Mecânica Quântica

Alexandre Souto Martinez[1]

[1]Departamento de Física (DF)
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Ribeirão Preto (FFCLRP)
Universidade de São Paulo (USP)
Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia em Sistemas Complexos (INCT-SC)
Grupo de Pesquisa no CNPq: Física Estatística e Computação

Ribeirão Preto, 23 de maio de 2017

Eq. Schrödinger 3D ($\langle\vec{r}|\vec{\mathbb{p}} = -\imath\hbar\vec{\nabla}\langle\vec{r}|$)

Eq. Schrödinger

$$\imath\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = [\frac{\vec{\mathbb{p}}^2}{2m} + V(\vec{\mathbb{r}})]|\psi(t)\rangle$$

Eq. Schrödinger 3D ($\langle\vec{r}|\vec{\mathbb{p}} = -\imath\hbar\vec{\nabla}\langle\vec{r}|$)

Eq. Schrödinger

$$\imath\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = [\frac{\vec{\mathbb{p}}^2}{2m} + V(\vec{\mathbb{r}})]|\psi(t)\rangle$$

Eq. Schrödinger independente do tempo

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(\vec{r})\right]\varphi_{\{n\}}(\vec{r}) = E_{\{n\}}\varphi_{\{n\}}(\vec{r})$$

Eq. Schrödinger 3D ($\langle\vec{r}|\vec{\mathbb{p}} = -\imath\hbar\vec{\nabla}\langle\vec{r}|$)

Eq. Schrödinger

$$\imath\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = [\frac{\vec{\mathbb{p}}^2}{2m} + V(\vec{\mathbb{r}})]|\psi(t)\rangle$$

Eq. Schrödinger independente do tempo

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(\vec{r})\right]\varphi_{\{n\}}(\vec{r}) = E_{\{n\}}\varphi_{\{n\}}(\vec{r})$$

Solução geral

$$\psi(\vec{r},t) = \sum_{\{n\}} e^{-\imath E_{\{n\}}t/\hbar}c_{\{n\}}\varphi_{\{n\}}(\vec{r})$$

Eq. Schrödinger 3D ($\langle\vec{r}|\vec{\mathbb{p}} = -\imath\hbar\vec{\nabla}\langle\vec{r}|$)

Eq. Schrödinger

$$\imath\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = [\frac{\vec{\mathbb{p}}^2}{2m} + V(\vec{\mathbb{r}})]|\psi(t)\rangle$$

Eq. Schrödinger independente do tempo

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(\vec{r})\right]\varphi_{\{n\}}(\vec{r}) = E_{\{n\}}\varphi_{\{n\}}(\vec{r})$$

Solução geral

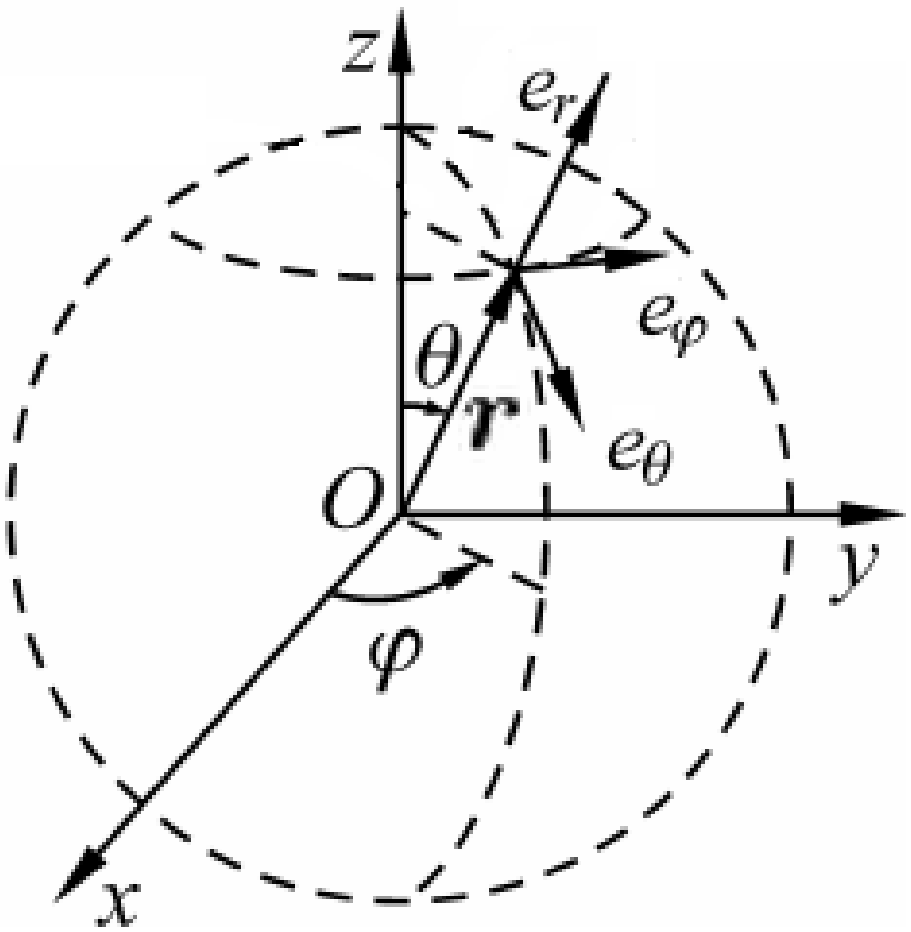
$$\psi(\vec{r},t) = \sum_{\{n\}} e^{-\imath E_{\{n\}}t/\hbar}c_{\{n\}}\varphi_{\{n\}}(\vec{r})$$

onde c_n é obtido da condição inicial $\psi(\vec{r},0)$ e

$$\int d\vec{r}|\psi(\vec{r},t)|^2 = 1\ .$$

Coordenadas Esféricas

Potencial central: $V(\vec{r}) = V(|\vec{r}|)$



Coordenadas esféricas.

Coordenadas Esféricas

Laplaciano

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\partial_\phi^2$$

Coordenadas Esféricas

Laplaciano

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\partial_\phi^2$$

Eq. de Schrödinger independente do tempo

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(r)\right]\varphi_{n,\ell,m}(\vec{r}) = E_{n,\ell,m}\varphi_{n,\ell,m}(\vec{r})$$

Coordenadas Esféricas

Laplaciano

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\partial_\phi^2$$

Eq. de Schrödinger independente do tempo

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(r)\right]\varphi_{n,\ell,m}(\vec{r}) = E_{n,\ell,m}\varphi_{n,\ell,m}(\vec{r})$$

Busca-se soluções do tipo

$$\varphi_{n,\ell,m}(\vec{r}) = R_n(r)Y_\ell^{(m)}(\theta,\phi)$$

Coordenadas Esféricas

Laplaciano

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\partial_\phi^2$$

Eq. de Schrödinger independente do tempo

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(r)\right]\varphi_{n,\ell,m}(\vec{r}) = E_{n,\ell,m}\varphi_{n,\ell,m}(\vec{r})$$

Busca-se soluções do tipo

$$\varphi_{n,\ell,m}(\vec{r}) = R_n(r)Y_\ell^{(m)}(\theta,\phi)$$

com normalização

$$\begin{aligned}\int_0^\infty drr^2|R(r)|^2 &= 1\\ \int_0^{2\pi}d\phi\int_0^\pi d\theta\sin\theta|Y_\ell^{(m)}(\theta,\phi)|^2 &= 1\end{aligned}$$

Separação de Variáveis

Sem índices, para não carregar a notação:

$$Y(\theta,\phi)\left[\frac{-\hbar^2}{2m}d_r\left(r^2 d_r R(r)\right)+r^2 V(r)\right] \quad + \quad R(r)\frac{-\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta Y(\theta,\phi)\right)+\frac{1}{sin^2\theta}\partial_\phi^2 Y(\theta,\phi)\right]=Er^2R(r)Y(\theta,\phi)$$

Separação de Variáveis

Sem índices, para não carregar a notação:

$$Y(\theta,\phi)\left[\frac{-\hbar^2}{2m}d_r\left(r^2 d_r R(r)\right)+r^2V(r)\right] \quad + \quad R(r)\frac{-\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta Y(\theta,\phi)\right)+\frac{1}{sin^2\theta}\partial_\phi^2 Y(\theta,\phi)\right]=Er^2R(r)Y(\theta,\phi)$$

$$\frac{1}{R(r)}d_r\left(r^2d_rR(r)\right) \quad - \quad \frac{2mr^2}{\hbar^2}[V(r)-E]= \frac{-1}{Y(\theta,\phi)}\left[\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta Y(\theta,\phi)\right)+\frac{1}{sin^2\theta}\partial_\phi^2 Y(\theta,\phi)\right]$$

Separação de Variáveis

Sem índices, para não carregar a notação:

$$Y(\theta,\phi)\left[\frac{-\hbar^2}{2m}d_r\left(r^2 d_r R(r)\right)+r^2V(r)\right] \quad + \quad R(r)\frac{-\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta Y(\theta,\phi)\right)+\frac{1}{sin^2\theta}\partial_\phi^2 Y(\theta,\phi)\right]=Er^2R(r)Y(\theta,\phi)$$

$$\frac{1}{R(r)}d_r\left(r^2d_rR(r)\right) \quad - \quad \frac{2mr^2}{\hbar^2}[V(r)-E]= \frac{-1}{Y(\theta,\phi)}\left[\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta Y(\theta,\phi)\right)+\frac{1}{sin^2\theta}\partial_\phi^2 Y(\theta,\phi)\right]$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{R}d_r\left(r^2d_rR\right)-\frac{2mr^2}{\hbar^2}[V(r)-E] &= \ell(\ell+1)\\ \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta Y\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2 Y &= -\ell(\ell+1)Y\end{aligned}$$

Separação de Variáveis

Parte Radial

$$d_r\left(r^2 d_r R\right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2}\left[V(r) - E\right]R = \ell(\ell+1)R$$

Separação de Variáveis

Parte Radial

$$d_r\left(r^2 d_r R\right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2}\left[V(r) - E\right]R = \ell(\ell+1)R$$

Chamando $u(r) = rR(r)$ tem-se a Eq. Schrödinger 1D:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}u(r) + \left[\underbrace{V(r) + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}}_{V_{efetivo}}\right]u(r) = Eu(r)$$

Separação de Variáveis

Parte Radial

$$d_r\left(r^2 d_r R\right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2}\left[V(r) - E\right] R = \ell(\ell+1)R$$

Chamando $u(r) = rR(r)$ tem-se a Eq. Schrödinger 1D:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}u(r) + \left[\underbrace{V(r) + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}}_{V_{efetivo}}\right] u(r) = Eu(r)$$

a parcela $\ell(\ell+1)/r^2$ tender a expulsar a partícula da origem.

$$\int_0^\infty dr\, |u(r)|^2 = 1$$

Solução R depende da forma explicita do potencial, analisamos depois.

Separação de Variáveis

Parte Angular

Variáveis Angulares

$$Y_\ell^{(m)}(\theta,\phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi)$$

$$\begin{aligned}\left[\sin\theta d_\theta\left(\sin\theta d_\theta\right) + \ell(\ell+1)\sin^2\theta\right]\Theta &= m^2\Theta \\ d_\phi^2\Phi &= -m^2\Phi\end{aligned}$$

Ângulo Azimutal

A equação em ϕ: $d_\phi^2\Phi = -m^2\Phi$ tem a solução $\Phi(\phi) = e^{\imath m\phi}$ com m real.

Ângulo Azimutal

A equação em ϕ: $d_\phi^2\Phi = -m^2\Phi$ tem a solução $\Phi(\phi) = e^{\imath m\phi}$ com m real. Mas a condição periódica:

$$\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi) \longrightarrow e^{\imath 2\pi m\phi} = 1$$

implica em que $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, ou seja, inteiro.
A periodicidade em 2π implica na discretização de m (em inteiros).

Coordenadas Esféricas

$$\begin{aligned} \frac{\sin\theta}{\Theta} d_\theta \left(\sin\theta d_\theta\right) + \ell(\ell+1)\sin^2\theta &= m^2 \\ d_\phi^2 \Phi &= -m^2 \Phi \end{aligned}$$

A equação em θ

$$\sin\theta d_\theta \left(\sin\theta d_\theta \Theta\right) + \left[\ell(\ell+1)\sin^2\theta - m^2\right]\Theta = 0$$

tem a solução

$$\Theta(\theta) = P_\ell^{(m)}(\theta)$$

Uma EDO de segunda ordem tem duas soluções independentes, neste caso desconsideramos a segunda solução por ela divergir ou em $\theta = 0$ ou em $\theta = \pi$.
$P_\ell^{(m)}(\theta)$ é função associada de Legendre.

Tem-se

$$P_\ell^{(m)}(x) = (1-x^2)^{|m|/2} d_x^{|m|} P_\ell(x)$$

com $P_\ell^{(-m)}(x) = P_\ell^{(m)}(x)$.
Os polinômios de Legendre são calculados a partir da fórmula de Rodrigues

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} d_x^\ell (x^2-1)^\ell$$

Para que esta fórmula faça sentido, ℓ deve ser inteiro não negativo $\ell = 0, 1, 2, \ldots$, mas para $|m| > \ell$, $P_\ell^{(m)}(x) = 0$.
Dado um valor de ℓ, há $2\ell + 1$ valores de m, assim:

$$\begin{aligned} \ell &= 0, 1, 2, \ldots \\ m &= -\ell, -\ell+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \ell-1, \ell \end{aligned}$$

Momento Angular

Assim como a energia, o momento angular é uma grandeza conservada.

Momento Angular

Assim como a energia, o momento angular é uma grandeza conservada.

- **Teoria Clássica**

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = (y\, p_z - z\, p_y)\, \hat{x} + (z\, p_x - x\, p_z)\, \hat{y} + (x\, p_y - y\, p_x)\, \hat{z}\ .$$

Momento Angular

Assim como a energia, o momento angular é uma grandeza conservada.

- **Teoria Clássica**

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = (y\, p_z - z\, p_y)\, \hat{x} + (z\, p_x - x\, p_z)\, \hat{y} + (x\, p_y - y\, p_x)\, \hat{z}\ .$$

- **Teoria Quântica**

$$\vec{\mathbb{L}} = \vec{\mathbb{r}} \wedge \vec{\mathbb{p}}$$

Momento Angular

Assim como a energia, o momento angular é uma grandeza conservada.

- **Teoria Clássica**

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = (y\, p_z - z\, p_y)\, \hat{x} + (z\, p_x - x\, p_z)\, \hat{y} + (x\, p_y - y\, p_x)\, \hat{z}\ .$$

- **Teoria Quântica**

$$\vec{\mathbb{L}} = \vec{\mathbb{r}} \wedge \vec{\mathbb{p}}$$

Na representação de posição $\langle \vec{r} | \vec{\mathbb{r}} = \vec{r} \langle \vec{r} |$ e $\langle \vec{r} | \vec{\mathbb{p}} = \frac{\hbar}{\imath}\, \vec{\nabla}\, \langle \vec{r} |$.

Momento Angular

Assim como a energia, o momento angular é uma grandeza conservada.

- **Teoria Clássica**

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = (y\, p_z - z\, p_y)\, \hat{x} + (z\, p_x - x\, p_z)\, \hat{y} + (x\, p_y - y\, p_x)\, \hat{z}\ .$$

- **Teoria Quântica**

$$\vec{\mathbb{L}} = \vec{\mathbb{r}} \wedge \vec{\mathbb{p}}$$

Na representação de posição $\langle \vec{r} | \vec{\mathbb{r}} = \vec{r} \langle \vec{r} |$ e $\langle \vec{r} | \vec{\mathbb{p}} = \frac{\hbar}{\imath}\, \vec{\nabla}\, \langle \vec{r} |$.
Em particular,

$$[\mathbb{L}_x, \mathbb{L}_y] = \imath \hbar \mathbb{L}_z$$

em geral,

$$[\mathbb{L}_i, \mathbb{L}_j] = \imath \hbar \mathbb{L}_k \epsilon_{ijk}$$

Momento Angular

Assim como a energia, o momento angular é uma grandeza conservada.

- **Teoria Clássica**

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = (y\, p_z - z\, p_y)\, \hat{x} + (z\, p_x - x\, p_z)\, \hat{y} + (x\, p_y - y\, p_x)\, \hat{z}\ .$$

- **Teoria Quântica**

$$\vec{\mathbb{L}} = \vec{\mathbb{r}} \wedge \vec{\mathbb{p}}$$

Na representação de posição $\langle \vec{r} | \vec{\mathbb{r}} = \vec{r} \langle \vec{r} |$ e $\langle \vec{r} | \vec{\mathbb{p}} = \frac{\hbar}{\imath}\, \vec{\nabla}\, \langle \vec{r} |$.
Em particular,

$$[\mathbb{L}_x, \mathbb{L}_y] = \imath \hbar \mathbb{L}_z$$

em geral,

$$[\mathbb{L}_i, \mathbb{L}_j] = \imath \hbar \mathbb{L}_k \epsilon_{ijk}$$

Devido não comutação, $\mathbb{L}_i$ e $\mathbb{L}_j$, com $i \neq j$, eles não são observáveis que possam ser medidos simultaneamente.

Medida simultanea de $\vec{\mathbb{L}}^2$ e $\mathbb{L}_z$

Considere

$$\vec{\mathbb{L}}^2 = \mathbb{L}_x^2 + \mathbb{L}_y^2 + \mathbb{L}_z^2$$

assim

$$[\vec{\mathbb{L}}^2, \mathbb{L}_i] = 0$$

$\vec{\mathbb{L}}^2$ e qualquer componente de $\vec{\mathbb{L}}$ podem ser medidos simultaneamente.

$$\begin{aligned} \vec{\mathbb{L}}^2|\varphi\rangle &= \lambda|\varphi\rangle \\ \mathbb{L}_z|\varphi\rangle &= \mu|\varphi\rangle \end{aligned}$$

Medida simultanea de $\vec{\mathbb{L}}^2$ e $\mathbb{L}_z$

Considere

$$\vec{\mathbb{L}}^2 = \mathbb{L}_x^2 + \mathbb{L}_y^2 + \mathbb{L}_z^2$$

assim

$$[\vec{\mathbb{L}}^2, \mathbb{L}_i] = 0$$

$\vec{\mathbb{L}}^2$ e qualquer componente de $\vec{\mathbb{L}}$ podem ser medidos simultaneamente.

$$\begin{aligned} \vec{\mathbb{L}}^2|\varphi\rangle &= \lambda|\varphi\rangle \\ \mathbb{L}_z|\varphi\rangle &= \mu|\varphi\rangle \end{aligned}$$

Devemos determinar λ e μ.

Técnica de levantamento e abaixamento de níveis

$$\mathbb{L}_{\pm} = \mathbb{L}_x \pm \imath \mathbb{L}_y$$

Técnica de levantamento e abaixamento de níveis

$$\mathbb{L}_{\pm} = \mathbb{L}_x \pm \imath \mathbb{L}_y$$

Pode-se mostrar que:

$$[\mathbb{L}_z, \mathbb{L}_{\pm}] = \pm\hbar\mathbb{L}_{\pm}$$

e

$$[\vec{\mathbb{L}}^2, \mathbb{L}_{\pm}] = 0$$

Se $|\varphi\rangle$ é autoket de $\vec{\mathbb{L}}^2$ e $\mathbb{L}_z$, **então** devido a comutação acima $|\varphi\rangle$ é autoket de $\vec{\mathbb{L}}^2$ e $\mathbb{L}_{\pm}$.

Técnica de levantamento e abaixamento de níveis

$$\mathbb{L}_{\pm} = \mathbb{L}_x \pm \imath \mathbb{L}_y$$

Pode-se mostrar que:

$$[\mathbb{L}_z, \mathbb{L}_{\pm}] = \pm\hbar\mathbb{L}_{\pm}$$

e

$$[\vec{\mathbb{L}}^2, \mathbb{L}_{\pm}] = 0$$

Se $|\varphi\rangle$ é autoket de $\vec{\mathbb{L}}^2$ e $\mathbb{L}_z$, **então** devido a comutação acima $|\varphi\rangle$ é autoket de $\vec{\mathbb{L}}^2$ e $\mathbb{L}_{\pm}$.

- $\mathbb{L}_{\pm}|\varphi\rangle$ é um autoket de $\mathbb{L}_z$ com autovalor $\mu \pm \hbar$ ($\mathbb{L}_z[\mathbb{L}_{\pm}|\varphi\rangle] = \mathbb{L}_{\pm}|\varphi\rangle$).

Técnica de levantamento e abaixamento de níveis

$$\mathbb{L}_{\pm} = \mathbb{L}_x \pm \imath \mathbb{L}_y$$

Pode-se mostrar que:

$$[\mathbb{L}_z, \mathbb{L}_{\pm}] = \pm\hbar\mathbb{L}_{\pm}$$

e

$$[\vec{\mathbb{L}}^2, \mathbb{L}_{\pm}] = 0$$

Se $|\varphi\rangle$ é autoket de $\vec{\mathbb{L}}^2$ e $\mathbb{L}_z$, **então** devido a comutação acima $|\varphi\rangle$ é autoket de $\vec{\mathbb{L}}^2$ e $\mathbb{L}_{\pm}$.

- $\mathbb{L}_{\pm}|\varphi\rangle$ é um autoket de $\mathbb{L}_z$ com autovalor $\mu \pm \hbar$ ($\mathbb{L}_z[\mathbb{L}_{\pm}|\varphi\rangle] = \mathbb{L}_{\pm}|\varphi\rangle$).
- $\mathbb{L}_{+}|\varphi\rangle$ é o operador levantamento da projeção do momento angular, pois aumenta o autovalor de $\mathbb{L}_z$ de $\hbar$.

Técnica de levantamento e abaixamento de níveis

$$\mathbb{L}_{\pm} = \mathbb{L}_x \pm \imath \mathbb{L}_y$$

Pode-se mostrar que:

$$[\mathbb{L}_z, \mathbb{L}_{\pm}] = \pm\hbar\mathbb{L}_{\pm}$$

e

$$[\vec{\mathbb{L}}^2, \mathbb{L}_{\pm}] = 0$$

Se $|\varphi\rangle$ é autoket de $\vec{\mathbb{L}}^2$ e $\mathbb{L}_z$, **então** devido a comutação acima $|\varphi\rangle$ é autoket de $\vec{\mathbb{L}}^2$ e $\mathbb{L}_{\pm}$.

- $\mathbb{L}_{\pm}|\varphi\rangle$ é um autoket de $\mathbb{L}_z$ com autovalor $\mu \pm \hbar$ ($\mathbb{L}_z[\mathbb{L}_{\pm}|\varphi\rangle] = \mathbb{L}_{\pm}|\varphi\rangle$).
- $\mathbb{L}_{+}|\varphi\rangle$ é o operador levantamento da projeção do momento angular, pois aumenta o autovalor de $\mathbb{L}_z$ de $\hbar$.
- $\mathbb{L}_{-}|\varphi\rangle$ é o operador abaixamento da projeção do momento angular, pois diminui o autovalor de $\mathbb{L}_z$ de $\hbar$.

Observe que esses operadores deve ser aplicados do valor mínimo até o valor máximo (ou vice-versa) de momento angular.

Cálculo de λ e μ

- Seja $\hbar\ell$ o valor máximo de $\mathbb{L}_z$, assim: $\mathbb{L}_z|\ell\rangle = \hbar\ell|\ell\rangle$ e $\vec{\mathbb{L}}^2|\ell\rangle = \lambda_\ell|\ell\rangle$.

Cálculo de λ e μ

- Seja $\hbar\ell$ o valor máximo de $\mathbb{L}_z$, assim: $\mathbb{L}_z|\ell\rangle = \hbar\ell|\ell\rangle$ e $\vec{\mathbb{L}}^2|\ell\rangle = \lambda_\ell|\ell\rangle$. Usando que $\mathbb{L}_+|\ell\rangle = 0$ em $\vec{\mathbb{L}}^2 = \mathbb{L}_\pm\mathbb{L}_\mp + \mathbb{L}_z^2 \mp \mathbb{L}_z$, obtemos:

$$\lambda_\ell = \hbar^2\ell(\ell+1) \tag{1}$$

Cálculo de λ e μ

- Seja $\hbar\ell$ o valor máximo de $\mathbb{L}_z$, assim: $\mathbb{L}_z|\ell\rangle = \hbar\ell|\ell\rangle$ e $\vec{\mathbb{L}}^2|\ell\rangle = \lambda_\ell|\ell\rangle$. Usando que $\mathbb{L}_+|\ell\rangle = 0$ em $\vec{\mathbb{L}}^2 = \mathbb{L}_\pm\mathbb{L}_\mp + \mathbb{L}_z^2 \mp \mathbb{L}_z$, obtemos:

$$\lambda_\ell = \hbar^2\ell(\ell+1) \tag{1}$$

- Seja $\hbar\bar{\ell}$ o valor mínimo de $\mathbb{L}_z$, assim: $\mathbb{L}_z|\bar{\ell}\rangle = \hbar\bar{\ell}|\bar{\ell}\rangle$ e $\mathbb{L}^2|\bar{\ell}\rangle = \lambda_{\bar{\ell}}|\bar{\ell}\rangle$.

Cálculo de λ e μ

- Seja $\hbar\ell$ o valor máximo de $\mathbb{L}_z$, assim: $\mathbb{L}_z|\ell\rangle = \hbar\ell|\ell\rangle$ e $\vec{\mathbb{L}}^2|\ell\rangle = \lambda_\ell|\ell\rangle$. Usando que $\mathbb{L}_+|\ell\rangle = 0$ em $\vec{\mathbb{L}}^2 = \mathbb{L}_\pm\mathbb{L}_\mp + \mathbb{L}_z^2 \mp \mathbb{L}_z$, obtemos:

$$\lambda_\ell = \hbar^2\ell(\ell+1) \tag{1}$$

- Seja $\hbar\bar{\ell}$ o valor mínimo de $\mathbb{L}_z$, assim: $\mathbb{L}_z|\bar{\ell}\rangle = \hbar\bar{\ell}|\bar{\ell}\rangle$ e $\mathbb{L}^2|\bar{\ell}\rangle = \lambda_{\bar{\ell}}|\bar{\ell}\rangle$. Usando que $\mathbb{L}_-|\bar{\ell}\rangle = 0$ em $\mathbb{L}^2|\ell\rangle = \lambda_{\bar{\ell}}|\bar{\ell}\rangle$, obtemos:

$$\lambda_{\bar{\ell}} = \hbar^2\bar{\ell}(\bar{\ell}-1)\ . \tag{2}$$

Cálculo de λ e μ

- Seja $\hbar\ell$ o valor máximo de $\mathbb{L}_z$, assim: $\mathbb{L}_z|\ell\rangle = \hbar\ell|\ell\rangle$ e $\vec{\mathbb{L}}^2|\ell\rangle = \lambda_\ell|\ell\rangle$. Usando que $\mathbb{L}_+|\ell\rangle = 0$ em $\vec{\mathbb{L}}^2 = \mathbb{L}_\pm\mathbb{L}_\mp + \mathbb{L}_z^2 \mp \mathbb{L}_z$, obtemos:

$$\lambda_\ell = \hbar^2\ell(\ell+1) \tag{1}$$

- Seja $\hbar\bar{\ell}$ o valor mínimo de $\mathbb{L}_z$, assim: $\mathbb{L}_z|\bar{\ell}\rangle = \hbar\bar{\ell}|\bar{\ell}\rangle$ e $\mathbb{L}^2|\bar{\ell}\rangle = \lambda_{\bar{\ell}}|\bar{\ell}\rangle$. Usando que $\mathbb{L}_-|\bar{\ell}\rangle = 0$ em $\mathbb{L}^2|\ell\rangle = \lambda_{\bar{\ell}}|\bar{\ell}\rangle$, obtemos:

$$\lambda_{\bar{\ell}} = \hbar^2\bar{\ell}(\bar{\ell}-1)\ . \tag{2}$$

Comparando Eqs. 1 e 2, vemos que $\bar{\ell} = \ell + 1$ (absurdo pois valor mínimo maior que valor máximo) ou $\bar{\ell} = -\ell$.

Cálculo de λ e μ

- Seja $\hbar\ell$ o valor máximo de $\mathbb{L}_z$, assim: $\mathbb{L}_z|\ell\rangle = \hbar\ell|\ell\rangle$ e $\vec{\mathbb{L}}^2|\ell\rangle = \lambda_\ell|\ell\rangle$. Usando que $\mathbb{L}_+|\ell\rangle = 0$ em $\vec{\mathbb{L}}^2 = \mathbb{L}_\pm\mathbb{L}_\mp + \mathbb{L}_z^2 \mp \mathbb{L}_z$, obtemos:

$$\lambda_\ell = \hbar^2\ell(\ell+1) \tag{1}$$

- Seja $\hbar\bar{\ell}$ o valor mínimo de $\mathbb{L}_z$, assim: $\mathbb{L}_z|\bar{\ell}\rangle = \hbar\bar{\ell}|\bar{\ell}\rangle$ e $\mathbb{L}^2|\bar{\ell}\rangle = \lambda_{\bar{\ell}}|\bar{\ell}\rangle$. Usando que $\mathbb{L}_-|\bar{\ell}\rangle = 0$ em $\mathbb{L}^2|\ell\rangle = \lambda_{\bar{\ell}}|\bar{\ell}\rangle$, obtemos:

$$\lambda_{\bar{\ell}} = \hbar^2\bar{\ell}(\bar{\ell}-1)\ . \tag{2}$$

Comparando Eqs. 1 e 2, vemos que $\bar{\ell} = \ell + 1$ (absurdo pois valor mínimo maior que valor máximo) ou $\bar{\ell} = -\ell$.
Vamos representar os autovalores de $\mathbb{L}_z$ por $m\hbar$, com o valor de m variando de $-\ell$ até ℓ, em N passos iguais.

Cálculo de λ e μ

- Seja $\hbar\ell$ o valor máximo de $\mathbb{L}_z$, assim: $\mathbb{L}_z|\ell\rangle = \hbar\ell|\ell\rangle$ e $\vec{\mathbb{L}}^2|\ell\rangle = \lambda_\ell|\ell\rangle$. Usando que $\mathbb{L}_+|\ell\rangle = 0$ em $\vec{\mathbb{L}}^2 = \mathbb{L}_\pm\mathbb{L}_\mp + \mathbb{L}_z^2 \mp \mathbb{L}_z$, obtemos:

$$\lambda_\ell = \hbar^2\ell(\ell+1) \tag{1}$$

- Seja $\hbar\bar{\ell}$ o valor mínimo de $\mathbb{L}_z$, assim: $\mathbb{L}_z|\bar{\ell}\rangle = \hbar\bar{\ell}|\bar{\ell}\rangle$ e $\mathbb{L}^2|\bar{\ell}\rangle = \lambda_{\bar{\ell}}|\bar{\ell}\rangle$. Usando que $\mathbb{L}_-|\bar{\ell}\rangle = 0$ em $\mathbb{L}^2|\ell\rangle = \lambda_{\bar{\ell}}|\bar{\ell}\rangle$, obtemos:

$$\lambda_{\bar{\ell}} = \hbar^2\bar{\ell}(\bar{\ell}-1)\ . \tag{2}$$

Comparando Eqs. 1 e 2, vemos que $\bar{\ell} = \ell + 1$ (absurdo pois valor mínimo maior que valor máximo) ou $\bar{\ell} = -\ell$.
Vamos representar os autovalores de $\mathbb{L}_z$ por $m\hbar$, com o valor de m variando de $-\ell$ até ℓ, em N passos iguais. Assim, $\ell = -\ell + N$, o que leva à $\ell = N/2$.

Cálculo de λ e μ

- Seja $\hbar\ell$ o valor máximo de $\mathbb{L}_z$, assim: $\mathbb{L}_z|\ell\rangle = \hbar\ell|\ell\rangle$ e $\vec{\mathbb{L}}^2|\ell\rangle = \lambda_\ell|\ell\rangle$. Usando que $\mathbb{L}_+|\ell\rangle = 0$ em $\vec{\mathbb{L}}^2 = \mathbb{L}_\pm\mathbb{L}_\mp + \mathbb{L}_z^2 \mp \mathbb{L}_z$, obtemos:

$$\lambda_\ell = \hbar^2\ell(\ell+1) \tag{1}$$

- Seja $\hbar\bar{\ell}$ o valor mínimo de $\mathbb{L}_z$, assim: $\mathbb{L}_z|\bar{\ell}\rangle = \hbar\bar{\ell}|\bar{\ell}\rangle$ e $\mathbb{L}^2|\bar{\ell}\rangle = \lambda_{\bar{\ell}}|\bar{\ell}\rangle$. Usando que $\mathbb{L}_-|\bar{\ell}\rangle = 0$ em $\mathbb{L}^2|\ell\rangle = \lambda_{\bar{\ell}}|\bar{\ell}\rangle$, obtemos:

$$\lambda_{\bar{\ell}} = \hbar^2\bar{\ell}(\bar{\ell}-1)\ . \tag{2}$$

Comparando Eqs. 1 e 2, vemos que $\bar{\ell} = \ell + 1$ (absurdo pois valor mínimo maior que valor máximo) ou $\bar{\ell} = -\ell$.
Vamos representar os autovalores de $\mathbb{L}_z$ por $m\hbar$, com o valor de m variando de $-\ell$ até ℓ, em N passos iguais. Assim, $\ell = -\ell + N$, o que leva à $\ell = N/2$. Portanto, ℓ de ser inteiro (N par) ou semi-inteiro (N ímpar).

Conclusão

Os autokets são caracterizado pelos valores de ℓ e m:

$$\vec{\mathbb{L}}^2|\ell, m\rangle = \hbar^2\ell(\ell+1)|\ell, m\rangle$$

e

$$\mathbb{L}_z|\ell, m\rangle = \hbar m|\ell, m\rangle$$

Conclusão

Os autokets são caracterizado pelos valores de ℓ e m:

$$\vec{\mathbb{L}}^2|\ell, m\rangle = \hbar^2\ell(\ell+1)|\ell, m\rangle$$

e

$$\mathbb{L}_z|\ell, m\rangle = \hbar m|\ell, m\rangle$$

com

$$\ell = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$$

Conclusão

Os autokets são caracterizado pelos valores de ℓ e m:

$$\vec{\mathbb{L}}^2|\ell, m\rangle = \hbar^2\ell(\ell+1)|\ell, m\rangle$$

e

$$\mathbb{L}_z|\ell, m\rangle = \hbar m|\ell, m\rangle$$

com

$$\ell = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$$

e

$$m = -\ell, -\ell+1, \ldots \ell-1, \ell$$

Para um dado valor de ℓ, existem $2\ell+1$ valores de m.

Momento Angular na Representação de Posição

- Operador momento angular: $\vec{\mathbb{L}} = \vec{\mathbb{r}} \wedge \vec{\mathbb{p}}$

Momento Angular na Representação de Posição

- Operador momento angular: $\vec{\mathbb{L}} = \vec{\mathbb{r}} \wedge \vec{\mathbb{p}}$
- Projeção no espaço de posição: $\langle \vec{r} | \vec{\mathbb{L}} | \varphi \rangle$

Momento Angular na Representação de Posição

- Operador momento angular: $\vec{\mathbb{L}} = \vec{\mathbb{r}} \wedge \vec{\mathbb{p}}$
- Projeção no espaço de posição: $\langle \vec{r} | \vec{\mathbb{L}} | \varphi \rangle$
- Assim:

Momento Angular na Representação de Posição

- Operador momento angular: $\vec{\mathbb{L}} = \vec{\mathbb{r}} \wedge \vec{\mathbb{p}}$
- Projeção no espaço de posição: $\langle \vec{r} | \vec{\mathbb{L}} | \varphi \rangle$
- Assim:

$$\langle \vec{r} | \vec{\mathbb{r}} \wedge \vec{\mathbb{p}} | \varphi \rangle = \vec{r} \wedge \langle \vec{r} | \vec{\mathbb{p}} | \varphi \rangle = \vec{r} \wedge \frac{\hbar}{\imath} \vec{\nabla} \langle \vec{r} | \varphi \rangle$$

Momento Angular na Representação de Posição

- Operador momento angular: $\vec{\mathbb{L}} = \vec{\mathbb{r}} \wedge \vec{\mathbb{p}}$
- Projeção no espaço de posição: $\langle \vec{r} | \vec{\mathbb{L}} | \varphi \rangle$
- Assim:

$$\langle \vec{r} | \vec{\mathbb{r}} \wedge \vec{\mathbb{p}} | \varphi \rangle = \vec{r} \wedge \langle \vec{r} | \vec{\mathbb{p}} | \varphi \rangle = \vec{r} \wedge \frac{\hbar}{\imath} \vec{\nabla} \langle \vec{r} | \varphi \rangle$$

- Coordenadas esféricas: $r\hat{r} \wedge \frac{\hbar}{\imath} \left(\hat{r}\partial_r + \frac{\hat{\theta}}{r}\partial_\theta + \frac{\hat{\phi}}{r \sin\theta}\partial_\phi \right) \langle \vec{r} | \varphi \rangle$

Momento Angular na Representação de Posição

- Operador momento angular: $\vec{\mathbb{L}} = \vec{\mathbb{r}} \wedge \vec{\mathbb{p}}$
- Projeção no espaço de posição: $\langle \vec{r} | \vec{\mathbb{L}} | \varphi \rangle$
- Assim:

$$\langle \vec{r} | \vec{\mathbb{r}} \wedge \vec{\mathbb{p}} | \varphi \rangle = \vec{r} \wedge \langle \vec{r} | \vec{\mathbb{p}} | \varphi \rangle = \vec{r} \wedge \frac{\hbar}{\imath} \vec{\nabla} \langle \vec{r} | \varphi \rangle$$

- Coordenadas esféricas: $r\hat{r} \wedge \frac{\hbar}{\imath} \left(\hat{r}\partial_r + \frac{\hat{\theta}}{r}\partial_\theta + \frac{\hat{\phi}}{r \sin\theta}\partial_\phi \right) \langle \vec{r} | \varphi \rangle$
- e chegamos no resultado conhecido

$$\vec{L} = \frac{\hbar}{\imath} \left(\hat{\phi}\partial_\theta - \frac{\hat{\theta}}{\sin\theta}\partial_\phi \right)$$

Momento Angular na Representação de Posição

- Operador momento angular: $\vec{\mathbb{L}} = \vec{\mathbb{r}} \wedge \vec{\mathbb{p}}$
- Projeção no espaço de posição: $\langle \vec{r} | \vec{\mathbb{L}} | \varphi \rangle$
- Assim:

$$\langle \vec{r} | \vec{\mathbb{r}} \wedge \vec{\mathbb{p}} | \varphi \rangle = \vec{r} \wedge \langle \vec{r} | \vec{\mathbb{p}} | \varphi \rangle = \vec{r} \wedge \frac{\hbar}{\imath} \vec{\nabla} \langle \vec{r} | \varphi \rangle$$

- Coordenadas esféricas: $r\hat{r} \wedge \frac{\hbar}{\imath} \left(\hat{r}\partial_r + \frac{\hat{\theta}}{r}\partial_\theta + \frac{\hat{\phi}}{r \sin\theta}\partial_\phi \right) \langle \vec{r} | \varphi \rangle$
- e chegamos no resultado conhecido

$$\vec{L} = \frac{\hbar}{\imath} \left(\hat{\phi}\partial_\theta - \frac{\hat{\theta}}{\sin\theta}\partial_\phi \right)$$

- e

$$L^2 = -\hbar^2 \left(\partial_\theta^2 - \frac{1}{\sin^2\theta} \right)$$

Coordenadas Cartesianas

- Vesores cartesianos

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &= \cos\theta\cos\phi\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\hat{y} - \sin\theta\hat{z} \\ \hat{\phi} &= -\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y}\end{aligned}$$

Coordenadas Cartesianas

- Vesores cartesianos

$$\begin{aligned}\hat{\theta} &= \cos\theta\cos\phi\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\hat{y} - \sin\theta\hat{z} \\ \hat{\phi} &= -\sin\phi\hat{x} + \cos\phi\hat{y}\end{aligned}$$

- Componentes do momento angular

$$\begin{aligned}L_x &= \frac{\hbar}{\imath}\left(-\sin\phi\partial_\theta - \cos\phi\cot\theta\partial_\phi\right) \\ L_y &= \frac{\hbar}{\imath}\left(\cos\phi\partial_\theta - \sin\phi\cot\theta\partial_\phi\right) \\ L_z &= \frac{\hbar}{\imath}\partial_\phi\end{aligned}$$

Coordenadas Cartesianas

- Operadores abaixamento e levantamento

$$L_{\pm} = \pm\hbar e^{\pm\imath\phi}\left(\partial_\theta \pm \imath \cot\theta \partial_\phi\right)$$

Coordenadas Cartesianas

- Operadores abaixamento e levantamento

$$L_{\pm} = \pm\hbar e^{\pm\imath\phi}\left(\partial_\theta \pm \imath \cot\theta \partial_\phi\right)$$

- Operador abaixa levanta

$$L_+ L_- = -\hbar^2\left(\partial_\theta^2 + \cot\theta\partial_\theta + \cot^2\theta\partial_\phi^2 + \imath\partial_\phi\right)$$

Coordenadas Cartesianas

- Operadores abaixamento e levantamento

$$L_{\pm} = \pm\hbar e^{\pm\imath\phi}\left(\partial_\theta \pm \imath \cot\theta \partial_\phi\right)$$

- Operador abaixa levanta

$$L_+ L_- = -\hbar^2\left(\partial_\theta^2 + \cot\theta\partial_\theta + \cot^2\theta\partial_\phi^2 + \imath\partial_\phi\right)$$

- Operador de Casimir

$$L^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_\phi^2\right]$$

Spin

- Mecânica Clássica:

Spin

- Mecânica Clássica:
  - extrínseco: $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$

Spin

- Mecânica Clássica:
  - extrínseco: $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$
  - intríseco: $\vec{S} = \omega \vec{I}$

Spin

- Mecânica Clássica:
  - extrínseco: $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$
  - intríseco: $\vec{S} = \omega \vec{I}$
- Mecânica Quântica: Postula-se

$$[\mathbb{S}_x, \mathbb{S}_y] = \imath\hbar\mathbb{S}_z$$

Spin

- Mecânica Clássica:
  - extrínseco: $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$
  - intríseco: $\vec{S} = \omega \vec{I}$
- Mecânica Quântica: Postula-se

$$[\mathbb{S}_x, \mathbb{S}_y] = \imath\hbar\mathbb{S}_z$$

- com

$$\begin{aligned} \vec{\mathbb{S}}^2|s,m\rangle &= \hbar^2 s(s+1)|s,m\rangle \\ \mathbb{S}_z|s,m\rangle &= \hbar m|s,m\rangle \end{aligned}$$

Spin

- Mecânica Clássica:
  - extrínseco: $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$
  - intríseco: $\vec{S} = \omega \vec{I}$
- Mecânica Quântica: Postula-se

$$[\mathbb{S}_x, \mathbb{S}_y] = \imath\hbar\mathbb{S}_z$$

- com

$$\begin{aligned} \vec{\mathbb{S}}^2|s,m\rangle &= \hbar^2 s(s+1)|s,m\rangle \\ \mathbb{S}_z|s,m\rangle &= \hbar m|s,m\rangle \end{aligned}$$

- Os operadores $\vec{\mathbb{S}}^2$, $\mathbb{S}_x$, $\mathbb{S}_y$ e $\mathbb{S}_z$ são hemiteanos (observáveis).

Spin

- Definindo $\mathbb{S}_{\pm} = \mathbb{S}_x \pm \imath \mathbb{S}_y$:

$$\mathbb{S}_{\pm}|s, m\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)}|s, m \pm 1\rangle$$

Spin

- Definindo $\mathbb{S}_\pm = \mathbb{S}_x \pm \imath \mathbb{S}_y$:

$$\mathbb{S}_\pm |s, m\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)}|s, m \pm 1\rangle$$

- Os operadores $\mathbb{S}_\pm$ não são hemiteanos.

Spin

- Definindo $\mathbb{S}_\pm = \mathbb{S}_x \pm \imath \mathbb{S}_y$:

$$\mathbb{S}_\pm |s, m\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)}|s, m \pm 1\rangle$$

- Os operadores $\mathbb{S}_\pm$ não são hemiteanos.
- Em geral, os autokets não são os esféricos harmônicos (eles não são funções de θ e ϕ) e a priori não há razão para excluir valores semi-inteiros de s e m.

Spin

- Definindo $\mathbb{S}_\pm = \mathbb{S}_x \pm \imath \mathbb{S}_y$:

$$\mathbb{S}_\pm |s, m\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)}|s, m \pm 1\rangle$$

- Os operadores $\mathbb{S}_\pm$ não são hemiteanos.
- Em geral, os autokets não são os esféricos harmônicos (eles não são funções de θ e ϕ) e a priori não há razão para excluir valores semi-inteiros de s e m.
- $s = 0, 1/2, 1, 3/2$ e $m = -s, -s+1, \ldots s-1, s$.

Spin

- Definindo $\mathbb{S}_\pm = \mathbb{S}_x \pm \imath \mathbb{S}_y$:

$$\mathbb{S}_\pm |s, m\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)}|s, m \pm 1\rangle$$

- Os operadores $\mathbb{S}_\pm$ não são hemiteanos.
- Em geral, os autokets não são os esféricos harmônicos (eles não são funções de θ e ϕ) e a priori não há razão para excluir valores semi-inteiros de s e m.
- $s = 0, 1/2, 1, 3/2$ e $m = -s, -s+1, \ldots s-1, s$.
- cada partícula elementar tem um valor específico e imutável de s, que chamamos de spin.

Spin

- cada partícula elementar tem um valor específico e imutável de s, que chamamos de spin.

partícula	spin	natureza
méson pi	s = 0	bóson
electron	s = 1/2	férmion
fóton	s = 1	bóson
delta	s = 3/2	férmion
gráviton	s = 2	bóson

- O próton, o neutron e electron têm $s = 1/2$. Prótons e neutrons não são partículas elementares, pois são formadas por quarks.

Spin 1/2

- Spin com somente dois estados: $s = 1/2$ e $m = \pm 1/2$:

Spin 1/2

- Spin com somente dois estados: $s = 1/2$ e $m = \pm 1/2$:
  - para cima $|1/2, 1/2\rangle = |\uparrow\rangle = \chi_+$ e

Spin 1/2

- Spin com somente dois estados: $s = 1/2$ e $m = \pm 1/2$:
  - para cima $|1/2, 1/2\rangle = |\uparrow\rangle = \chi_+$ e
  - para baixo $|1/2, -1/2\rangle = |\downarrow\rangle = \chi_-$

Spin 1/2

- Spin com somente dois estados: $s = 1/2$ e $m = \pm 1/2$:
  - para cima $|1/2, 1/2\rangle = |\uparrow\rangle = \chi_+$ e
  - para baixo $|1/2, -1/2\rangle = |\downarrow\rangle = \chi_-$
- Usamos os kets $\chi_\pm$ como vetores de base para expressar o estado geral de uma partícula de spin $1/2$ pelo spinor:

$$
\begin{aligned}
\chi &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\chi_+ + b\chi_- \\
\chi_+ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\chi_- &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
|a|^2 + |b|^2 &= 1
\end{aligned}
$$

Spin 1/2

- Operador de Casimir $\vec{\mathbb{S}}^2\chi_+ = (3\hbar^2/4)\chi_+$ e $\vec{\mathbb{S}}^2\chi_- = (3\hbar^2/4)\chi_-$

Spin 1/2

- Operador de Casimir $\vec{\mathbb{S}}^2\chi_+ = (3\hbar^2/4)\chi_+$ e $\vec{\mathbb{S}}^2\chi_- = (3\hbar^2/4)\chi_-$
- escrevendo

$$\vec{\mathbb{S}}^2 = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

de $\vec{\mathbb{S}}^2\chi_+ = \frac{3\hbar^2}{4}\chi_+$

$$\begin{pmatrix} c \\ e \end{pmatrix} = \frac{3\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

assim $c = 3\hbar^2/4$ e $e = 0$.

Spin 1/2

- Operador de Casimir $\vec{\mathbb{S}}^2\chi_+ = (3\hbar^2/4)\chi_+$ e $\vec{\mathbb{S}}^2\chi_- = (3\hbar^2/4)\chi_-$
- escrevendo

$$\vec{\mathbb{S}}^2 = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

de $\vec{\mathbb{S}}^2\chi_+ = \frac{3\hbar^2}{4}\chi_+$

$$\begin{pmatrix} c \\ e \end{pmatrix} = \frac{3\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

assim $c = 3\hbar^2/4$ e $e = 0$.

- Analogamente para $\vec{\mathbb{S}}^2\chi_- = 3\hbar^2/4\chi_-$, temos $d = 0$ e $f = 3\hbar^2/4$.
- Deste modo, o operador de Cassimir é escrito como:

$$\vec{\mathbb{S}}^2 = \frac{3\hbar}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Spin 1/2

- Para projeção em z: $\mathbb{S}_z\chi_+ = (\hbar/2)\chi_+$ e $\mathbb{S}_z\chi_- = -(\hbar/2)\chi_-$

Spin 1/2

- Para projeção em z: $\mathbb{S}_z\chi_+ = (\hbar/2)\chi_+$ e $\mathbb{S}_z\chi_- = -(\hbar/2)\chi_-$
- O operador projeção em z é escrito como:

$$\mathbb{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Spin 1/2

- Para projeção em z: $\mathbb{S}_z\chi_+ = (\hbar/2)\chi_+$ e $\mathbb{S}_z\chi_- = -(\hbar/2)\chi_-$
- O operador projeção em z é escrito como:

$$\mathbb{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Os operadores levanta e abaixa: $\mathbb{S}_\pm\chi_\mp = \hbar\chi_\pm$ e $\mathbb{S}_+\chi_+ = \mathbb{S}_-\chi_- = 0$

$$\mathbb{S}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbb{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Spin 1/2

- Para projeção em z: $\mathbb{S}_z\chi_+ = (\hbar/2)\chi_+$ e $\mathbb{S}_z\chi_- = -(\hbar/2)\chi_-$
- O operador projeção em z é escrito como:

$$\mathbb{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Os operadores levanta e abaixa: $\mathbb{S}_\pm\chi_\mp = \hbar\chi_\pm$ e $\mathbb{S}_+\chi_+ = \mathbb{S}_-\chi_- = 0$

$$\mathbb{S}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbb{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Assim:

$$\vec{\mathbb{S}} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$$

Spin 1/2

- Para projeção em z: $\mathbb{S}_z\chi_+ = (\hbar/2)\chi_+$ e $\mathbb{S}_z\chi_- = -(\hbar/2)\chi_-$
- O operador projeção em z é escrito como:

$$\mathbb{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Os operadores levanta e abaixa: $\mathbb{S}_\pm\chi_\mp = \hbar\chi_\pm$ e $\mathbb{S}_+\chi_+ = \mathbb{S}_-\chi_- = 0$

$$\mathbb{S}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbb{S}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Assim:

$$\vec{\mathbb{S}} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$$

com as matrizes de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\imath \\ \imath & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Spin 1/2

- E se alguém quisesse medir $\mathbb{S}_x$, quais os autovalores e autospinores ?