

03/06/17 Quinta-feira - Cálculo Numérico

Na aula passada...

$$\text{Ajuste } y = T + a \cos\left(\frac{2\pi}{12}x\right) + b \sin\left(\frac{2\pi}{12}x\right)$$

Expectativa: ajuste com funções periódicas.

Período de $\cos(x)$ é 2π
 $\sin(x)$

$\cos\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$; período é T .

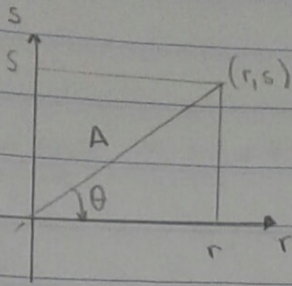
$T_{\text{mín}}$

$$y = 62,3 + 5,5 \cos\left(\frac{2\pi}{12}x\right) + 2,8 \sin\left(\frac{2\pi}{12}x\right)$$

$T_{\text{máx}}$

$$y = 77,7 + 5,1 \cos\left(\frac{2\pi}{12}x\right) + 1,4 \sin\left(\frac{2\pi}{12}x\right)$$

* Vamos interpretar os resultados, mas antes vamos rever coordenadas polares

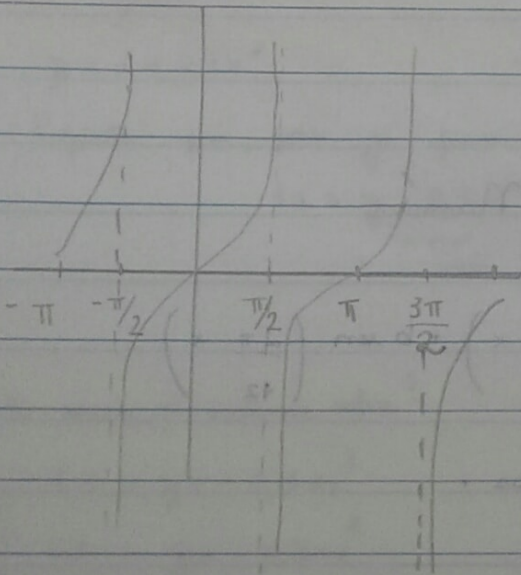


$$\begin{cases} r = A \cdot \cos \theta \\ s = A \cdot \sin \theta \end{cases} \quad \text{Otro } (r, s) \text{ de } (A, \theta) \text{ é} \\ \text{fácil.}$$

$$A = \sqrt{r^2 + s^2}$$

$(-r, -s)$

$$\theta = \arctan\left(\frac{s}{r}\right) \rightarrow 2 \text{ possibilidades dentro de um intervalo de tamanho } 2\pi.$$



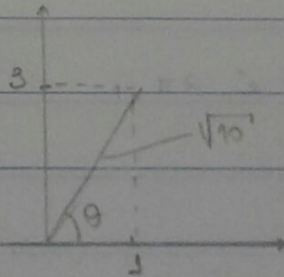
Exemplos com números

①

$$(r, s) = 1, 3$$

$$A = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

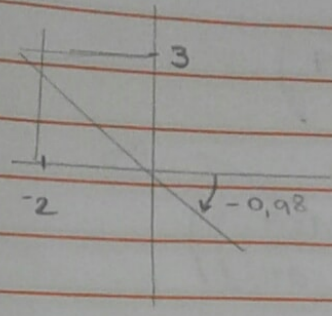
$$\arctan\left(\frac{3}{1}\right) \approx 1,25$$



2) $(r, \theta) = (-2, 3)$

$A = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

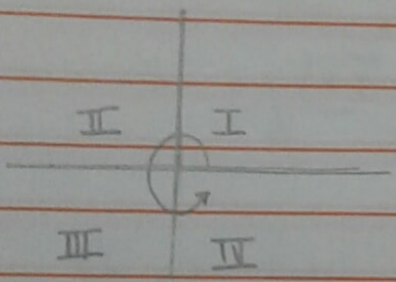
$\arctang\left(\frac{3}{-2}\right) \approx -0,98$



A calculadora devolve um ângulo entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$

$\theta = -0,98 + \pi \approx 2,12$

Ângulo: vai ser apresentado entre 0 e 2π



I) é só pegar o valor de arc tang

II) somar π ao valor da calculadora

III) somar π ao valor da calculadora

IV) somar 2π ao valor da calculadora.

-11-

Voltando

$$a \cos\left(\frac{2\pi x}{12}\right) + b \sin\left(\frac{2\pi x}{12}\right)$$

Escreva (a, b) em coordenadas polares

$$\begin{cases} a = A \cdot \cos\theta \\ b = A \cdot \sin\theta \end{cases}$$

$$A \left[\cos\theta \cos\left(\frac{2\pi x}{12}\right) + \sin\theta \sin\left(\frac{2\pi x}{12}\right) \right]$$

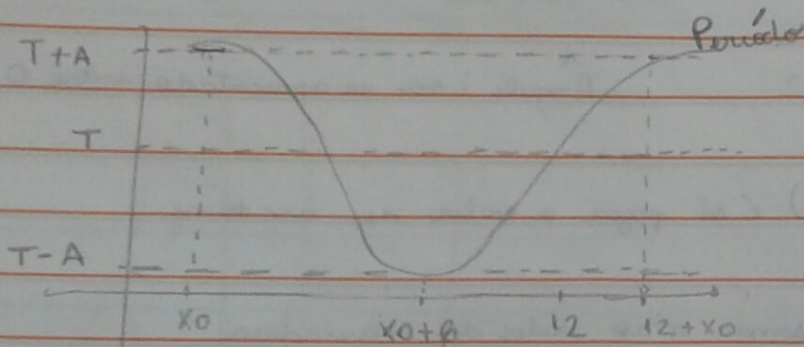
03/06/17

$$= A \cos \left(\frac{2\pi}{12} x - \theta \right)$$

$$= A \cos \left(\frac{2\pi}{12} \left(x - \frac{12\theta}{2\pi} \right) \right) \quad x_0$$

Interpretação gráfica da função
A é a semi amplitude de variação

$$T + A \cos \left(\frac{2\pi}{12} (x - x_0) \right) \text{ em } [0, 12]$$



Olhando nos valores

$$T_{\text{mín}} \quad y = 62,3 + 5,5 \cos \left(\dots \right) + 2,7 \sin \left(\dots \right)$$

$\underbrace{\quad}_{T_{\text{mín médio}}}$

$$\text{semi-amplitude: } \sqrt{5,5^2 + 2,7^2} \approx 6,1$$

$$T-A \quad 62,3 - 6,1 = 56,2$$

$$T+A \quad 62,3 + 6,1 = 68,4$$

$$\theta: \arctan \left(\frac{2,7}{5,5} \right) = 0,46$$

(1º quadrante)

$$x_0 = 12\theta \approx 0,9$$

$$\frac{2\pi}{12}$$

T máx:

$$y = f f, f + 5,1 \cos(\quad) + 1,4 \sin(\quad)$$

$$A = \sqrt{5,1^2 + 1,4^2} \cong 5,3$$

$$\theta: \arctan\left(\frac{1,4}{5,1}\right) \cong 0,27$$

(1º quadrante)

$$x_0 = \frac{12 \cdot 0,27}{2\pi} \cong 0,5 //$$

Panorama de análise harmônica

MMQ para ajustar

$$y = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{T}\right) + b_1 \sin\left(\frac{2\pi x}{T}\right)$$

$$+ a_2 \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi x}{T}\right) + b_2 \sin\left(2 \cdot \frac{2\pi x}{T}\right)$$

$$+ a_3 \cos\left(3 \cdot \frac{2\pi x}{T}\right) + b_3 \sin\left(3 \cdot \frac{2\pi x}{T}\right)$$

$$+ a_k \cos\left(k \cdot \frac{2\pi x}{T}\right) + b_k \sin\left(k \cdot \frac{2\pi x}{T}\right)$$

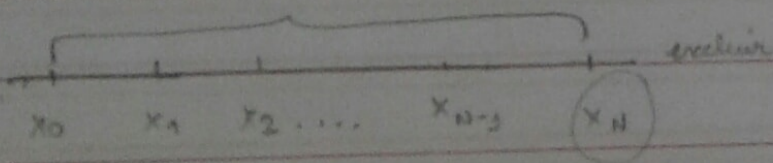
Quantas funções? $2k+1$

Não vai poder passar o número de pontos: N

Número de pontos N: parâmetro

Pontos regularmente espaçados dentro de um período T (último ponto excluído)

$$T = x_N - x_0$$



$$a_0 = \frac{\langle 1, y \rangle}{N}$$

$$a_1 = \frac{\langle \cos\left(\frac{2\pi}{12}x\right), y \rangle}{(N/2)}$$

$$b_1 = \frac{\langle \sin\left(\frac{2\pi}{12}x\right), y \rangle}{N/2}$$

⋮

$$a_j = \frac{\langle \cos\left(j \frac{2\pi}{12}x\right), y \rangle}{(N/2)}$$

$$b_j = \frac{\langle \sin\left(j \frac{2\pi}{12}x\right), y \rangle}{N/2}$$

⋮

Por exemplo: se fizermos até 2ª ordem para ajustar

T_{mín} : a_0, a_1, b_1 iguais

$$a_2 = \frac{1}{6} \langle \cos\left(2 \frac{2\pi}{12}x\right), y \rangle = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{11} y_i \cos\left(\frac{\pi}{3}x_i\right)$$

$$b_2 = \frac{1}{6} \langle \sin\left(2 \frac{2\pi}{12}x\right), y \rangle = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^{11} y_i \sin\left(\frac{\pi}{3}x_i\right)$$

Exercício: fazer as contas e por no gráfico.