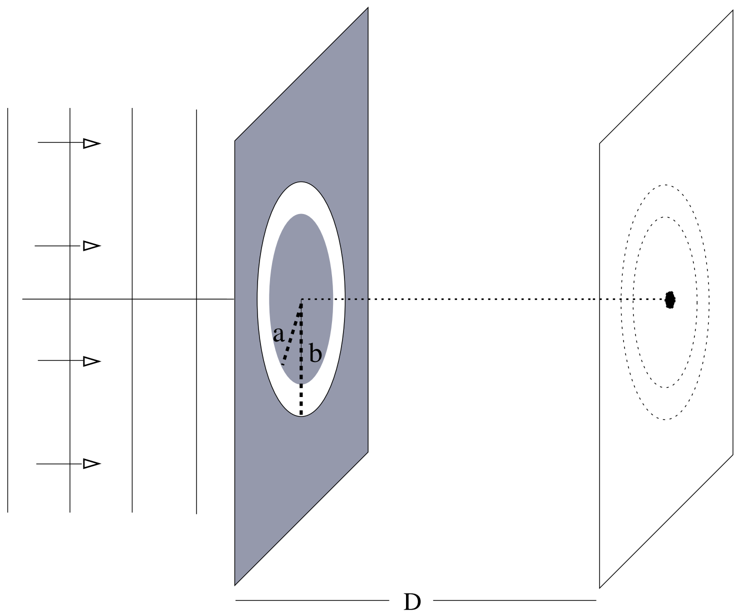
Gabarito da 2^a Prova – Eletromagnetismo II

Q1 [6.0] – Uma onda plana monocromática incide em um anteparo no qual foi recortado um anel de raio interno a e raio externo b (veja figura abaixo). A onda difratada é projetada numa tela paralela ao plano do obstáculo, a uma distância D muito grande do plano do anel ($D \gg b$).



(a) Calcule a intensidade da luz difratada que é projetada na *origem* do anteparo. **(3.0)**

Nesse problema é evidente que, devido às simetrias, devemos usar coordenadas polares: $\{r', \phi'\}$ para o plano do anteparo, e $\{r, \phi\}$ para o plano da tela. Usando a integral de difração de Fresnel-Kirchhoff no caso de *incidência normal*, e usando a simetria polar do problema (como o padrão é independente do ângulo ϕ em torno do ponto central, podemos escolher $\phi = 0$, e assim $x = r$) temos:

$$
\begin{aligned}
\psi(\vec{x}_\perp; Z_0) &\simeq \frac{-ik\psi_0}{2\pi} \frac{e^{ikZ_0}}{Z_0} \int_\sigma dS' \, e^{ik(\vec{x}'_\perp - \vec{x}_\perp)^2/2Z_0} \\
&= \frac{-ik\psi_0}{2\pi} \frac{e^{ikZ_0}}{Z_0} \int_a^b dr' r' \int_0^{2\pi} d\phi' \, e^{ik[(r'\cos\phi' - r)^2 + (r' \operatorname{sen}\phi')^2]/2Z_0} \\
&= \frac{-ik\psi_0}{2\pi} \frac{e^{ikZ_0}}{Z_0} \int_a^b dr' r' \int_0^{2\pi} d\phi' \, e^{ik[r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\phi']/2Z_0} \\
&= \frac{-ik\psi_0}{2\pi} \frac{e^{ikZ_0} \, e^{ikr^2/2Z_0}}{Z_0} \int_a^b dr' r' e^{ikr'^2/2Z_0} \int_0^{2\pi} d\phi' \, e^{-ikrr'\cos\phi'/Z_0}
\end{aligned}
$$

Agora use o formulário para ver que a integral em ϕ' resulta numa função de Bessel. Temos então:

$$
\begin{aligned}
\psi(\vec{x}_\perp; Z_0) &\simeq \frac{-ik\psi_0}{2\pi} \frac{e^{ikZ_0} \, e^{ikr^2/2Z_0}}{Z_0} \int_a^b dr' r' e^{ikr'^2/2Z_0} \, 2\pi J_0\left(\frac{krr'}{Z_0}\right) \qquad (1) \\
\Rightarrow \psi(\vec{0}; Z_0) &= -ik\psi_0 \frac{e^{ikZ_0} \, e^{ikr^2/2Z_0}}{Z_0} \int_a^b dr' r' e^{ikr'^2/2Z_0} \, ,
\end{aligned}
$$

onde na última linha usamos a propriedade (do formulário) que $J_0(0) = 1$. Essa última integral é trivial, usando que $\int dx\, x\, e^{ax^2} = (1/2) \int d(x^2)\, e^{ax^2} = (1/2a) e^{ax^2}$. Obtemos assim, após um pouquinho de álgebra:

$$\psi(\vec{x}_\perp; Z_0) \simeq \frac{\psi_0^2}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{k(b^2 - a^2)}{2Z_0} \right) \right] .$$

(b) Considere agora que $b - a = \delta \ll a$ – ou seja, um anel muito fino. Encontre a expressão para a intensidade da luz como função do raio r desde a origem da tela, considerando $r \gg a$. **(3.0)**

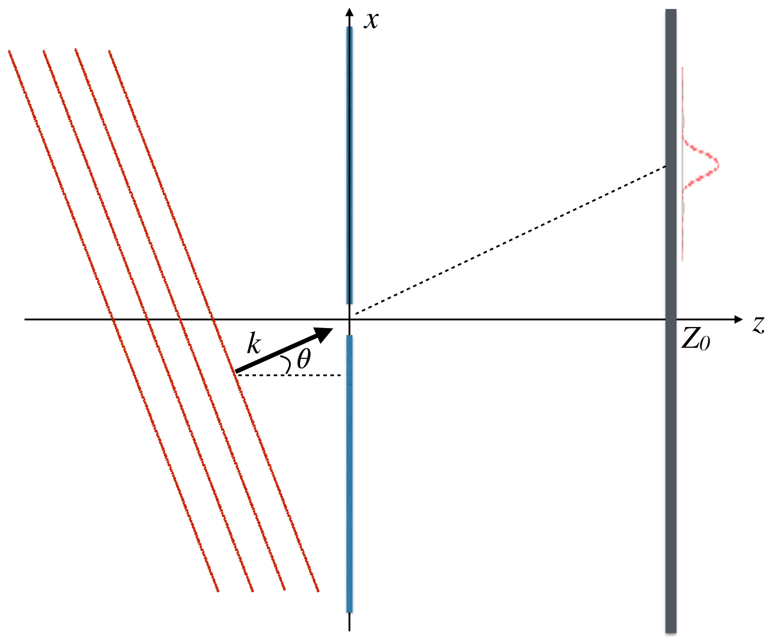
Podemos integrar a Eq. (1) acima diretamente, na aproximação de δ muito pequeno. Temos:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}_\perp; Z_0) &\simeq -ik\psi_0 \frac{e^{ikZ_0}\, e^{ikr^2/2Z_0}}{Z_0} \times \int_a^b dr' r' e^{ikr'^2/2Z_0}\, J_0\left(\frac{krr'}{Z_0} \right) \\ &\simeq -ik\psi_0 \frac{e^{ikZ_0}\, e^{ikr^2/2Z_0}}{Z_0} \times \delta \times a\, e^{ika^2/2Z_0}\, J_0\left(\frac{kra}{Z_0} \right) , \end{aligned}$$

onde usamos que $\int_x^{x+\delta x} f(x) \simeq \delta_x\, f(x)$. Portanto, a intensidade num ponto r qualquer no anteparo será:

$$I = |\psi(r)|^2 \simeq \psi_0^2 \left(\frac{k\,\delta\, a}{Z_0} \right)^2 J_0^2 \left(\frac{kra}{Z_0} \right) .$$

Q2 [4.0] – Uma onda plana monocromática incide com um ângulo θ sobre um anteparo que ocupa o plano $z = 0$ (veja a figura abaixo). Essa onda plana tem a expressão $\psi_I = \psi_0 \, e^{i(k_x x + k_z z)}$, com $k_x = k \operatorname{sen}\theta$ e $k_z = k\cos\theta$. Ao redor da origem ($x = y = 0$) há uma abertura no anteparo, de formato S_0.



Mostre que o padrão de difração projetado numa tela a uma distância Z_0 fica deslocado na direção x de uma distância $Z_0 \operatorname{sen}\theta$. Se em algum momento você achar conveniente, pode utilizar a aproximação de Fraunhofer.

Nesse problema você deve começar da integral original de Fresnel-Kirchhoff, que consta do formulário. Para encontrar as derivadas da função de Green e^{ikR}/R com respeito a $\vec{x}\,'$ é só lembrar que $R = |\vec{x}\,' - \vec{x}|$. Após alguma álgebra obtemos que:

$$\begin{aligned}
\psi(\vec{x}) &= -\frac{1}{4\pi} \int d^2S' \, \hat{z} \cdot \left\{ \psi_0 e^{i(k_x x' + k_z z')} \times \frac{\vec{R}}{R^2} \left(ik - \frac{1}{R} \right) e^{ikR} - \frac{e^{ikR}}{R} \times \psi_0 [i(k_x \hat{x} + k_z \hat{z})] e^{i(k_x x' + k_z z')} \right\} \\
&= \frac{-ik\psi_0}{4\pi} \int d^2S' \, \frac{Z_0(1 + i/kR) + R\cos\theta}{R^2} e^{i(k_x x' + kR)} \ ,
\end{aligned}$$

onde usamos o fato de que a integral é feita no anteparo, que está em $z' = 0$, e a tela onde o padrão de difração é projetado está a uma distância $z = Z_0$.

Neste momento devemos fazer uso do fato que a distância do anteparo à tela é muito grande:

$$R = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + Z_0^2} \simeq Z_0 + \frac{1}{2Z_0}[(x'-x)^2 + (y'-y)^2] + \dots \ ,$$

e obtemos:

$$\psi(\vec{x}) \simeq \frac{-ik\psi_0}{4\pi} \frac{1 + \cos\theta}{Z_0} \int d^2S' \, e^{i\{k\,x' \operatorname{sen}\theta + kZ_0 + k[(x'-x)^2 + (y'-y)^2]/2Z_0\}} \ .$$

Podemos puxar a fase ikZ_0 para fora da integral, e o que temos agora é a integral da fase:

$$\begin{aligned}
k\,x'\,\text{sen}\,\theta + k\frac{(x'-x)^2+(y'-y)^2]}{2Z_0} &= k\frac{(x'-x)^2+2\,x'\,Z_0\,\text{sen}\,\theta+(y'-y)^2]}{2Z_0} \\
&= k\frac{[x'-(x-Z_0\text{sen}\,\theta)]^2-(Z_0\text{sen}\,\theta)^2+(y'-y)^2]}{2Z_0}\,.
\end{aligned}$$

O termo $(Z_0\text{sen}\,\theta)^2$ é uma fase constante, que podemos tirar para fora da integral. Temos, então, finalmente,

$$\psi(\vec{x}) \simeq \frac{-ik\psi_0}{4\pi}\frac{1+\cos\theta}{Z_0}e^{ikZ_0(1-\text{sen}^2\theta\,/2)}\int d^2S'\,e^{ik\{[x'-(x-Z_0\,\text{sen}\,\theta)]^2+(y'-y)^2\}/2Z_0}\,.$$

Claramente, agora temos na tela o ponto “central"não mais sendo $x=0$, mas $x=Z_0\,\text{sen}\,\theta$, e de fato podemos redefinir $\tilde{x}=x-Z_0\,\text{sen}\,\theta$, e teríamos:

$$\psi(\tilde{x},y) \simeq \frac{-ik\psi_0}{4\pi}\frac{1+\cos\theta}{Z_0}e^{ikZ_0(1-\text{sen}^2\theta\,/2)}\int d^2S'\,e^{ik[(x'-\tilde{x})^2+(y'-y)^2]/2Z_0}\,.$$

Portanto, o padrão de difração é o mesmo que teríamos sob incidência direta ($\theta=0$), a menos do fato que esse padrão fica deslocado de uma distância $Z_0\,\text{sen}\theta$, e do fator constante $1+\cos\theta$. Note que, pela figura, é exatamente isso que esperaríamos.

Na aproximação de Fraunhofer o cálculo fica um pouco mais simples, pelo fato de não ser necessário completar os quadrados como feito acima.

<u>Formulário</u>

- Integral de difração de Fresnel-Kirchhoff:

$$\psi(\vec{x})=\int_{S_0}d^2S'\left[\psi_{in}(\vec{x}\,')\,\hat{n}\,'\cdot\vec{\nabla}\,'\frac{e^{ikR}}{4\pi R}-\frac{e^{ikR}}{4\pi R}\,\hat{n}\,'\cdot\vec{\nabla}\,'\psi_{in}(\vec{x}\,')\right],$$

onde $R=|\vec{x}\,'-\vec{x}|$.

- Integral de difração de Fresnel-Kirchhoff no caso de *incidência normal*:

$$\psi(\vec{x}_\perp;Z_0)\simeq\frac{-ik\psi_0}{2\pi}\frac{e^{ikZ_0}}{Z_0}\int_{S_0}dS'\,e^{ik(\vec{x}\,'_\perp-\vec{x}_\perp)^2/2Z_0}$$

- Aproximação de Fraunhofer: $|xx'+yy'|\gg x'^2+y'^2$
- Limite de Fresnel: $|xx'+yy'|\ll x'^2+y'^2$
- Funções de Bessel:

$$J_n(z)=\frac{i^n}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\phi\,e^{-in\phi}e^{-iz\cos\phi}\quad,\quad\text{e note que}\quad J_0(0)=1$$