Equações Simultâneas

Considere as equações de oferta e demanda:

oferta $$Q_t = \alpha P_t + \varepsilon_t \qquad (1)$$

demanda $$Q_t = \beta_1 P_t + \beta_2 Y_t + u_t \qquad (2)$$

este é o modelo estrutural, onde *P* e *Q* são variáveis endógenas e *Y* é uma variável exógena ou pré-determinada.

De (1) obtém-se:

$$P_t = \frac{Q_t - \varepsilon_t}{\alpha}$$

Substituindo P_t em (2) resulta em,

$$Q_t = \frac{\alpha\beta_2}{\alpha - \beta_1} Y_t + \frac{\alpha u_t - \beta_1 \varepsilon_t}{\alpha - \beta_1} = \pi_{11} Y_t + v_{1t} \qquad (3)$$

$$P_t = \frac{\beta_2}{\alpha - \beta_1} Y_t + \frac{u_t - \varepsilon_t}{\alpha - \beta_1} = \pi_{12} Y_t + v_{2t} \qquad (4)$$

As equações (3) e (4) são equações na forma reduzida.

Se estimarmos o parâmetro α da equação (1) por mínimos quadrados, obteremos:

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum P_t Q_t}{\sum P_t^2} = \alpha + \frac{\sum P_t \varepsilon_t}{\sum P_t^2}$$

como P é função de ε (ver eq. 4), o último termo acima não será 0, nem tenderá a 0 quando a amostra aumentar e, portanto, MQO produzirá estimador tendencioso e inconsistente.

Como estimar os parâmetros?

1) Método da variável instrumental

$$\hat{\alpha}^* = \frac{\sum Y_t Q_t}{\sum P_t Y_t}$$

$$\hat{\alpha}^* = \frac{\sum Y_t Q_t}{\sum P_t Y_t} = \frac{\sum Y_t (\alpha P_t + \varepsilon_t)}{\sum P_t Y_t} = \alpha + \frac{\sum Y_t \varepsilon_t}{\sum P_t Y_t}$$

2) Mínimos Quadrados Indiretos

$$\hat{\pi}_{11} = \frac{\sum Q_t Y_t}{\sum Y_t^{\,2}} = \frac{\alpha\beta_2}{\alpha - \beta_1}$$

$$\hat{\pi}_{12} = \frac{\sum P_t Y_t}{\sum Y_t^{\,2}} = \frac{\beta_2}{\alpha - \beta_1}$$

Portanto:

$$\hat{\alpha}^{**} = \frac{\hat{\pi}_{11}}{\hat{\pi}_{12}}$$

$$\hat{\alpha}^{**} = \frac{\hat{\pi}_{11}}{\hat{\pi}_{12}} = \frac{\dfrac{\sum Q_t Y_t}{\sum Y_t^{\,2}}}{\dfrac{\sum P_t Y_t}{\sum Y_t^{\,2}}} = \frac{\sum Q_t Y_t}{\sum P_t Y_t}$$

3) Mínimos Quadrados em Dois Estágios

$$\hat{P}_t = \hat{\pi}_{12} Y_t$$

$$\hat{\alpha}^{***} = \frac{\sum Q_t \hat{P}_t}{\sum \hat{P}_t^{\,2}}$$

$$\hat{\alpha}^{***} = \frac{\sum Q_t \hat{P}_t}{\sum \hat{P}_t^{\,2}} = \frac{\hat{\pi}_{12} \sum Q_t Y_t}{\hat{\pi}_{12}^{\,2} \sum Y_t^{\,2}} = \frac{\sum Q_t Y_t}{\hat{\pi}_{12} \sum Y_t^{\,2}} = \frac{\sum Q_t Y_t}{\frac{\sum P_t Y_t}{\sum Y_t^2} \sum Y_t^2} = \frac{\sum Q_t Y_t}{\sum P_t Y_t}$$

os três métodos coincidem neste caso porque o sistema é exatamente identificado.

Considerando agora o sistema de oferta e demanda, incluindo uma variável exógena *W* (riqueza) na demanda, teríamos:

$$Q_t = \alpha P_t + \varepsilon_t$$

$$Q_t = \beta_1 P_t + \beta_2 Y_t + \beta_3 W_t + u_t$$

Na forma reduzida:

$$Q_t = \frac{\alpha\beta_2}{\alpha - \beta_1} Y_t + \frac{\alpha\beta_3}{\alpha - \beta_1} W_t + \frac{\alpha u_t - \beta_1 \varepsilon_t}{\alpha - \beta_1} = \pi_{11} Y_t + \pi_{21} W_t + v_{1t}$$

$$P_t = \frac{\beta_2}{\alpha - \beta_1} Y_t + \frac{\beta_3}{\alpha - \beta_1} W_t + \frac{u_t - \varepsilon_t}{\alpha - \beta_1} = \pi_{12} Y_t + \pi_{22} W_t + v_{2t}$$

Neste caso, para estimar α teríamos duas escolhas.

$$\frac{\hat{\pi}_{11}}{\hat{\pi}_{12}} \quad \text{e} \quad \frac{\hat{\pi}_{21}}{\hat{\pi}_{22}}$$

Modelo Geral

Considere:

T observações

M variáveis endógenas y

K variáveis pré-determinadas ou exógenas x

M erros u

A forma estrutural do modelo é:

$$y_1\gamma_{11} + y_2\gamma_{21} + \ldots + y_M\gamma_{M1} + x_1\beta_{11} + x_2\beta_{21} + \ldots + x_K\beta_{K1} + u_1 = 0$$

$$y_1\gamma_{12} + y_2\gamma_{22} + \ldots + y_M\gamma_{M2} + x_1\beta_{12} + x_2\beta_{22} + \ldots + x_K\beta_{K2} + u_2 = 0$$

$$\vdots$$

$$y_1\gamma_{1M} + y_2\gamma_{2M} + \ldots + y_M\gamma_{MM} + x_1\beta_{1M} + x_2\beta_{2M} + \ldots + x_K\beta_{KM} + u_M = 0$$

onde γ's e β's são parâmetros estruturais do sistema.

Pressuposições:

$$E(u_i) = 0 \qquad \text{para } i = 1, ..., M$$

$$E(u_i u_i') = \sigma_{ii} I_T \qquad i = 1,...,M$$

$$E(u_i u_j') = \sigma_{ij} I_T \qquad \text{para} \quad i \neq j$$

$$E(uu') = E\left[\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_M \end{bmatrix}'\right] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} I & \sigma_{12} I & \cdots & \sigma_{1M} I \\ \sigma_{21} I & \sigma_{22} I & \cdots & \sigma_{2M} I \\ \vdots & & & \\ \sigma_{M1} & \sigma_{M2} I & \cdots & \sigma_{MM} I \end{bmatrix} = \Sigma \otimes I_T$$

Escrevendo na forma de matrizes

$$Y\Gamma + X\mathrm{B} + U = 0$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1M} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2M} \\ \cdots & & & \\ y_{T1} & y_{T2} & \cdots & y_{TM} \end{bmatrix}_{(T\times M)} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_M \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1K} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2K} \\ \cdots & & & \\ x_{T1} & x_{T2} & \cdots & x_{TK} \end{bmatrix}_{(T\times K)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_K \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1M} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2M} \\ \cdots & & & \\ u_{T1} & u_{T2} & \cdots & u_{TM} \end{bmatrix}_{(T \times M)} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \ldots & u_M \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1M} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2M} \\ \cdots & & & \\ \beta_{K1} & \beta_{K2} & \cdots & \beta_{KM} \end{bmatrix}_{(K \times M)} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \ldots & B_M \end{bmatrix}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1M} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2M} \\ \cdots & & & \\ \gamma_{M1} & \gamma_{M2} & \cdots & \gamma_{MM} \end{bmatrix}_{(M \times M)} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & \Gamma_2 & \ldots & \Gamma_M \end{bmatrix}$$

Se Γ é uma matriz $M \times M$ não singular, o sistema é completo e,

$$Y\Gamma + X\mathrm{B} + U = 0$$

$$Y\Gamma\Gamma^{-1} + X\mathrm{B}\Gamma^{-1} + U\Gamma^{-1} = 0$$

$$Y + X\mathrm{B}\Gamma^{-1} + U\Gamma^{-1} = 0$$

$$Y = -X\mathrm{B}\Gamma^{-1} - U\Gamma^{-1}$$

$$Y = X\Pi + V$$

onde

$$\Pi = -\mathrm{B}\Gamma^{-1} = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \cdots & \Pi_{1M} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \cdots & \Pi_{2M} \\ \cdots & & & \\ \Pi_{K1} & \Pi_{K2} & \cdots & \Pi_{KM} \end{bmatrix}_{(K \times M)} = \begin{pmatrix} \Pi_1 & \Pi_2 & \cdots & \Pi_M \end{pmatrix}$$

$$V = -U\Gamma^{-1} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & \cdots & V_{1M} \\ V_{21} & V_{22} & \cdots & V_{2M} \\ \cdots & & & \\ V_{T1} & V_{T2} & \cdots & V_{TM} \end{bmatrix}_{(T \times M)} = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & \cdots & V_M \end{pmatrix}$$

Exemplo: Considere o modelo de oferta e demanda.

$$Q_t = \alpha_2 P_t + \varepsilon_t \quad \rightarrow \quad Q_t - \alpha_2 P_t - \varepsilon_t = 0$$
$$Q_t = \beta_2 P_t + \beta_3 y_t + u_t \quad \rightarrow \quad Q_t - \beta_2 P_t - \beta_3 y_t - u_t = 0$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Q_t & P_t \end{bmatrix}}_{Y} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\alpha_2 & -\beta_2 \end{bmatrix}}_{\Gamma} + \underbrace{\begin{bmatrix} y_t \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\beta_3 \end{bmatrix}}_{\mathrm{B}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\varepsilon_t & -u_t \end{bmatrix}}_{U}$$

$$\begin{bmatrix} Q_t & P_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\beta_3 y_t \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{-\beta_2}{\alpha_2 - \beta_2} & \dfrac{-1}{\alpha_2 - \beta_2} \\ \dfrac{\alpha_2}{\alpha_2 - \beta_2} & \dfrac{1}{\alpha_2 - \beta_2} \end{bmatrix}}_{\Gamma^{-1}} + \begin{bmatrix} -\varepsilon_t & -u_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{-\beta_2}{\alpha_2 - \beta_2} & \dfrac{-1}{\alpha_2 - \beta_2} \\ \dfrac{\alpha_2}{\alpha_2 - \beta_2} & \dfrac{1}{\alpha_2 - \beta_2} \end{bmatrix}$$

Forma reduzida:

$$\begin{bmatrix} Q_t & P_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha_2\beta_3}{\alpha_2-\beta_2} y_t & \dfrac{\beta_3}{\alpha_2-\beta_2} y_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{-\beta_2\varepsilon_t+\alpha_2 u_t}{\alpha_2-\beta_2} & \dfrac{-\varepsilon_t+u_t}{\alpha_2-\beta_2} \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Q_t & P_t \end{bmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{\alpha_2\beta_3}{\alpha_2-\beta_2} & \dfrac{\beta_3}{\alpha_2-\beta_2} \end{bmatrix}}_{\Pi} \underbrace{y_t}_{X} + \underbrace{\begin{bmatrix} \dfrac{-\beta_2\varepsilon_t+\alpha_2 u_t}{\alpha_2-\beta_2} & \dfrac{-\varepsilon_t+u_t}{\alpha_2-\beta_2} \end{bmatrix}}_{V}$$

$$Q_t = \frac{\alpha_2\beta_3}{\alpha_2-\beta_2} y_t + \frac{\alpha_2 u_t - \beta_2\varepsilon_t}{\alpha_2-\beta_2} = \pi_{11} y_t + v_{1t}$$

$$P_t = \frac{\beta_3}{\alpha_2-\beta_2} y_t + \frac{u_t - \varepsilon_t}{\alpha_2-\beta_2} = \pi_{12} y_t + v_{2t}$$

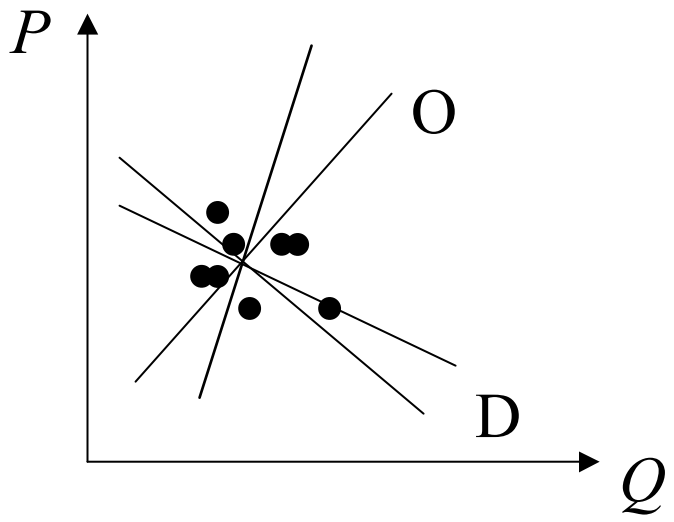
Condições para Identificação dos Parâmetros:

Dizemos que uma equação é não identificada se não for possível estimar todos os parâmetros estruturais a partir da forma reduzida. Uma equação é identificada se for possível obter os parâmetros a partir da forma reduzida. Ela será exatamente identificada se somente um valor do parâmetro existir e superidentificada se mais de um valor é obtido para alguns parâmetros.

Considere o modelo de oferta e demanda sem variáveis pré-determinadas.

$$Q_t = \alpha_1 + \alpha_2 P_t + \varepsilon_t$$
$$Q_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + \mu_t$$

O único dado disponível ao econometrista é um preço e uma quantidade de equilíbrio a cada período de tempo. Os erros nas equações mostram que os valores de P e Q não serão idênticos, mas serão próximos ao ponto de equilíbrio determinado pelas equações. Neste caso, as equações de oferta e demanda não são identificadas.

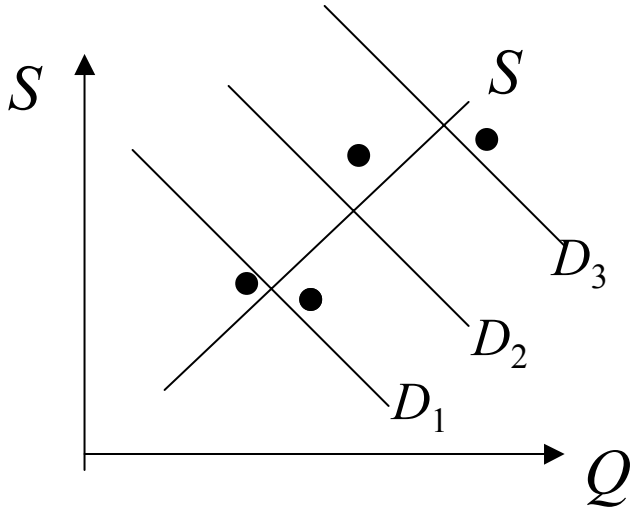


Considere, agora, o modelo.

oferta $$Q_t = \alpha_1 + \alpha_2 P_t + \varepsilon_t$$

demanda $$Q_t = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 Y_t + \mu_t$$

Se $\beta_3 \neq 0$ e a renda (Y) varia com o tempo, então a cada período de tempo t, teríamos o deslocamento da demanda causado pela renda. O movimento de Y ao longo do tempo faz com que a oferta se torne identificada. Já a demanda é não identificada.



1) Condição de Ordem (condição necessária)

Seja *M* o número de variáveis endógenas no sistema e *J* o número de restrições por equação, então:

$$M - 1 \leq J$$

Se *J* > *M - 1* a equação será super identificada e

Se *J* = *M - 1* a equação será exatamente identificada

2) Condição de *rank* ou posto (condição necessária e suficiente)

$$\text{rank}\left(R \begin{bmatrix} \Gamma \\ \text{B} \end{bmatrix} \right) = M - 1$$

onde R é a matriz de restrição da equação analisada.

R é uma matriz de ordem $\left[J \times \left(M + K \right) \right]$

Exemplo:

$$Y_1 + Y_2\gamma_{21} + X_1\beta_{11} \qquad = u_1$$

$$Y_1\gamma_{12} + Y_2 + \qquad X_2\beta_{22} \qquad = u_2$$

Na primeira equação:

Condição de ordem:

$M-1 = 2-1 = 1 \leq J = 1$

Condição de rank:

$$\begin{bmatrix} \Gamma \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & 1 \\ \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix}$$

Na equação 1, $R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Portanto,

$$R\begin{bmatrix} \Gamma \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \beta_{22} \end{bmatrix}$$

cujo rank é 1.

Estimador de Mínimos Quadrados em Dois Estágios

Escrevendo a equação *i*,

$$Y\Gamma_i + X\mathrm{B}_i + u_i = 0 \qquad\qquad i = 1,\ldots,M$$

ou

$$y_i = Y_i\gamma_i + Y_i^*\gamma_i^* + X_i\beta_i + X_i^*\beta_i^* + u_i$$

$$= Y_i\gamma_i + X_i\beta_i + u_i$$

$$= \begin{pmatrix} Y_i & X_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_i \\ \beta_i \end{pmatrix} + u_i$$

$$y_i = Z_i \delta_i + u_i \qquad\qquad Z_i = \begin{bmatrix} Y_i & X_i \end{bmatrix}$$

onde

Y_i^* são as M_i^* variáveis endógenas que aparecem na i-ésima equação com coeficiente zero, e

X_i^* são as K_i^* variáveis exógenas que aparecem na i-ésima equação com coeficiente zero.

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} -1 \\ \gamma_i \\ \gamma_i^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \gamma_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{B}_i = \begin{bmatrix} \beta_i \\ \beta_i^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_i & Y_i & Y_i^* \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} X_i & X_i^* \end{bmatrix} \qquad Z_i = \begin{bmatrix} Y_i & X_i \end{bmatrix}$$

$$M = M_i + M_i^* \qquad K = K_i + K_i^* \qquad \delta_i = \begin{bmatrix} \gamma_i \\ \beta_i \end{bmatrix}$$

y_i é $(T \times 1)$ $\qquad$ X_i é $(T \times K_i)$ $\qquad$ u_i é $(T \times 1)$

Y_i é $[T \times (M_i - 1)]$ $\qquad$ β_i é $(K_i \times 1)$

γ_i é $[(M_i - 1) \times 1]$

O estimador de δ_i é obtido pré-multiplicando-se o modelo

$y_i = Z_i \delta_i + u_i$ $\qquad$ pela matriz idempotente $X(X'X)^{-1}X'$

$$X(X'X)^{-1}X'y_i = X(X'X)^{-1}X'Z_i\delta_i + X(X'X)^{-1}X'u_i$$

Por mínimos quadrados ordinários, obtém-se

$$\hat{\delta}_i = \left[\left(X(X'X)^{-1}X'Z_i\right)'\left(X(X'X)^{-1}X'Z_i\right)\right]^{-1}\left(X(X'X)^{-1}X'Z_i\right)'X(X'X)^{-1}X'y_i$$

$$= \left[\left(Z_i'X(X'X)^{-1}X'\right)\left(X(X'X)^{-1}X'Z_i\right)\right]^{-1}\left(Z_i'X(X'X)^{-1}X'\right)X(X'X)^{-1}X'y_i$$

ou

$$\hat{\delta}_i = \left[Z_i'X(X'X)^{-1}X'Z_i\right]^{-1}Z_i'X(X'X)^{-1}X'y_i$$

A dimensão da matriz $\left[Z_i'X(X'X)^{-1}X'Z_i\right]$ é

$$\left(M_i - 1 + K_i \times M_i - 1 + K_i\right)$$

Para que tenha inversa, seu rank deve ser $\left(M_i - 1 + K_i\right)$.

Como o rank de $Z_i' X \leq \min\{\text{rank } Z_i, \text{rank } X\}$

e o rank de X é K, então

$$K \geq M_i - 1 + K_i \text{ ou } K_i^* \geq M_i - 1 \text{ ou } K_i^* + M_i^* \geq M - 1 \text{ ou } J \geq M - 1$$

e a equação pode ser super identificada ou perfeitamente identificada.

$$K = M_i - 1 + K_i \text{ ou } K_i^* + M_i^* = M - 1 \text{ ou } J = M - 1$$

Observe que se $X'Z_i$ é uma matriz quadrada, ou seja, a equação é exatamente identificada, então podemos escrever:

$$\hat{\delta}_i = (X'Z_i)^{-1} X'X(Z_i'X)^{-1} Z_i'X(X'X)^{-1} X'y_i = (X'Z_i)^{-1} X'y_i$$

que é o estimador de mínimos quadrados indiretos e de variável instrumental.

Para derivar o estimador de mínimos quadrados em dois estágios, considere:

$$\hat{\delta}_i = \left[Z_i' X(X'X)^{-1} X' Z_i\right]^{-1} Z_i' X(X'X)^{-1} X' y_i$$

$$\hat{\delta}_i = \left[\begin{pmatrix} Y_i & X_i \end{pmatrix}' X(X'X)^{-1} X' \begin{pmatrix} Y_i & X_i \end{pmatrix}\right]^{-1} \begin{pmatrix} Y_i & X_i \end{pmatrix}' X(X'X)^{-1} X' y_i$$

$$= \begin{bmatrix} Y_i' X(X'X)^{-1} X' Y_i & Y_i' X(X'X)^{-1} X' X_i \\ X_i' X(X'X)^{-1} X' Y_i & X_i' X(X'X)^{-1} X' X_i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_i' X(X'X)^{-1} X' y_i \\ X_i' X(X'X)^{-1} X' y_i \end{bmatrix}$$

Considerando a forma reduzida:

$$Y = X\Pi + V$$

ou

$$\begin{bmatrix} y_i & Y_i & Y_i^* \end{bmatrix} = X \begin{bmatrix} \pi_i & \Pi_i & \Pi_i^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_i & V_i & V_i^* \end{bmatrix}$$

Por mínimos quadrados ordinários:

$$\hat{\Pi}_i = (X'X)^{-1} X'Y_i$$

Portanto

$$X(X'X)^{-1} X'Y_i = X\hat{\Pi}_i = \hat{Y}_i$$

$$\hat{\delta}_i = \begin{bmatrix} Y_i'X(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}X'Y_i & Y_i'X(X'X)^{-1}X'X_i \\ X_i'X(X'X)^{-1}X'Y_i & X_i'X(X'X)^{-1}X'X_i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_i'X(X'X)^{-1}X'y_i \\ X_i'X(X'X)^{-1}X'y_i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{Y}_i'\hat{Y}_i & \hat{Y}_i'X_i \\ X_i'\hat{Y}_i & X_i'X_i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{Y}'_i y_i \\ X_i'y_i \end{bmatrix}$$

Se

$$\hat{Z}_i = \begin{bmatrix} \hat{Y}_i & X_i \end{bmatrix}$$

então

$$\hat{\delta}_i = (\hat{Z}_i'\hat{Z}_i)^{-1} \hat{Z}_i' y_i$$

Assim sendo, o estimador de mínimos quadrados em dois estágios é desenvolvido da seguinte maneira:

1) Estimam-se os parâmetros Π_i na forma reduzida utilizando-se

$$\hat{\Pi}_i = (X'X)^{-1} X'Y_i$$

e utiliza-se as estimativas para obter $\hat{Y}_i$, onde

$$\hat{Y}_i = X(X'X)^{-1} X'Y_i = X\hat{\Pi}_i$$

2) Utilizando-se o modelo

$$y_i = \begin{bmatrix} \hat{Y}_i & X_i \end{bmatrix} \delta_i + \bar{u}_i$$

aplica-se mínimos quadrados ordinários para obter as estimativas dos parâmetros estruturais δ_i

Teste de Endogeneidade. Spencer e Berk (1981) Econometrica

Considere o modelo:

Oferta: $Q_t = \alpha P_t + \varepsilon_t$

Demanda: $Q_t = \beta_1 P_t + \beta_2 Y_t + \beta_3 W_t + u_t$

Na forma reduzida:

$$Q_t = \pi_{11} Y_t + \pi_{21} W_t + v_{1t}$$
$$P_t = \pi_{12} Y_t + \pi_{22} W_t + v_{2t}$$

Na equação de oferta: H_0: P_t e ε_t não são correlacionados

Calcula-se $\hat{P}_t = \hat{\pi}_{12} Y_t + \hat{\pi}_{22} W_t$

Estima-se a regressão:

$$Q_t = \delta P_t + \gamma \hat{P}_t + \varepsilon_t$$

Utiliza-se o teste t para testar $\gamma = 0$. Sob H_0 γ será zero e portanto P_t e ε_t serão não correlacionados.

Mínimos Quadrados em Três Estágios

Ao se utilizar MQ2E, cada equação é estimada separadamente. Para estimar o sistema como um todo utiliza-se **MQ3E**. Assim, utilizamos informações sobre todas as variáveis endógenas e correlações contemporâneas.

$$
\begin{aligned}
y_1 &= Z_1\delta_1 + u_1 \\
y_2 &= Z_2\delta_2 + u_2 \\
&\vdots \\
y_M &= Z_M\delta_M + u_M
\end{aligned}
$$

$$
E(uu') = E\left[\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_M \end{bmatrix}'\right] = \begin{bmatrix} \sigma_{11}I & \sigma_{12}I & \cdots & \sigma_{1M}I \\ \sigma_{21}I & \sigma_{22}I & \cdots & \sigma_{2M}I \\ \vdots & & & \\ \sigma_{M1} & \sigma_{M2}I & \cdots & \sigma_{MM}I \end{bmatrix} = \Sigma \otimes I_T
$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 & & & 0 \\ & Z_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & Z_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_M \end{bmatrix}$$

$$\hat{\delta}_{3E} = \left[Z' \left(\Sigma^{-1} \otimes X(X'X)^{-1} X' \right) Z \right]^{-1} Z' \left(\Sigma^{-1} \otimes X(X'X)^{-1} X' \right) y$$

Estima-se cada equação por MQ2E obtendo-se as estimativas de δ e de u. Com as estimativas de u estima-se a matriz Σ e aplica-se a fórmula de MQ3E.

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{\left(y_i - Z_i \hat{\delta}_i \right)' \left(y_j - Z_j \hat{\delta}_j \right)}{T}$$

Modelos Recursivos ou Sistemas Triangulares.

$$Y\Gamma + X\mathrm{B} + u = 0 \qquad \text{onde } \Gamma \text{ é triangular}$$

Exemplo: Modelo Teia de Aranha.

Oferta: $$Q_t = \alpha_1 + \alpha_2 P_{t-1} + \varepsilon_t$$

Demanda: $$P_t = \beta_1 + \beta_2 Q_t + \beta_3 W_t + \mu_t$$

$$\mathrm{cov}(\varepsilon_t, \mu_t) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \Sigma \text{ é diagonal}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\beta_1 \\ -\alpha_2 & 0 \\ 0 & -\beta_3 \end{bmatrix}$$

Apesar de o sistema parecer simultâneo, ele é recursivo. Dado $P_{t\text{-}1}$ pode-se obter Q_t por MQO. Conhecendo-se Q_t obtém-se P_t na demanda.

MQO é apropriado para a primeira equação porque $P_{t\text{-}1}$ é uma variável pré-determinada e portanto não correlacionada com ε_t .

MQO também é apropriado para a segunda equação porque Q_t não é correlacionado com μ_t, uma vez que o único erro afetando Q_t é ε_t e ε_t não é correlacionado com μ_t.