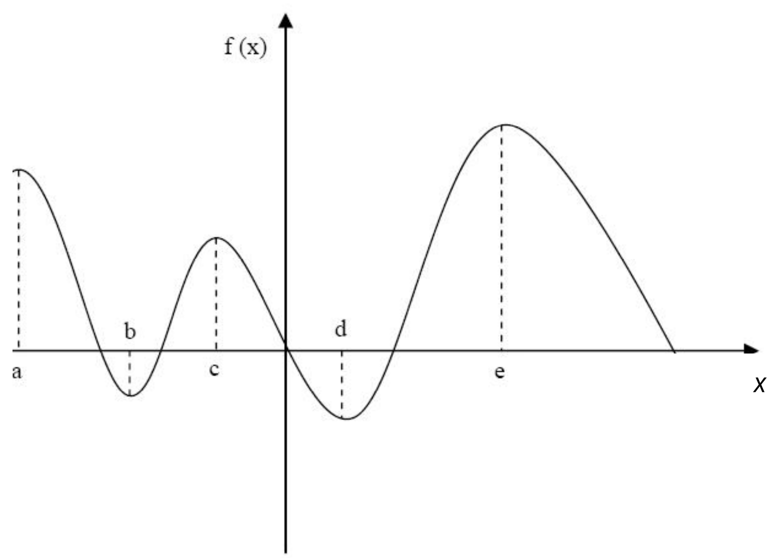
AULA 30/05/2017

MÁXIMOS E MÍNIMOS, ESTUDO COMPLETO DE FUNÇÕES, APLICAÇÃO DE DERIVADA

As derivadas têm inúmeras aplicações. Com o estudo da primeira e da segunda derivada podemos esboçar o gráfico de uma função, determinando intervalos de crescimento e decrescimento, concavidade, pontos de inflexão, pontos de máximo e mínimo.

Figura 1



1) A função é decrescente no intervalo de]a,b[;
2) A função é crescente no intervalo de]b,c[;
3) A função é decrescente no intervalo de]c,d[;
4) A função é crescente no intervalo de]d,e[;
5) Os pontos de máximo relativos são a, c e e;
6) Os pontos de mínimo relativos são b e d;
7) O ponto de máximo absoluto é e;
8) O ponto de mínimo absoluta é d.

Funções Crescentes e Decrescentes

Existe uma relação direta entre a derivada de uma função e o crescimento desta função. O estudo da primeira derivada é importante também para a determinação de máximos e mínimos de funções.

Teorema1:

Se, para todo $x \in]a, b[$ tivermos $f'(x) > 0$, então $f(x)$ é crescente em todo intervalo $]a, b[$

Teorema2:

Se, para todo $x \in]a, b[$ tivermos $f'(x) < 0$, então $f(x)$ é decrescente em todo intervalo $]a, b[$.

Os Teoremas 1 e 2 nos fornecem instrumentos para obter intervalos de crescimento e decrescimento de uma função, bem como para encontrar seus pontos de máximo e de mínimo.

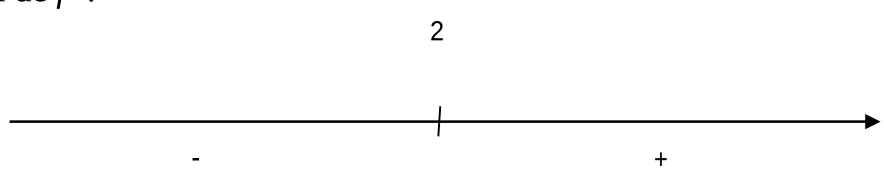
Exemplo:

Seja a função $f(x) = x^2 - 4x$.

Para identificar intervalos de crescimento e decrescimento de uma função analisamos o comportamento de sua primeira derivada.

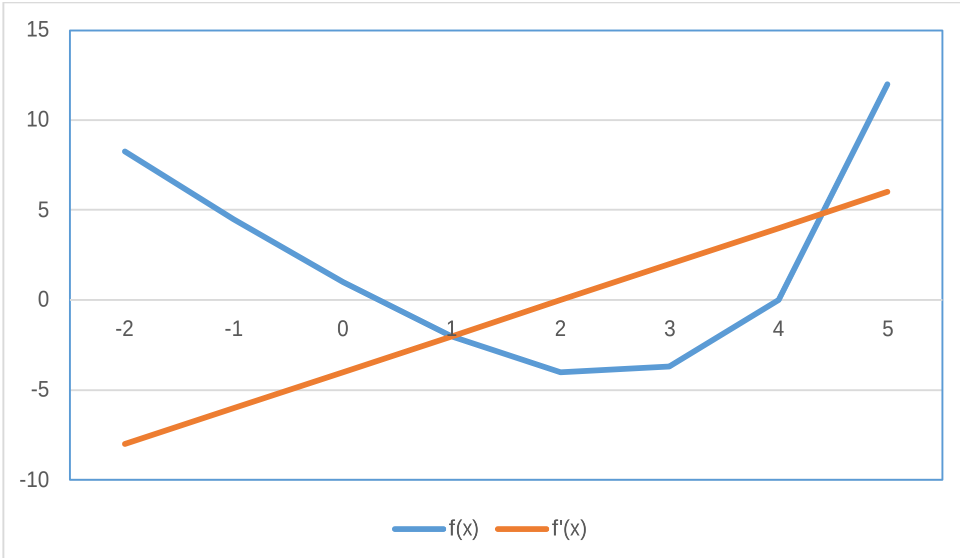
Temos: $f'(x) = 2x - 4$.

Sinal de f':



Assim, a função é decrescente em $]-\infty, 2[$ e crescente no intervalo $]2, \infty[$ Como a função é contínua em x = 2, então neste ponto a função apresenta ponto mínimo, como podemos observar da Figura 2.

Figura 2: $f(x)=x^2-4x$ e $f'(x)=2x-4$

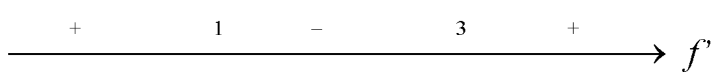


Outro exemplo: seja a função $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x+10$.

Para identificar intervalos de crescimento e decrescimento de uma função analisamos o comportamento de sua primeira derivada.

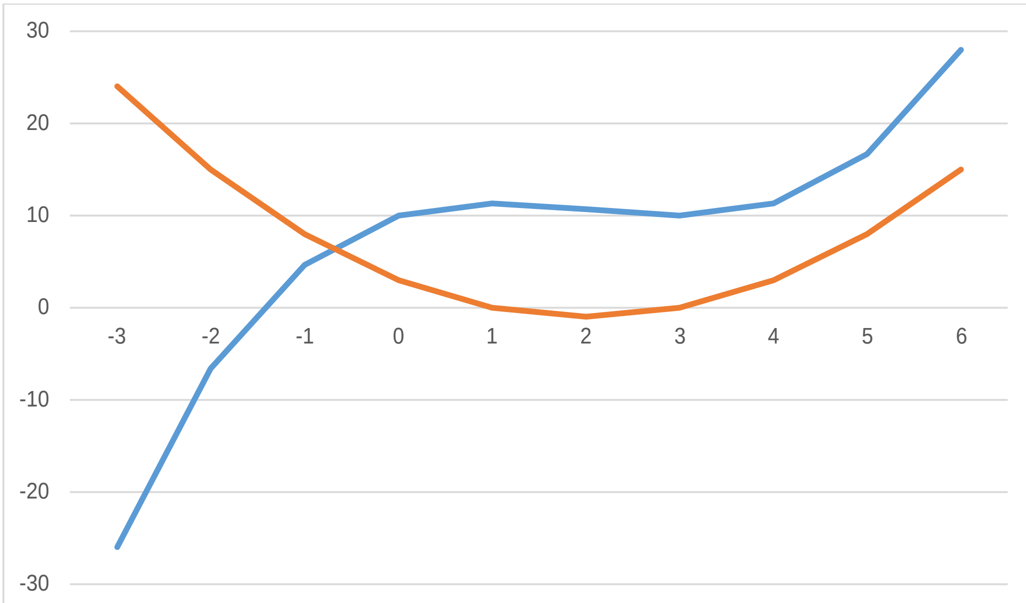
Temos que, $f'(x)=x^2-4x+3$.

Os pontos onde a primeira derivada se anula são x = 1 e x = 3. Os sinais da derivada são mostrados abaixo:



Então, a função é crescente em $]-\infty,\ 1[$, decrescente em $]1,\ 3[$ e crescente em $[3,\ \infty[$, como podemos observar da Figura 3.

Figura 3: $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-2x^2+3x+10$ e $f'(x)=x^2-4x+3$



Se a função é crescente à esquerda de $x = 1$ e decrescente à direita de $x = 1$ significa que $x = 1$ é um ponto de máximo relativo de f, isto, é este ponto maximiza localmente a função.

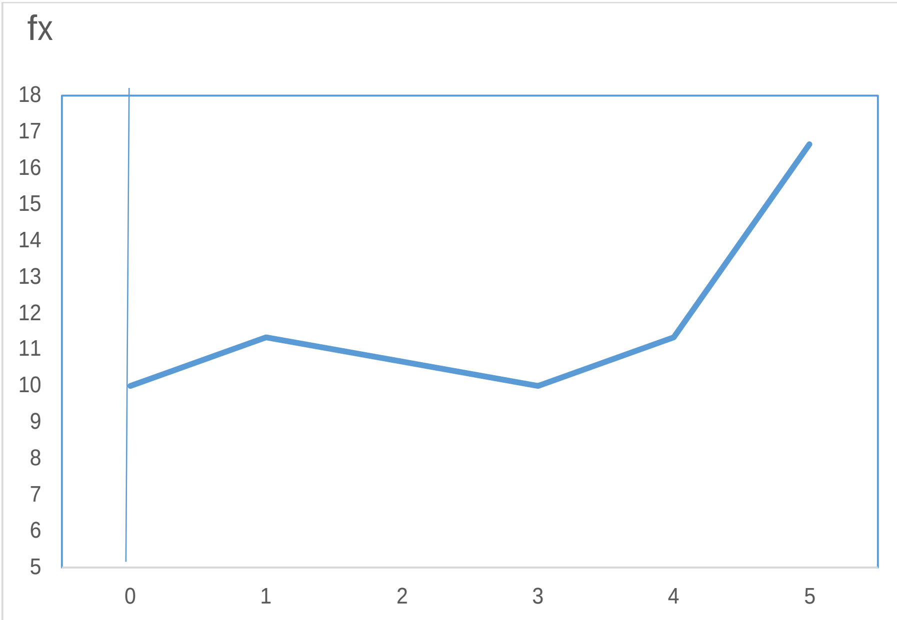
Pelo mesmo raciocínio $x = 3$ é ponto de mínimo local de f.

Neste exemplo, a função não tem pontos de mínimo e máximo absolutos, pois $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Porém, se f for contínua em [a, b], então f assume um valor máximo absoluto *f(c)* e um valor mínimo absoluto *f(d)* em algum *c* e *d* em [a, b]. Assim, suponha que o domínio da função seja restrito aos números reais entre 0 e 5, isto é, D = [0, 5]. Nessas condições, nota-se que x = 0 também é ponto de mínimo relativo, e x = 5 também é ponto de máximo relativo. Além disso, como:

$f(0) = 10$, $f(1) = 34/3$, $f(3) = 10$, $f(5) = 50/3$,

Figura 4: $f(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x+10$ no intervalo [0,5]



Outro resultado importante é que a condição necessária para um ponto *c* pertencente ao domínio de uma função, ser máximo ou mínimo local é que $f'(c) = 0$.

Exemplo:

Uma empresa produz um produto a um custo mensal dado por:

$$C=\frac{1}{3}x^3-2x^2+10x+20$$

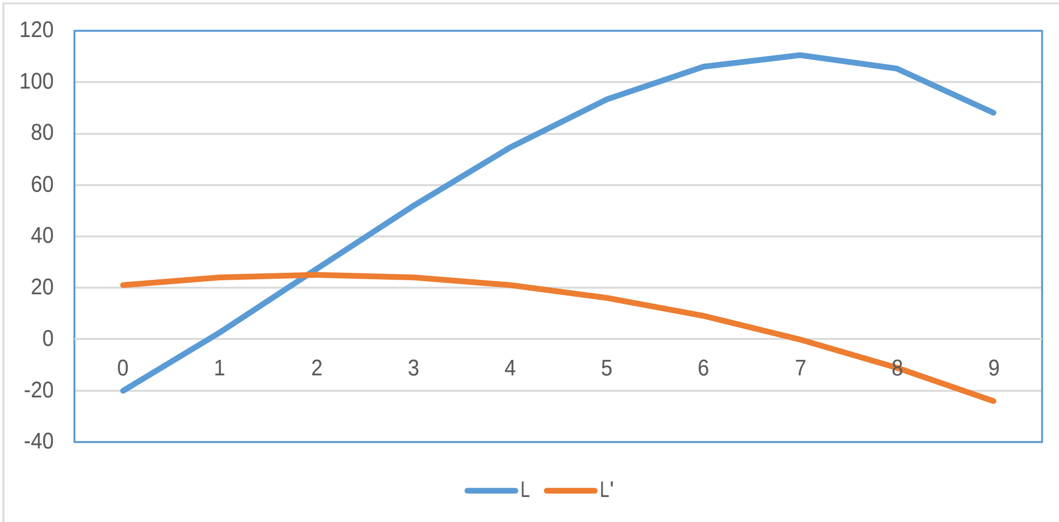
Cada unidade do produto x é vendida por $ 31. Qual a quantidade a ser produzida e vendida de forma a atingir o máximo lucro mensal?

L = R – C=31*x - $(\frac{1}{3}x^3-2x^2+10x+20)$

L= $-\frac{1}{3}x^3+2x^2+21x-20$

L'= $-x^2+4x+21$

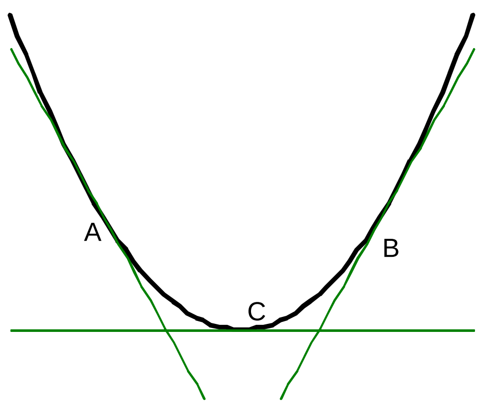
Figura 5: Funções L e L'



R: x = 7

CONCAVIDADE E PONTO DE INFLEXÃO

Da mesma forma que a primeira derivada, *f'*, indica a taxa de crescimento de *f*, a segunda derivada, *f''* , indica a taxa de crescimento de *f'*.



À medida que se caminha do ponto A para C, o coeficiente angular da reta tangente aumenta, indo de valores negativos e se aproximando de zero, e no ponto C, *f '(c)* = 0.

Ao caminhar do ponto C para B o coeficiente angular aumenta.

Daí, a primeira derivada está sempre crescendo e, portanto, *f ''(x)* > 0.

Vemos que neste caso o ponto C é um ponto de mínimo relativo.

Além disso, quando *f ''(x)* > 0 as retas tangentes estão sempre abaixo da função.

Neste caso *f* é dita **côncava para cima**.

Da mesma forma, quando a primeira derivada é decrescente, temos *f ''(x)* < 0 e a função é dita **côncava para baixo**.

Se simultaneamente *f ' (c)* = 0, C é ponto de máximo relativo.

Resumindo a questão da concavidade:

Se *f ''(x)* > 0 para todo $x \in]a, b[$, gráfico de *f(x)* é côncavo para cima em [a, b].

Se *f ''(x)* < 0 para todo $x \in]a, b[$, gráfico de *f(x)* é côncavo para baixo em [a, b].

Um **ponto de inflexão** é aquele onde muda a concavidade da função.

Isto é, um ponto *d* é ponto de inflexão, se *f ''* tem um sinal à esquerda de *d* e outro à direita de *d*, e portanto *f ''(d)* = 0.

Exemplo:

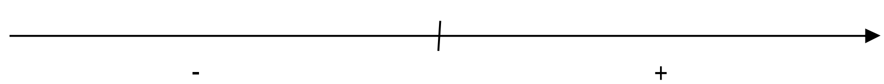
Considere a função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4x - 10$ e vamos estudar seu comportamento com relação à concavidade.

Temos:

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 4$

$f''(x) = 6x - 12$

estudo do sinal de f´´



Portanto, f é côncava para baixo no intervalo]-∞, 2[e côncava para cima em]-∞, 2[. Além disso, x = 2 será um ponto de inflexão.

Máximos e Mínimos por Meio da Segunda Derivada

A regra geral para se determinar pontos de máximo e mínimo relativo de uma função é dada a seguir:

Sejam f, f', f'' contínuas em [a, b] e $c \in [a, b]$ com $f'(c) = 0$. Se $f''(c) > 0$, c é um ponto de mínimo e, se $f''(c) < 0$, c é ponto de máximo de f.

A primeira condição indica que a derivada num ponto de máximo ou mínimo é zero, isto é, a reta tangente no ponto é horizontal.

A segunda condição está relacionada com a questão da concavidade explicada acima.

Por exemplo, seja a função $f(x) = x^2 - 4x + 5$

A condição de ponto extremo é $f'(x) = 0$, que implica em $f'(x) = 2x - 4 = 0$, isto é, $x_c = 2$

A segunda derivada é $f''(x) = 2$, ou seja, a função é côncava para cima em todos os pontos do domínio, em especial em $x = 2$. Portanto $x_c = 2$ é ponto de mínimo relativo de f.

ESTUDO COMPLETO DE FUNÇÕES

A construção do gráfico de uma função é um dos objetivos importantes do estudo de derivadas. Podemos definir o seguinte roteiro com a finalidade do estudo de funções:

a) Determinação do domínio;
b) Determinação das intersecções com os eixos, quando possível;
c) Determinação dos intervalos de crescimento e decrescimento e de possíveis pontos de máximo e mínimo;
d) Determinação dos intervalos em que a função é côncava para cima ou para baixo e de possíveis pontos de inflexão;
e) Determinação dos limites nos extremos do domínio e de possíveis assíntotas;
f) Determinação dos limites laterais nos pontos de descontinuidade (quando houver e possíveis assíntotas);