Eletromagnetismo II

Prof. Dr. R.M.O Galvão - 1° Semestre 2015

Preparo: Diego Oliveira

Aula 3

Equação da Onda e Meios Condutores

Vamos considerar a equação de onda para casos em que existam correntes de condução num meio condutor mas não exista uma densidade de cargas livres. A razão para supor a não existência dessas cargas é que, caso elas sejam colocadas no condutor, vão rapidamente se deslocar para sua superfície (veja Eq. 9.1.20 do livro texto).

Se σ for a condutividade do meio, a densidade de corrente que parece devido ao campo elétrico da onda é dada por

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

e as equações de Maxwell ficam

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{B} = -\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu\sigma\vec{E} + \mu\epsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Tomando o rotacional da lei de Faraday e substituindo $\nabla \times \vec{B}$ da lei de Ampère, obtemos

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\mu\sigma\vec{E} + \mu\epsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right]$$

portanto a equação de onda para $\vec{E}$ fica

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\sigma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\epsilon\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Também podemos encontrar para $\vec{B}$

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

O novo termo que aparece nessas equações, com a primeira derivada temporal do campo, é um termo dissipativo e dará origem ao amortecimento da onda ao se propagar pelo meio. Para entender o porquê desse efeito, suponhamos que tentemos uma solução particular dessas equações considerando um campo elétrico homogêneo, ou seja, que não dependa das coordenadas espaciais, $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(t)$. Então a equação de onda para $\vec{E}$ fica

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu\sigma \vec{E} + \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = 0 \qquad\qquad \therefore \vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{-t/\tau}$$

onde o tempo característico de decaimento do campo inicial $\vec{E}_0$ é $\boxed{\tau = \epsilon/\sigma}$. Este é o tempo com o qual qualquer campo elétrico constante aplicado ao material decai aproximadamente 36% de seu valor inicial. Este decaimento ocorre porque as cargas induzidas no meio se deslocam de forma a anular o campo externo.

Com o termo dissipativo, a solução da equação de onda fica um pouco mais complexa e, mesmo em uma dimensão, sua solução não é dada pela forma simples $\vec{E}(z, t) = \vec{f}(z - vt) + \vec{g}(z + vt)$, como visto em Eletromagnetismo I.

Exercício: Mostre que $A(z, t) = f(z - vt)$, onde f é uma função arbitrária, não é solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \mu\sigma \frac{\partial A}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$$

Vamos, no entanto, verificar se a solução de ondas monocromáticas ainda se aplica. Se isto for o caso, podemos sempre determinar uma solução geral através da composição de Fourier. Tomando a equação de onda para $\vec{E}$

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

consideremos o seguinte "ansatz" para a solução

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} = \vec{E}_0 e^{i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}, \qquad \vec{E}_0 \text{ constante,}$$

onde o vetor $\vec{k}$ é dado por $\vec{k} = k_x\hat{e}_x + k_y\hat{e}_y + k_z\hat{e}_z$. Então

$$\nabla^2\vec{E} = \vec{E}_0\left(\nabla^2 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right) = -\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)\vec{E}_{)}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

ou

$$\nabla^2\vec{E} = -k^2\vec{E}$$

Por outro lado, é fácil verificar que

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -i\omega\vec{E}; \qquad \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2\vec{E}$$

Usando esses resultados, a equação de onda fica

$$\left(k^2 - i\omega\mu\sigma - \mu\epsilon\omega^2\right)\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = 0$$

e a solução é dada pela relação de dispersão.

$$\boxed{k^2 = \mu\epsilon\omega^2\left[1 + i\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right]}$$

ou seja, a constante de propagação e o índice de refração do meio ($n = c/v = ck/\omega$) ficam complexos! Determinando explicitamente as partes real e imaginária de k, ou seja, escrevendo

$$\vec{k} = k\hat{k}; \qquad k = \alpha + i\beta$$

temos

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = \vec{E}_0 e^{-\beta\hat{k}\cdot\vec{r}}\, e^{i(\alpha\hat{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

Este resultado mostra que a parte real de k (α) vai determinar a velocidade de fase da onda, como, no caso sem amortecimento. Por outro lado, sua parte imaginária vai produzir um amortecimento espacial da onda na direção de propagação, a partir do ponto em que ela penetra no material. Vamos agora determinar as expressões explicitas para α e β.

$$k = \alpha + i\beta \qquad \Rightarrow \qquad k^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = \mu\epsilon\omega^2\left[1 + i\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right]$$

$$
\begin{cases}
\alpha^2 - \beta^2 = \mu\epsilon\omega^2 \\
\\
2\alpha\beta = \omega\mu\sigma \qquad\qquad\qquad \therefore \;\; \beta = \dfrac{\omega\mu\sigma}{2\alpha}
\end{cases}
$$

Substituindo este resultado na primeira equação, obtemos

$$
4\alpha^4 - 4\mu\epsilon\omega^2\alpha^2 - \omega^2\mu^2\sigma^2 = 0 \qquad \therefore \quad \alpha^2 = \frac{1}{8}\left[4\mu\epsilon\omega^2 \pm \sqrt{16\mu^2\epsilon^2\omega^4 + 16\omega^2\mu^2\sigma^2}\right]
$$

ou

$$
\alpha^2 = \frac{1}{2}\mu\epsilon\omega^2\left[1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}\right]
$$

Antes de prosseguir, é bom investigar as duas raízes possíveis para verificar se ambas têm sentido físico. No limite $\sigma \to 0$, ou seja, meio dielétrico perfeito, temos que obter o resultado já conhecido, $\beta \to 0$ e $\alpha^2 \to k^2 = \omega^2/v^2 = \omega^2\mu\epsilon$. Somente a solução com o sinal positivo satisfaz esta condição e, portanto,

$$
\boxed{\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)}\right]^{1/2}}
$$

e, da mesma forma

$$
\boxed{\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}2\left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}\right]^{1/2}}
$$

e a solução para o campo elétrico fica

$$
\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{-\beta\xi} e^{i(\alpha\xi - \omega t)}
$$

onde $\xi = \hat{k}\cdot\vec{r}$.

Como a equação de onda para $\vec{B}$ é a mesma que para $\vec{E}$, a solução de onda monocromática é da mesma forma. No entanto, no caso de meios condutores, é necessário tomar cuidado, porque a condutividade introduz uma defasagem $\vec{E}$ e $\vec{B}$! Para determinar esta defasagem, retornemos à lei de Faraday

$$
\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \therefore \nabla\times\left[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}\right] = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}\right]
$$

Mas

$$\begin{aligned}
\nabla\times\left[\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right] &= e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\underbrace{\nabla\times\vec{E}_0}_{=0}-\vec{E}_0\times\left[\nabla e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right]\\
&= = i\vec{E}_0\times\vec{k}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} = i\vec{k}\times\vec{E}
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}\right] = -i\omega\vec{B}$$

Assim a lei de Faraday fica

$$i\vec{k}\times\vec{E} = i\omega\vec{B} \qquad \therefore \vec{B} = \frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{E} = \frac{k}{\omega}\hat{k}\times\vec{E}$$

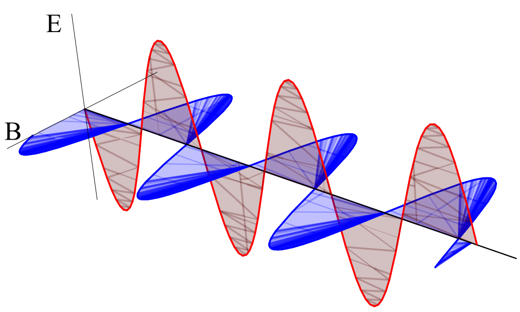
este resultado é formalmente igual ao equivalente para meios não-condutores. No entanto, o parâmetro k é agora complexo! Isto introduz uma defasagem entre $\vec{B}$ e $\vec{E}$ pela fase de k:

$$k = |k|e^{i\phi} = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}e^{i\phi} = \omega\sqrt{\mu\epsilon}\left[1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right]^{1/4} e^{i\phi}$$

$$\phi = arctg\frac{\beta}{\alpha} \qquad \therefore tg\phi = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2}-1}{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)}+1}$$

$$\boxed{\therefore \vec{B} = \sqrt{\mu\epsilon}\left[1+\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right]^{1/4} e^{i\phi}}$$

Portanto o diagrama de uma onda plana num meio condutor é como mostrado na figura. Os máximos e zeros de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ não ocorrem simultaneamente. Há sempre uma atraso de $\vec{B}$ em relação a $\vec{E}$.



O fator importante na propagação de ondas em meios condutores é a razão $\sigma/\omega\epsilon$. Este fator corresponde à razão entre a corrente de condução ($\vec{j} = \sigma\vec{E}$) e o de deslocamento ($\vec{j} = \epsilon\partial\vec{E}/\partial t$). Um meio é considerado bom condutor se $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$ e mau condutor se $\sigma/\omega\epsilon \ll 1$. Portanto, a qualidade de condução de um meio não depende somente de suas características físicas intrínsecas (σ e ϵ), mas também da frequência da onda que nele se propaga. Em altas frequências, $\omega \gg \sigma/\epsilon$, os meios se comportam como bons condutores. No entanto, para frequências acima do visível, efeitos ressonantes se tornam importantes e a teoria macroscópica simples não é adequada.

Casos limites

1) Mau condutor: $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$

$$\therefore \sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\mu\omega}\right)^2} \approx 1+\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx \omega\sqrt{\mu\epsilon}\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right] \approx \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

$$\beta \approx \frac{\sigma}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

Neste limite, portanto, podemos tomar a constante de propagação como a que se obtém num meio dielétrico ($k \approx \alpha = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$), com uma constante de amortecimento simplesmente proporcional à condutividade do meio e independente da frequência.

2)Bom condutor: $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$

Tomamos então $\omega\epsilon/\sigma$ como o parâmetro pequeno de desenvolvimento. Para isto escrevemos α e β como

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}}\left[1+\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\sqrt{1+\left(\frac{\omega\epsilon}{\sigma}\right)^2}\right]^{1/2}; \quad \beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}}\left[1-\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\sqrt{1+\left(\frac{\omega\epsilon}{\sigma}\right)^2}\right]^{1/2}$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\omega\epsilon}{\sigma}\right)^2} \approx 1+\frac{1}{2}\left(\frac{\omega\epsilon}{\sigma}\right)^2$$

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}}\left[1+\frac{\sigma}{\omega\epsilon}+\frac{1}{2}\frac{\omega\epsilon}{\sigma}+\dots\right]^{1/2} \approx \sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}}\left[1+\frac{1}{2}\frac{\omega\epsilon}{\sigma}\right]$$

Da mesma forma, se obtém

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\omega\epsilon}{\sigma}\right]$$

Portanto, em mais baixa ordem em $\omega\epsilon/\sigma$, temos $\alpha = \beta = \delta^{-1}$, onde a distância

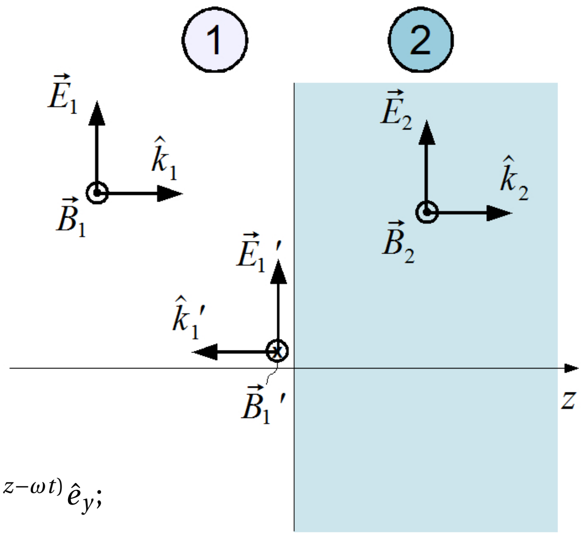
$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}}$$

é denominada profundidade de penetração ou profundidade pelicular. Ela fornece a distância no qual a amplitude da onda decai a 36% de seu valor inicial (e^{-1}) e, para bons condutores, este decaimento ocorre aproximadamente num distância da ordem de um sexto do comprimento de onda dentro do material, por que

$$\lambda_{mat} = \frac{2\pi}{k_{real}} = \frac{2\pi}{\alpha} \approx 2\pi\delta$$

Reflexão em uma superfície condutora

Consideremos uma situação em que uma onda propagando-se em um meio dielétrico isolante ($\sigma = 0$) incide normalmente no superfície de outro meio (2) com condutividade σ não nula. Suponhamos que a interface esteja no plano xy, com a onda se propagando na direção z. Então, no meio ① podemos escrever os campos das ondas incidentes e refletida como



$$\vec{E}_1(z,t) = E_{01}e^{i(k_1z-\omega t)}\hat{e}_x; \quad \vec{B}_1(z,t) = \frac{E_{01}}{v_1}e^{i(k_1z-\omega t)}\hat{e}_y;$$

$$\vec{E}_1'(z,t) = E_{01}'e^{-i(k_1z+\omega t)}\hat{e}_x; \quad \vec{B}_1'(z,t) = -\frac{E_{01}'}{v_1}e^{i(k_1z-\omega t)}\hat{e}_y; \quad v_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu_1\epsilon_1}}$$

Já a onda transmitida pode ser escrita como

$$\vec{E}_2(z,t) = E_{02}e^{i(k_2z-\omega t)}\hat{e}_x; \quad \vec{B}_2(z,t) = \frac{k_2}{\omega}E_{02}e^{i(k_1z-\omega t)}\hat{e}_y;$$

No entanto, temos que lembrar que agora k_2 é um número complexo, ou seja, $k_2 = \alpha_2 + i\beta_2$.

A continuidade da componente tangencial de $\vec{E}$ na interface, fornece

$$E_{01} + E'_{01} = E_{02}$$

Já, considerando que na interface não há densidade superficial de corrente, a continuidade da componente tangencial de $\vec{H}$ fornece

$$\frac{1}{\mu_1\epsilon_1}(E_{01} - E'_{01}) = \frac{k_2}{\mu_2\omega}$$

Resolvendo este sistema de equações para E'_{01}, temos

$$\left(-\frac{\mu_2\omega}{k_2\mu_1 v_1} + 1\right)E_{01} + \left(\frac{\mu_1\omega}{k_2\mu_1 v_1} + 1\right)E'_{01} = 0$$

$$\therefore r = \frac{E'_{01}}{E_{01}} = \frac{1-\tilde{\beta}}{1+\tilde{\beta}}$$

onde

$$\tilde{\beta} = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2\omega}k_2$$

Da mesma forma, resolvendo para β_2, obtemos

$$t = \frac{E_{02}}{E_{01}} = \frac{2}{1+\tilde{\beta}}$$

Estas expressões são formalmente iguais às que obtivemos para a reflexão na interface entre dois meios dielétricos. Mas temos que considerar que a grandeza $\tilde{\beta}$ é agora complexa! Se considerarmos

$$k_2 = \alpha_2 + i\beta_2$$

temos então

$$t = \frac{2}{1 + \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2\omega}\alpha_2 + i\frac{\mu_1 v_1}{\mu_2\omega}\beta_2} = \frac{2\left[1 + \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2\omega}\alpha_2 - i\frac{\mu_1 v_1}{\mu_2\omega}\beta_2\right]}{\left[\left(1 + \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2\omega}\alpha_2\right)^2 + \left(\frac{\mu_1 v_1}{\mu_2\omega}\beta_2\right)^2\right]}$$

ou seja, o coeficiente de transmissão introduz um <u>defasagem</u> entre o campo transmitido e o incidente. Para um condutor muito bom $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$, vimos que

$$\alpha \approx \beta \approx \sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}} \gg 1$$

Então, neste caso

$$t \approx \frac{2\frac{\mu_1 v_1}{\mu_2\omega}(1-i)\sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}}}{\left(\frac{\mu_1 v_1}{\mu_2\omega}\right)^2\left(\alpha_2^2+\beta_2^2\right)} \qquad \therefore t \approx (1-i)\frac{\mu_1 v_1}{\mu_2\omega}\delta$$

Mas $(1-i) = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$

$$t \approx \sqrt{\frac{\mu_1 v_1}{\mu_2\omega}}\delta e^{-i\pi/4}$$

ou seja, a condutividade ocasiona uma defasagem de $-45°$ entre a onda transmitida e a incidente.

Problema:

Determinar a expressão aproximada para r neste mesmo limite, $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$, e a defasagem entre a onda refletida e a incidente.