}{I \sin^3 \theta} = mgz_G \sin \theta \quad , \quad (1)$$

onde $\alpha = K_{OZ}$, $\beta = K_{Oz}$ são dois invariantes do movimento. Note que estes parâmetros dependem apenas das condições iniciais.

8.5.1. Modelagem do sistema dinâmico; deduzindo as equações do movimento.

- (a) Estude o item 6.5.
- (b) Interprete a situação particular de precessão estacionária, agora em termos dos invariantes $\alpha = K_{Oz}$, $\beta = K_{Oz}$, utilizando a equação (1) acima.
- (c) Determine o valor da taxa de precessão estacionária $\dot{\phi} = \Omega$, considerando conhecidos a taxa de rotação própria $\dot{\psi} = \omega$, constante, e o ângulo de equilíbrio $\bar{\theta}$.
- (d) Discuta a estabilidade "giroscópica", considerando os seguintes casos: $J > I$ (pião "achatado") e $J < I$ (pião esbelto). O que você pode concluir?
- (e) Discuta os casos de precessão "direta" ($\dot{\psi}/\dot{\phi} > 0$) e "retrógrada" ($\dot{\psi}/\dot{\phi} < 0$).

8.5.2. Modelagem do sistema através de simulador.

- (f) Elabore em ambiente SCILAB/SCICOS (ou MATLAB/SIMULINK) um diagrama de blocos, representando a equação (1). A saída será a posição angular θ .

8.5.3. Simulação do modelo computacional

- (g) Teste o modelo SCILAB, com a equação não-linear. Simule primeiramente o caso ideal de precessão estacionária, com os dados e condições iniciais abaixo. Plote gráficos de: $\theta(t); \phi(t); \dot{\theta}(t); \dot{\phi}(t); \dot{\psi}(t); X_G(t), Y_G(t), Z_G(t)$ e $Y_G(X_G)$. Analise o resultado e interprete-o.
- (h) Com os mesmos dados e condições iniciais $\dot{\psi}(0), \dot{\phi}(0), \dot{\theta}(0)$, utilize agora um valor inicial $\theta(0) = \pi/4$, repita a simulação. Plote gráficos de: $\theta(t); \phi(t); \dot{\theta}(t); \dot{\phi}(t); \dot{\psi}(t); X_G(t), Y_G(t), Z_G(t)$ e $Y_G(X_G)$. Analise o resultado e interprete-o.
- (i) Aumente a rotação própria inicial $\dot{\psi}(0) = 5 \text{ rad/s}$. Repita a simulação e a análise. O que você pode concluir a respeito da restauração giroscópica?
- (j) Diminua a rotação própria inicial para $\dot{\psi}(0) = 0.5 \text{ rad/s}$. Repita a simulação e a análise. Interprete o movimento.
- (k) Varie sistematicamente dados e parâmetros iniciais. Explore seu modelo de simulação, procurando compreender as várias possibilidades de movimento que mesmo este caso particular apresenta.

DADOS PARA SIMULAÇÃO:

$$mgz_G = 0.2 \text{ Nm}; \quad I = 1,0 \text{ kg m}^2; \quad J = 2I;$$

$$\text{condições iniciais: } \bar{\theta} = \pi/6; \quad \dot{\psi}(0) = 1.0 \text{ rad/s}; \quad \dot{\theta}(0) = 0$$

8.6. EXERCÍCIO DE SIMULAÇÃO # 3. EXEMPLO DE ANÁLISE.

Para o problema 3, proposto, pede-se:

- (a) Determine o valor da taxa de precessão estacionária $\dot{\phi} = \Omega$, considerando conhecidos a taxa de rotação própria $\dot{\psi} = \omega$, constante, e o ângulo de equilíbrio $\bar{\theta}$.
- (b) Elabore um diagrama de blocos para simulação da equação (1) em ambiente SCICOS/SCILA (ou MATLAB/SIMULINK), chegando até o nível que permita plotar um gráfico da posição do centro de massa (X_G, Y_G, Z_G).
- (c) A figura abaixo mostra dois resultados de simulação da equação (1). Responda às seguintes perguntas:

1 - Qual dos dois casos corresponde à precessão estacionária?

2 - Observando os gráficos do caso (b), vê-se que a taxa de precessão atinge um valor máximo quando a taxa de rotação própria atinge valores mínimos e também quando o ângulo de nutação tem valores máximos. Justifique esta afirmação à luz do princípio de conservação de momento angular.

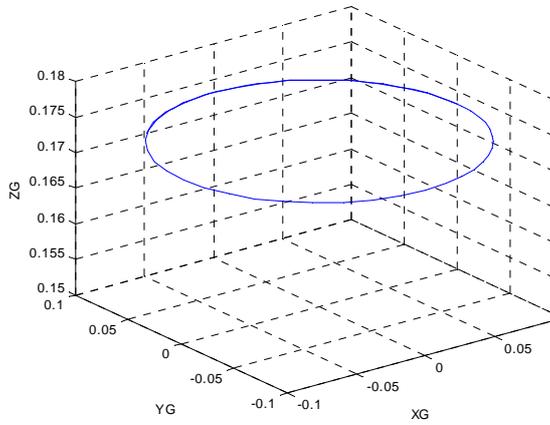
3 - Avalie o período da nutação no caso (b)?

4 - Se a rotação própria fosse aumentada o período de nutação diminuiria ou aumentaria? Justifique.

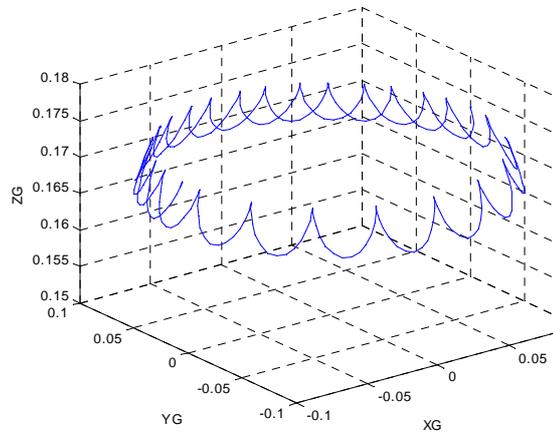
Parâmetros da simulação:

$$mgz_G = 0.2 \text{ Nm}; \quad I = 1,0 \text{ kg m}^2; \quad J = 2I$$

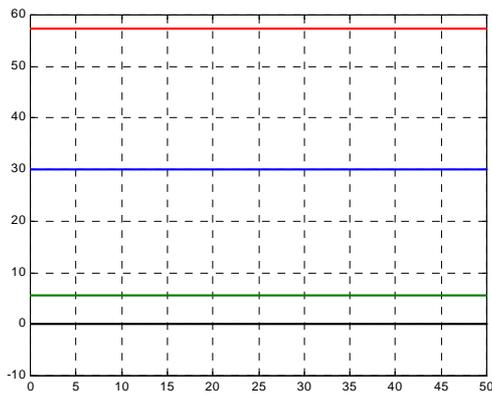
$$\text{condições iniciais: } \theta(0) = \pi/6; \quad \dot{\psi}(0) = 1.0 \text{ rad/s}; \quad \dot{\theta}(0) = 0$$



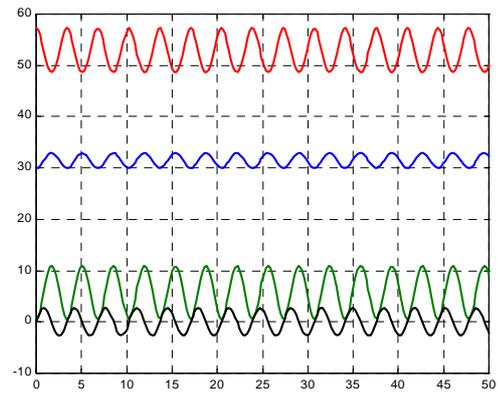
(a)



(b)



(a)



(b)

ANÁLISE DETALHADA E COMENTADA

(a) Precessão estacionária significa: $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = \dot{\phi} = \ddot{\phi} = \dot{\psi} = \ddot{\psi} = 0$; $\dot{\psi} = \omega$; $\dot{\phi} = \Omega$; $\theta = \bar{\theta}$, e portanto de $\alpha = K_{Oz} = I\dot{\phi}\text{sen}^2\theta + J\cos\theta(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)$ e $\beta = K_{Oz} = J(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)$, vem

$$\beta = K_{Oz} = J(\omega + \Omega\cos\bar{\theta}) \quad (2)$$

que fornece a taxa de precessão:

$$\Omega = \frac{1}{\cos\bar{\theta}} \left(\frac{\beta}{J} - \omega \right) \quad (3)$$

ou, alternativamente,

$$\Omega = \frac{1}{2} \left\{ -\frac{J\omega}{(J-I)\cos\bar{\theta}} \pm \sqrt{\left(\frac{J\omega}{(J-I)\cos\bar{\theta}} \right)^2 + \frac{4mgz_G}{(J-I)\cos\bar{\theta}}} \right\} \quad (4)$$

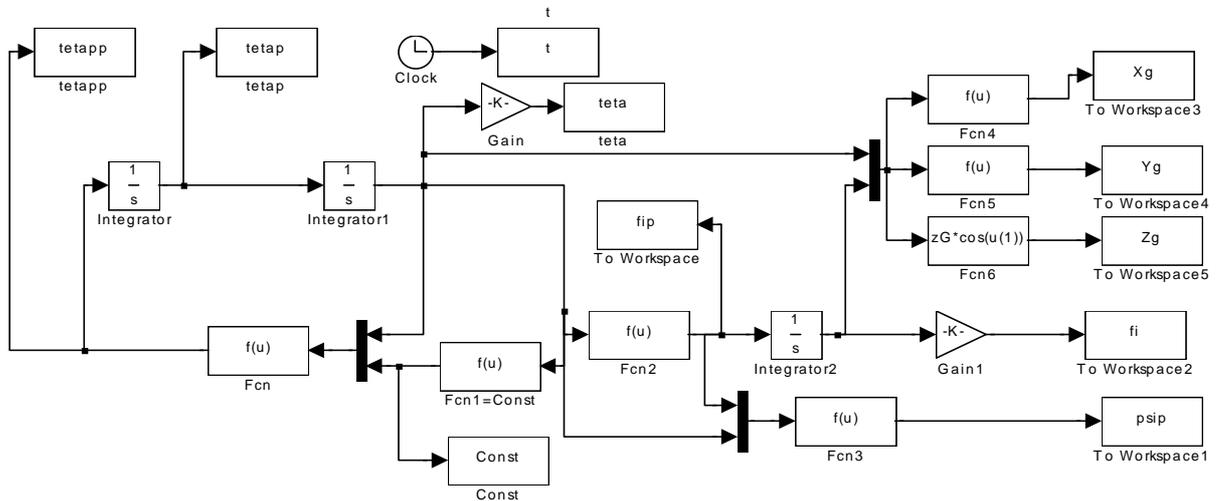
e, da eq. (1), uma relação entre $\bar{\theta}$, α e β , na forma

$$\frac{(\alpha - \beta\cos\bar{\theta})(\beta - \alpha\cos\bar{\theta})}{I\text{sen}^3\bar{\theta}} = mgz_G\text{sen}\bar{\theta} \quad (5)$$

ou, alternativamente,

$$\cos\bar{\theta} = \frac{1}{\left(1 - \frac{I}{J}\right)\Omega^2} \left(\omega\Omega - \frac{mgz_G}{J} \right) \quad (6)$$

(b) Diagrama de blocos para simulação da equação (1) em ambiente MATLAB/SIMULINK, chegando até o nível que permita plotar um gráfico da posição do centro de massa (X_G, Y_G, Z_G).



onde:

$$K = 180/\pi$$

$$\alpha = K_{Oz}(0) = [I\dot{\phi}\sin^2\theta + J\cos\theta(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)]_{t=0}$$

$$\beta = K_{Oz}(0) = [J(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)]_{t=0}$$

$$\text{func} \equiv (m * g * zG * \sin(u(1)) - u(2)/(I * \sin(u(1))^3))/I = \frac{1}{I} \left[mgz_G \sin\theta - \frac{\text{Const}}{I \sin^3\theta} \right]$$

$$\text{func1} \equiv \text{Const} = (\alpha - \beta \cos\theta_0)(\beta - \alpha \cos\theta_0)$$

$$\text{func2} \equiv (\alpha - \beta \cos(u(1)))/(I * \sin(u(1))^2) = (\alpha - \beta \cos\theta)/(I \sin^2\theta) = \dot{\phi}$$

$$\text{func3} \equiv \beta/J - u(1) * \cos(u(2)) = \beta/J - \text{func2} \cos\theta = \dot{\psi}$$

$$\text{func4} \equiv zG * \sin(u(1)) * \cos(u(2)) = z_G \sin\theta \cos\phi = X_G$$

$$\text{func5} \equiv zG * \sin(u(1)) * \sin(u(2)) = z_G \sin\theta \sin\phi = Y_G$$

$$\text{func6} \equiv zG * \cos(u(1)) = z_G \cos\theta = Z_G$$

(c) 1 - Qual dos dois casos corresponde à precessão estacionária? Observando os gráficos abaixo, indique as posições (instantes) em que a taxa de precessão atinge valores máximos? Justifique as respostas.

Resposta: O caso (a) corresponde à precessão estacionária, pois o ângulo de nutação é constante e o CG descreve uma trajetória circular.

2- Observando os gráficos abaixo, indique as posições (instantes) em que a taxa de precessão atinge valores máximos? Justifique as respostas.

Resposta: O caso (a) é de precessão estacionária e portanto a taxa de precessão é constante. No caso (b) a taxa de precessão atinge valores máximos toda a vez em que o ângulo de nutação atingir um máximo, ou seja, sempre que Z_G atingir um mínimo.

2 - Avalie o período da nutação no caso (b)?

Resposta: Do gráfico de $\theta(t)$ em (b), contamos 14 ciclos completos em cerca de 47,5 segundos. Portanto o período de nutação é aproximadamente

$$T_\theta \cong \frac{47,5}{14} \text{ s} \cong 3,4 \text{ s} .$$

3 - Se a rotação própria fosse aumentada o período de nutação diminuiria ou aumentaria? Justifique.

Resposta: O período de nutação diminuiria, pois a "rigidez giroscópica", que é proporcional à rotação própria, aumentaria.

8.7. EXERCÍCIO DE SIMULAÇÃO # 4. PROPOSIÇÃO.

Considere o girocompasso simplificado (exemplo 11, capítulo 6). A figura apresenta os componentes essenciais deste sistema simplificado. O anel vertical pode girar em torno do eixo AB que define o eixo vertical local. O rotor tem rotação própria (de valor muito elevado) $\dot{\psi}$. A latitude local, variável, é $\lambda(t)$. θ é o ângulo formado entre o plano do anel e o meridiano, positivo no sentido oeste a partir da direção Norte. A velocidade angular da Terra é ω_e e seu raio é R . O sistema $(Gxyz)$ é solidário ao anel, sendo Gz o eixo de rotação própria e Gy coincidente com AB .

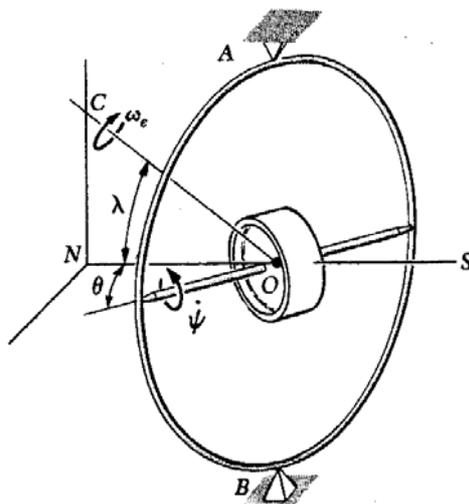


Figura 22 Girocompasso simplificado.

A massa do rotor é M e seu raio é r . Denomine J a inércia polar do rotor e I a diametral. Considere inicialmente o rotor como um disco de espessura diminuta. Existe pequeno atrito no mancal deste rotor, que dá origem a um momento dissipativo proporcional à velocidade de rotação própria, com coeficiente C_ψ . O conjunto tem também amortecimento em torno de AB , que é linearmente proporcional a $\dot{\theta}$, com coeficiente C_θ . Considere ainda que o instrumento esteja montado a bordo de um avião a jato, que voa em altitude constante H , em alta velocidade V , constante, seguindo um rumo α , também constante, em relação ao Norte Verdadeiro (NV), o qual é medido a partir do meridiano local, no sentido anti-horário (ou seja positivo para oeste). Note que a este movimento estará associado um vetor de rotação $\vec{\omega}_j$.

DADOS PARA SIMULAÇÃO:

$$R = 6,3783e+003 \text{ Km}; H = 10 \text{ Km}; \quad \omega_e = 7,2722e-005 \text{ rad/s};$$

$$r = 0,10 \text{ m}; \quad M = 10 \text{ Kg}; \quad V = 3600 \text{ Km/h};$$

$$C_\psi = 0,050 \text{ Nm/(rad/s)}; \quad C_\theta = 0,050 \text{ Nm/(rad/s)}; \quad Q_0 = 500 \text{ Nm}$$

8.7.1. Modelagem do sistema dinâmico, deduzindo as equações do movimento.

(a) Considerando o anel como o referencial móvel e expressando os vetores na base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, que orienta os eixos $(Gxyz)$ solidários ao anel, escreva o vetor de rotação da Terra, $\vec{\omega}_e$, determine $\vec{\omega}_j$ e mostre que o vetor de rotação de arrastamento é dado por:

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_a = & -(\omega_e \cos \lambda \sin \theta - \omega_j \cos(\alpha - \theta))\vec{i} + (\omega_e \sin \lambda + \dot{\theta})\vec{j} + \\ & + (\omega_e \cos \lambda \cos \theta - \omega_j \sin(\alpha - \theta))\vec{k} \end{aligned} \quad (1).$$

Determine então os vetores de rotação relativo $\vec{\Omega}_r$ e absoluto $\vec{\Omega}$ do rotor.

(b) Mostre via aplicação do Teorema do Momento Angular (ao rotor), considerando um torque externo $\vec{Q} = Q(t)\vec{k}$, aplicado ao rotor, que as seguintes equações regem a dinâmica do sistema, em θ e ψ ,

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta} + C_\theta\dot{\theta} + J\dot{\psi}(\omega_e \cos \lambda \sin \theta - \omega_j \cos(\alpha - \theta)) + \\ + (J - I)\{\omega_j \sin(\alpha - \theta) - \omega_e \cos \lambda \cos \theta\}\{\omega_j \cos(\alpha - \theta) - \omega_e \cos \lambda \sin \theta\} = \\ = -I\omega_e \omega_j \cos \alpha \cos \lambda \end{aligned} \quad (2)$$

$$J\ddot{\psi} + C_\psi\dot{\psi} + J[\omega_j \dot{\theta} \cos(\alpha - \theta) - \omega_e (\omega_j \cos \alpha \sin \lambda \cos \theta + \dot{\theta} \cos \lambda \sin \theta)] = Q(t) \quad (3)$$

(c) Faça considerações a respeito da ordem de magnitude dos termos envolvidos e mostre que, desprezando termos de segunda ordem (ou seja produtos na forma bilinear que envolvem ω_e , ω_j , e $\dot{\theta}$), as equações podem ser escritas,

$$\ddot{\theta} + \frac{C_\theta}{I}\dot{\theta} + \frac{J}{I}\dot{\psi}[(\omega_e \cos \lambda - \omega_j \sin \alpha) \sin \theta - \omega_j \cos \alpha \cos \theta] = 0 \quad (4)$$

$$J\ddot{\psi} + C_\psi\dot{\psi} = Q(t) \quad (5)$$

(d) (Que tipo de equação é (4)? E qual o tipo da eq. (5)?) Determine a velocidade angular $\dot{\psi}_{Limite}$ que resulta de um torque $Q(t) = Q_0 = \text{constante}$. Determine e discuta os pontos de equilíbrio da equação diferencial ordinária e não-linear (4) acima e avalie a ordem de grandeza dos valores obtidos, tendo em vista os valores relativos entre ω_j e $\dot{\psi}_{Limite}$. Discuta a estabilidade do sistema (analise os possíveis casos $V \neq 0$ e $V = 0$).

(e) Linearize então a equação (4) acima, para pequenos deslocamentos angulares θ e determine a frequência natural não-amortecida do sistema, ω_N , para uma dada latitude, velocidade e rumo do avião. O que você pode concluir? Para que latitude λ a “rigidez” é máxima (mínima)? Se o vôo for equatorial, em que sentido a rigidez giroscópica é maior (oeste ($\alpha = \pi/2$) ou leste ($\alpha = -\pi/2$))? Avalie como os parâmetros de latitude, rotação própria e momentos de inércia influenciam a estabilidade e tempo de atenuação do *gyro*.

8.7.2. Modelagem do sistema através de simulador

- (d) Elabore em ambiente SCILAB/SCICOS (ou em MATLAB/SIMULINK) um diagrama de blocos, representando as equações deduzidas no item (b). A entrada do sistema considerada é o torque, além dos parâmetros V , H , e α . A saída será $(\theta, \dot{\theta}, \dot{\psi})$, $\lambda(t)$. É interessante também plotar $\gamma(t) = \alpha - \theta(t)$.
- (e) Elabore o diagrama simplificado, proveniente das equações (4) e (5).

8.7.3. Simulação do modelo computacional

- (f) Teste os modelos SCILAB com $\lambda(0) = 0$, $\alpha = 0$ e $Q(t) = Q_0$, atribuindo diferentes condições iniciais de posição θ_0 ou velocidade $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$. Compare e interprete os resultados à luz da análise conduzida em 1. Compare as soluções obtidas com os diagramas gerados em (d) e (e). Interprete os resultados.
- (g) Repita o teste anterior, agora com $\alpha \neq 0$, por exemplo $\alpha = \pi/4$, que significa rumo NW (noroeste). Verifique as conclusões relativas aos itens (d) e (e).
- (h) Considere agora que o avião esteja realizando uma trajetória polar ($\alpha = 0$ ou π); ou seja, seguindo um determinado meridiano. Deixe-o dar várias voltas ao redor da Terra (por exemplo 10 voltas). Interprete o resultado.

Aumente o torque Q_0 . O que você observa como resposta? Aumente agora o coeficiente de amortecimento C_θ . E se você diminuir a razão J/I ? Interprete as soluções obtidas.

8.8. EXERCÍCIO DE SIMULAÇÃO # 4. EXEMPLO DE ANÁLISE.

Você deve ter deduzido que, considerando o anel como o referencial móvel e expressando os vetores na base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, que orienta os eixos $(Oxyz)$ solidários ao anel, o vetor de rotação do rotor é dado por:

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_a = & -(\omega_e \cos \lambda \operatorname{sen} \theta - \omega_J \cos(\alpha - \theta))\vec{i} + (\omega_e \operatorname{sen} \lambda + \dot{\theta})\vec{j} + \\ & + (\omega_e \cos \lambda \cos \theta - \omega_J \operatorname{sen}(\alpha - \theta) + \dot{\psi})\vec{k} \end{aligned} \quad (1).$$

(a) Você também deve ter deduzido que as equações de movimento que regem a dinâmica do sistema, em θ e ψ , sob um torque externo $\vec{Q} = Q(t)\vec{k}$ aplicado ao rotor, quando são desprezados os termos de segunda ordem (ou seja produtos na forma bilinear que envolvem ω_e , ω_J , e $\dot{\theta}$), são dadas por:

$$\ddot{\theta} + \frac{C_\theta}{I} \dot{\theta} + \frac{J}{I} \dot{\psi} [(\omega_e \cos \lambda - \omega_J \operatorname{sen} \alpha) \operatorname{sen} \theta - \omega_J \cos \alpha \cos \theta] = 0 \quad (2)$$

$$J\ddot{\psi} + C_\psi \dot{\psi} = Q(t) \quad (3)$$

Definindo a função “potencial”:

$$U(\theta) = \int \frac{J}{I} \dot{\psi} [(\omega_e \cos \lambda - \omega_J \operatorname{sen} \alpha) \operatorname{sen} \theta - \omega_J \cos \alpha \cos \theta] d\theta,$$

com $V, I, \dot{\psi}, \alpha$ constantes, **determine os pontos de equilíbrio** da equação diferencial ordinária e não-linear (2) acima em função de $\omega_J, \omega_e, \alpha, \lambda$ e **analise sua estabilidade quando** $\alpha = \pm \pi/2$, **para os possíveis casos** $V \neq 0$ e $V = 0$. V é a velocidade de avanço do veículo.

(b) Simulando-se as equações gerais, as figuras abaixo mostram a evolução de $\theta(t), Q(t), \dot{\psi}(t)$ quando, subitamente, é aplicado um torque constante. A rotação inicial do rotor é nula ($\dot{\psi}(0) = 0$). A partir do instante $t = 30$ s o motor de acionamento do rotor começa a sofrer uma falha intermitente, devido a um mal-contato elétrico, fazendo com que o torque periodicamente se anule, com uma frequência de 1/3 Hz. **Justifique qualitativamente o resultado da simulação**, tendo em vista as variações ocorrentes em $\theta(t), Q(t), \dot{\psi}(t)$ nos intervalos $(0, 30\text{s})$ e $(30\text{s}, 90\text{s})$.

Neste caso o instrumento está instalado em um veículo terrestre ($h=0$) que percorre uma trecho retilíneo de estrada segundo o sentido Leste-Oeste a 100 Km/h, a uma latitude de -30° , sob as condições iniciais dadas abaixo. ***O que você pode concluir a respeito da eficácia do aparelho para este tipo de veículo, a partir do exemplo apresentado?***

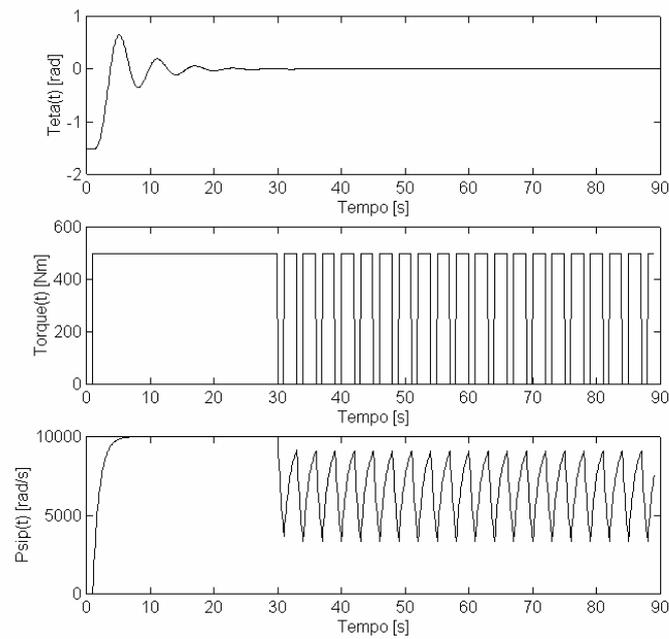


Figura 23 Simulação com falha intermitente.

ANÁLISE DETALHADA E COMENTADA

(a) O equilíbrio deve satisfazer a seguinte condição: $\frac{dU}{d\theta} = 0$, ou seja,

$$\frac{dU}{d\theta} = \frac{J}{I} \dot{\psi} [(\omega_e \cos \lambda - \omega_J \sin \alpha) \sin \theta - \omega_J \cos \alpha \cos \theta] = 0,$$

que conduz a

$$\tan \theta_{eq} = \frac{\omega_J \cos \alpha}{\omega_e \cos \lambda - \omega_J \sin \alpha}.$$

Por outro lado, estabilidade em torno do ponto de equilíbrio implica em ter-se:

$\left. \frac{d^2U}{d\theta^2} \right|_{\theta_{eq}} > 0$. A derivada segunda de $U(\theta)$ é dada por,

$\frac{d^2U}{d\theta^2} = \frac{J}{I} \dot{\psi} [(\omega_e \cos \lambda - \omega_J \sin \alpha) \cos \theta + \omega_J \cos \alpha \sin \theta]$. Considerando apenas o caso

em que $\alpha = \pm \pi/2$ teremos duas possíveis posições de equilíbrio, no intervalo

$$[0, 2\pi) : \theta_{eq} = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}.$$

Lembrando que $\omega_J = \frac{V \cos \alpha}{R}$ teremos, com $\alpha = \pm \pi/2$, $\omega_J = 0$, independentemente da velocidade do veículo. Analisando a condição necessária de estabilidade, para $\theta_{eq} = 0; \pi$, vemos então que devemos ter

$$\left. \frac{d^2U}{d\theta^2} (\alpha = \pm \pi/2) \right|_{\theta_{eq}=0;\pi} = \begin{cases} \frac{J}{I} \dot{\psi} \omega_e \cos \lambda > 0; \theta_{eq} = 0 \\ \frac{J}{I} \dot{\psi} \omega_e \cos \lambda < 0; \theta_{eq} = \pi \end{cases}$$

ou seja, como $\dot{\psi} > 0$, por hipótese, e $\lambda \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, o termo de rigidez giroscópica se

reduz neste caso a $\frac{J}{I} \dot{\psi} \omega_e \cos \lambda \geq 0$, (positivo sempre), o que implica, com

$\alpha = \pm \pi/2$, na seguinte situação:

$\theta_{eq} = 0$ é **um ponto de equilíbrio estável**, (exceto nos polos, quando $\lambda = \pm \pi/2$)

e $\theta_{eq} = \pi$ é um ponto de equilíbrio instável, sempre.

(b) Note que da equação (3), a rotação-própria limite é: $\dot{\psi}_{lim} = \frac{Q_0}{C_\psi}$; no presente caso

$$\dot{\psi}_{lim} = 10000 \text{ rad/s} \cong 95942 \text{ rpm}.$$

O sistema é acionado com a aplicação súbita (degrau) de um torque $Q_0 = 500 \text{ Nm}$, a partir das condições iniciais $\dot{\psi}(0) \equiv 0$, $\theta = -\frac{\pi}{2} + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, ou seja fora da posição de equilíbrio estável $\theta_{eq} = 0$, correspondente ao rumo Leste-Oeste ($\alpha = \pi/2$). Durante o acionamento do rotor o eixo do girocompasso sofrerá um transitório, estabilizando-se assintoticamente em torno de $\theta_{eq} = 0$, pois, como $C_\theta = 0,010 \text{ Nm/(rad/s)}$, existe dissipação. A rigidez giroscópica é tanto maior quanto maior for $\dot{\psi}$. Para um valor relativamente elevado desta rigidez, como acontece no presente caso, o amortecimento é sub-crítico e a estabilidade assintótica é oscilatória fazendo com que o ângulo de equilíbrio seja atingido (dentro de uma tolerância razoável) quando $t \approx 30 \text{ s}$.

Coincidentemente, neste instante começa a haver uma falha intermitente do motor de acionamento do rotor, de tal sorte que o torque se anula periodicamente, com uma frequência $1/3 \text{ Hz}$. Obviamente, toda a vez que o torque se anula subitamente, a rotação própria do rotor diminui sensivelmente para, em seguida sofrer uma recuperação (exponencial), quando o torque volta (subitamente) ao valor original. Embora esta falha seja grave, devido a ocorrer com frequência relativamente alta, a rotação própria jamais chega a se anular e, consequentemente, não há perda de estabilidade. Note que o girocompasso continua estável. No entanto, caso a falha intermitente tivesse maior duração, de tal sorte que a rotação própria se anulasse periodicamente, o girocompasso perderia a estabilidade.

Com base no exemplo apresentado, pode-se concluir que **o aparelho é eficaz** para este tipo de veículo, que viaja a uma baixa velocidade, exibindo robustez considerável, mesmo diante de uma grave falha de acionamento.