25/05/17 - Quinta - feira

Retomando: Sistema sobredeterminado

$$\begin{cases} r_1 a + s_1 b = t_1 \\ r_2 a + s_2 b = t_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ r_N a + s_N b = t_N \end{cases}$$

Não costuma ter solução. Em vez disso, procurar um par (a,b) que minimize o resíduo quadrático.

$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{N} (r_i a + s_i b - t_i)^2$$

$$\begin{cases} \left(\sum_i r_i . r_i\right) a + \left(\sum_i r_i s_i\right) b = \sum_i r_i . t_i \\ \left(\sum s_i . r_i\right) a + \left(\sum_i s_i . s_i\right) b = \sum_i s_i t_i \end{cases}$$

15/05/17

Números para essas somas são os produtos escalares entre os vetores

$$r = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_N \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \quad e \quad t = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_N \end{pmatrix}$$

Notação: se $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_n \end{pmatrix}$ e $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, então

$$\langle u, v \rangle \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{N} u_i . v_i$$

$$\begin{cases} \langle r, r \rangle a + \langle r, s \rangle b = \langle r, t \rangle \\ \langle s, r \rangle a + \langle s, s \rangle b = \langle s, t \rangle \end{cases}$$

Exemplo: Com os dados ao lado, "ajuste" a equação $ax^2 + by^2 = 1$. Isto é, ache (a, b) que melhor se adapte aos dados segundo essa equação.

O que isso tem a ver com ajuste de equação e funções?

Método de mínimos quadrados

1. Escrever o sistema sobredeterminado

$$N=6 \begin{cases} x_1^2 a + y_1^2 b = 1 \\ x_2^2 a + y_2^2 b = 1 \\ \vdots \\ x_6^2 a + y_6^2 b = 1 \end{cases}$$

2. Minimizar o resíduo quadrático

$$r = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ \vdots \\ x_6^2 \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} y_1^2 \\ \vdots \\ y_6^2 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

25/05/17

$\langle r, r \rangle = \sum_i x_i^2 \cdot x_i^2 = \sum_i x_i^4 \longrightarrow \langle x^2, x^2 \rangle$

$\langle r, s \rangle = \langle s, r \rangle = \sum_i x_i^2 y_i^2 \longrightarrow \langle x^2, y^2 \rangle$

$\langle s, s \rangle = \sum_i y_i^4 \longrightarrow \langle y^2, y^2 \rangle$

$\langle r, t \rangle = \sum_i x_i^2 \cdot 1 = \sum_i x_i^2 \quad \langle s, t \rangle = \sum y_i^2 \rightarrow \langle x^2, 1 \rangle, \langle y^2, 1 \rangle$

$\langle x^2, x^2 \rangle = 12{,}25$

$\langle x^2, y^2 \rangle = 4{,}875$

$\langle y^2, y^2 \rangle = 8{,}188$

$\langle x^2, 1 \rangle = 7{,}000$

$\langle y^2, 1 \rangle = 5{,}750$

$$\begin{cases} 12{,}25a + 4{,}875b = 7 \\ 4{,}875a + 8{,}188b = 5{,}75 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 12{,}25 & 4{,}875 & 7 \\ 4{,}875 & 8{,}188 & 5{,}75 \end{array}\right)$$

$$b = \frac{2{,}964}{6{,}248} = 0{,}4744$$

$$a = \frac{7 - 4{,}875 \cdot 0{,}4744}{12{,}25} = 0{,}3826$$

25/05/17

$y = 0$: $ax^2 + by^2 = 1$

$\Rightarrow x^2 = \dfrac{1}{a}$

$x = \pm\sqrt{1/a}$

$\sqrt{1/a} \approx 1,62$

$\sqrt{1/b} \approx 1,45$

a, b são parâmetros da equação.

Fizemos um ajuste de parâmetros por mínimos quadrados.

Segundo ajuste

$$y = a + bx^2$$

$$1a + x^2 b = y$$

Sistema sobre

$$\begin{cases} 1 \cdot a + x_1^2 b = y_1 \\ \vdots \\ 1a + x_6^2 b = y_6 \end{cases}$$

Sistema a ser resolvido

$$\begin{cases} \langle 1,1\rangle a + \langle 1, x^2\rangle b = \langle 1, y\rangle \\ \langle x^2, 1\rangle a + \langle x^2, x^2\rangle b = \langle x^2, y\rangle \end{cases}$$

$\langle 1, 1\rangle = 6$

$\langle 1, x^2\rangle = 7$

$\langle x^2, x^2\rangle = 12,25$

$\langle 1, y\rangle = -5,5$

25/05/17

$$b = \frac{0,9167}{4,083} = 0,2245$$

$$a = \frac{-5,5 - 7 \cdot 0,2245}{6} = -1,179$$

$$a + bx^2 = 0$$

$$x = \sqrt{-\frac{a}{b}}$$

$$x \approx 2,3$$

Terceiro ajuste

$$y = a + 0,3x^2$$

(ajuste pior, pois já ficou uma constante)

$$1a = \underbrace{y - 0,3x^2}_{\text{não tem parâmetro}}$$

Qual seria o sistema sobre?

$$\begin{cases} 1a = y_1 - 0,3x_1^2 \\ 1a = y_2 - 0,3x_2^2 \\ \vdots \\ 1a = y_6 - 0,3x_6^2 \end{cases}$$

$Q(a)$: resíduo quadrático

$$Q(a) = \sum_{i=1}^{6} (a - y_i + 0,3x_i^2)^2$$

Mínimo $Q'(a) = 0$

$$\langle 1, 1 \rangle a = \langle 1, y - 0,3x^2 \rangle$$

$$\underbrace{\langle 1, 1 \rangle}_{6} \qquad \sum_{i=1}^{6} y_i - 0,3x_i^2 \cong -7,6$$

$$a \cong \frac{-7,6}{6} \cong -1,27$$

... were insufficient public involvement and the lack of a proper site selection process rather than specific safety concerns.

Safety is the overriding governing principle in the design of any nuclear waste repository. Ensuring long-term safety requires a detailed knowledge of the host geology and a full technical analysis of the proposed design. Repository design at the Gorleben site has to meet not only German national mining requirements and nuclear regulations but also specific strategic requirements that include facility ... of wastes, and parameters such as

25/05/17

OBS: $\langle 1, y - 0{,}3x^2 \rangle$

$= \langle 1, y \rangle - 0{,}3 \langle 1, x^2 \rangle$

Quarto ajuste

$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$1 . a_0 + x . a_1 + x^2 . a_2 = y$

$$\begin{cases} \langle 1, 1 \rangle a_0 + \langle 1, x \rangle a_1 + \langle 1, x^2 \rangle a_2 = \langle 1, y \rangle \\ \langle x, 1 \rangle a_0 + \langle x, x \rangle a_1 + \langle x, x^2 \rangle a_2 = \langle x, y \rangle \\ \langle x^2, 1 \rangle a_0 + \langle x^2, x \rangle a_1 + \langle x^2, x^2 \rangle a_2 = \langle x^2, y \rangle \end{cases}$$

INCOMPLETO! falta terminar.