Eletricidade e Magnetismo - IGC

Indução Eletromagnética

Prof. Cristiano Oliveira
Ed. Basilio Jafet – sala 202
crislpo@if.usp.br

Geração de Energia

Todos os equipamentos e dispositivos modernos utilizam circuitos elétricos em suas partes internas.

Vimos anteriormente que um circuito elétrico pode ser alimentado por uma força eletromotriz (fem), como por exemplo uma bateria.

No entanto, a maior parte dos dispositivos utilizados em nossas casas ou na indústria (incluindo qualquer dispositivo que você plugue na tomada!) a fonte de fem não é uma bateria, mas sim uma usina geradora de energia elétrica.

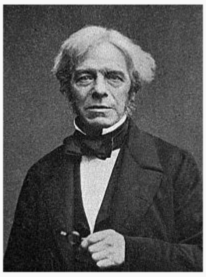
Uma usina gera energia elétrica através da conversão de outras formas de energia: energia potencial gravitacional, energia química, energia nuclear, etc.

Como ocorre essa conversão de energia?

Através da ***indução eletromagnética***

Experiências de Indução

Michael Faraday



Conhecido(a) por	Indução eletromagnética
Nascimento	22 de setembro de 1791 Newington Butts
Morte	25 de agosto de 1867 (75 anos) Hampton Court
Nacionalidade	britânico
Prêmios	Bakerian Lecture (1829 e 1832), Medalha Copley (1832 e 1838), Medalha Real (1835 e 1846), Medalha Rumford (1846), Bakerian Lecture (1849, 1851 e 1857)
Assinatura	
Michael Faraday signature.svg	
Instituições	Royal Institution
Campo(s)	Química, física

Joseph Henry

Nascimento	17 de dezembro de 1797 Albany
Morte	13 de maio de 1878 (80 anos) Washington, D.C.
Nacionalidade	Estadunidense
Alma mater	The Albany Academy
Instituições	The Albany Academy, Universidade de Princeton, Instituto Smithsoniano
Campo(s)	Física

Heinrich Lenz

Conhecido(a) por	Lei de Lenz
Nascimento	12 de fevereiro de 1804 Tartu
Morte	10 de fevereiro de 1865 (60 anos) Roma
Nacionalidade	Estônia Estoniano
Alma mater	Universidade de Tartu
Instituições	Universidade Estatal de São Petersburgo
Campo(s)	Física

Experimentos!!!

Procedimento experimental

1) Siga o roteiro fornecido pelo professor

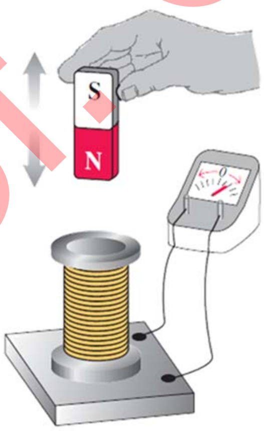
2) Realize as atividades e responda as questões propostas.

3) Deixe os colegas do grupo repetirem os experimentos

4) Discuta com seu grupo as observações

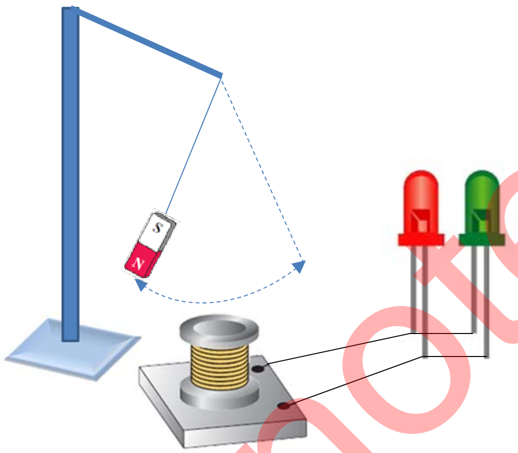
5) Mãos a obra!

Experimento #1: Imã e solenóide



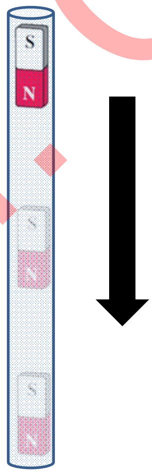
Insira e retire o imã de dentro da espira. O que ocorre?

Experimento #2: Pendulo magnético



Oscile o pendulo sobre o solenoide. O que ocorre?

Experimento #3: Queda livre magnética

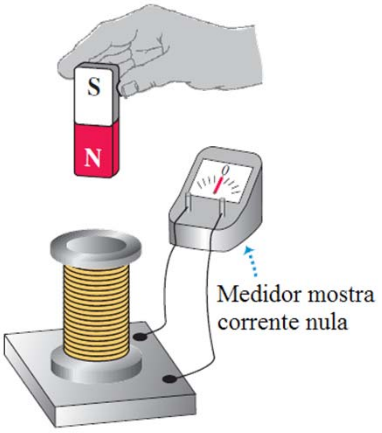


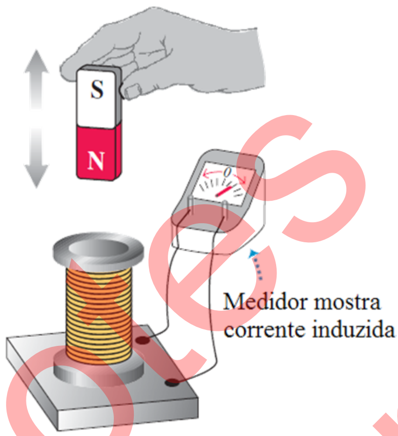
Na queda livre:
$P = mg$
$S = S_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$

Isso vale neste experimento???

Experiências de Indução

Experimentos de Faraday e Henry

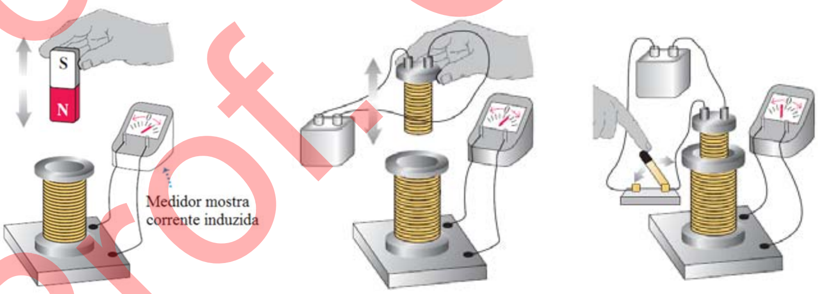




Imã em repouso: não existe corrente induzida

Imã em movimento: surge uma corrente induzida

Experiências de Indução



Em todos os casos acima surge uma corrente induzida.

O que está variando???

Indução Eletromagnética

O papel central da indução eletromagnética é a ***Lei de Faraday***

Esta lei relaciona a fem com o fluxo magnético variável em um ponto de uma espira.

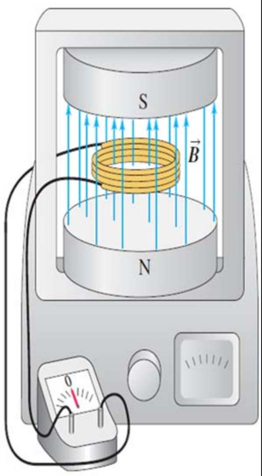
Relacionado a este fenômeno tem-se a ***Lei de Lenz*** que ajuda a predizer o sentido de uma corrente induzida e de uma fem induzida

Os resultados destes estudos permitem a apresentação do conjunto completo denominado ***Equações de Maxwell***, que é a base da teoria eletromagnética e da geração de ***ondas eletromagnéticas.***

Compreendendo a Experiência de Indução

Temos um eletroímã capaz de gerar um campo magnético ***B*** uniforme. A experiência mostra que:

1. Quando não existe corrente no eletroímã, de modo que ***B***=0, o galvanômetro não indica nenhuma corrente
2. Quando ligamos o eletroímã, surge momentaneamente uma corrente induzida indicada no galvanômetro a medida que ***B*** aumenta.
3. Quando ***B*** se mantém fixo em um dado nível, a corrente cai para zero, por mais elevado que seja ***B***
4. Mantendo-se a bobina no plano horizontal, se alteramos a área dela (comprimindo ou expandindo as espiras) surge corrente somente durante a deformação. A corrente induzida tem sentidos opostos em cada caso.
5. Quando giramos a bobina alguns graus em torno de um eixo horizontal o galvanômetro indica uma corrente durante a rotação, no mesmo sentido de quando diminuímos a área. Retornando a espira na posição original, surge uma corrente em sentido oposto
6. Quando retiramos a bobina de dentro do campo magnético surge uma corrente induzida no mesmo sentido da corrente indicada durante a diminuição da área
7. Quando diminuímos o numero de espiras da bobina, surge uma corrente induzida no mesmo sentido da corrente indicada durante a diminuição da área. Quando enrolamos mais espiras surge uma corrente em sentido contrario
8. Se desligamos o eletroímã, surge momentaneamente uma corrente induzida em sentido contrario ao da corrente que aparece quando ligamos o eletroímã
9. Quanto mais rápido fazemos qualquer das ações acima, maior o módulo da corrente induzida
10. Se repetimos os experimentos com uma espira de outro material, vemos que a corrente induzida é inversamente proporcional à resistência total do circuito. Asim, a ***fem*** induzida não depende do material mas apenas da forma e da variação do fluxo.

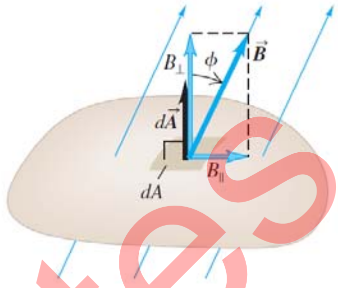


Lei de Faraday

O fenômeno comum em todos os efeitos acima é a ***variação do fluxo magnético*** através de um circuito.

Para um elemento infinitesimal de área $d\vec{A}$ em um campo magnético $\vec{B}$ o fluxo magnético $d\Phi_B$ através da área é dado por

$$d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{A} = B_\perp \, dA = B \, dA \cos\phi$$

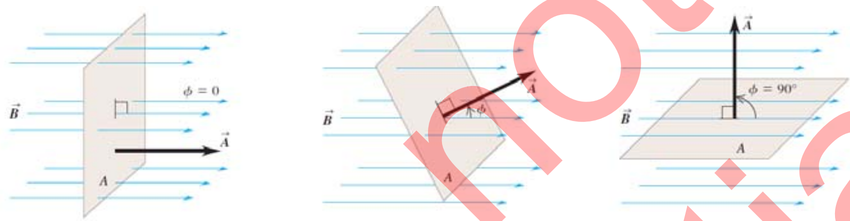


O fluxo total Φ_B através da área finita é uma integral na área considerada:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int B \, dA \cos\phi$$

Se $\vec{B}$ é uniforme em uma superfície plana com área $\vec{A}$

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA\cos\phi$$



Lei de Faraday

O enunciado da ***Lei de Faraday*** da indução tem a forma:

“A *fem* induzida em uma espira fechada é dada pela taxa de variação do fluxo magnético com o sinal negativo, através da área delimitada pela espira”

Matematicamente:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Lei de Faraday da indução

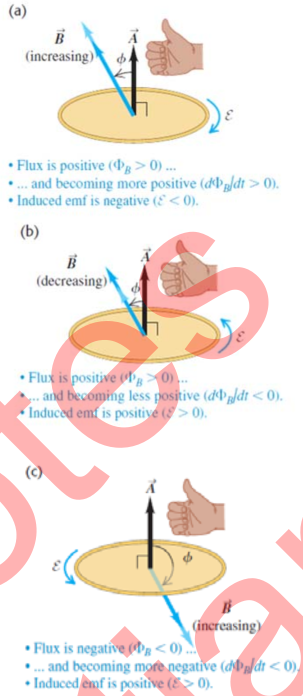
O sinal negativo será explicado a seguir, através da convenção de sinal para a fem $\boldsymbol{\mathcal{E}}$

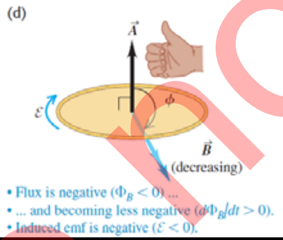
Sentido da FEM induzida

Para saber o sentido da fem induzida a partir de $\varepsilon = -d\Phi_B/dt$

1. Defina um sentido positivo para o vetor área ***A***
2. A partir das direções e dos sentidos dos vetores ***A*** e ***B***, determine o sinal do fluxo magnético Φ_B e da taxa de variação $d\Phi_B/dt$. Nas figuras temos diversos exemplos.
3. Determine o sinal da ***fem*** induzida ou da corrente induzida. Quando o fluxo está aumentando, $d\Phi_B/dt$ é positivo, então a ***fem*** induzida ou a corrente é negativa; quando o fluxo está diminuindo $d\Phi_B/dt$ é negativo, a ***fem*** induzida ou a corrente é positiva
4. Finalmente, determine o sentido da ***fem*** induzida ou da corrente usando a regra da mão direita. Encurve os dedos de sua mão direita em torno do vetor ***A***, mantendo o dedo polegar apontando no sentido de ***A***. Se a ***fem*** induzida ou a corrente do circuito é positiva, ela possui o mesmo sentido de rotação de seus dedos; se a ***fem*** induzida ou corrente no circuito é negativa, ela possui sentido contrario ao da rotação de seus dedos.
5. Assim, deve-se atentar para ***B*** e o sinal de $d\Phi_B/dt$, pois isso define o sentido de ε.
6. Para uma bobina de N espiras

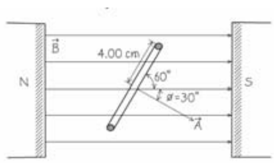
$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi_B}{dt}$$





Uma bobina de 500 espiras circulares com raio igual a 4,00cm é colocada entre os pólos de um grande eletroímã onde o campo magnético é uniforme e forma um ângulo de 60º com o plano da bobina. O campo magnético diminui com a taxa igual a 0.2T/s. qual o módulo e o sentido da fem induzida?

Como o campo diminui a uma certa taxa, dB/dt é negativo!



$$\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{dB}{dt}A\cos 30º = \frac{dB}{dt}A\cos 30º = -(0.2T/s)(\pi 4\times10^{-4}m)^2 0.866$$

$$\frac{d\Phi_B}{dt} = -8.71\times10^{-4}Wb/s$$

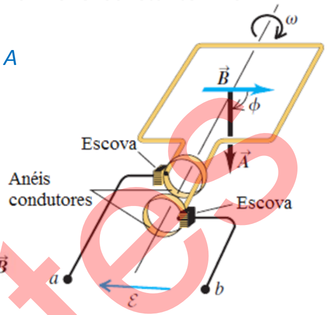
A fem induzida será:

$$\varepsilon = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -(500)(-8.71\times10^{-4}Wb/s) = 0.435\text{V}$$

Note que a fem induzida aparece no sentido de se opor a diminuição do campo magnético. Essa é a base da chave da chamada ***Lei de Lenz****!*

Gerador I : alternador simples

Na figura abaixo temos uma versão simples de um alternador, que é um dispositivo que gera ***fem***. Fazemos uma espira retangular girar com velocidade angular ω em gorno de um eixo indicado. O campo magnético $\boldsymbol{B}$ é uniforme e constante. No instante t=0, ϕ=0. Determine a ***fem*** induzida.

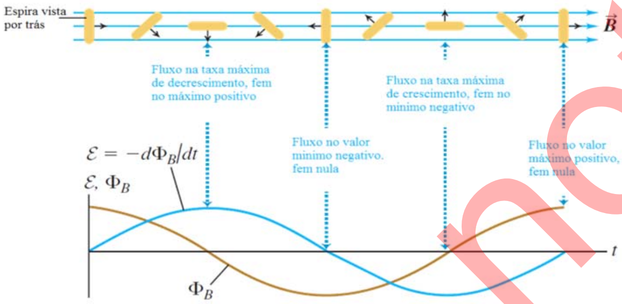


O fluxo magnético através da espira é o produto da sua área A pelo componente B perpendicular à área da espira, Bcos ϕ.
Como a espira gira, $\phi = \omega t$

$$\Phi_B = BA\cos\phi = BA\cos\omega t$$

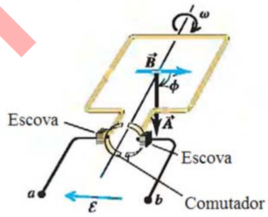
Assim

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(BA\cos\omega t) = \omega BA\sin\omega t$$

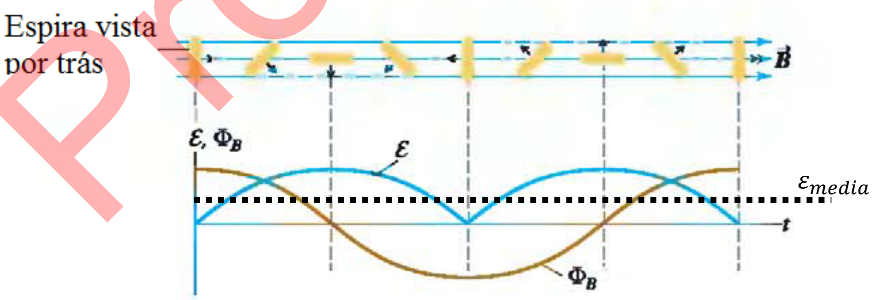


Gerador II : gerador dc e fem induzida em um motor

Na figura abaixo temos outra versão simples de um alternador. A construção abaixo gera uma corrente sempre em um mesmo sentido e pode ser usada para geradores DC. Considere um motor com bobina quadrada de 10.0cm e 500 espiras. Se o campo magnético possui módulo de 0.2T, qual deve ser a velocidade angular para termos uma fem induzida média de 112V ?



O comportamento deste sistema será semelhante ao caso anterior, com a diferença de que a fem induzida será sempre positiva devido à inversão do sentido da corrente provocada pelo comutador.
Assim, $|\varepsilon| = N\omega BA|\sin\omega t|$



Para obter e média de uma função periódica (f(t)), tomamos a integral em um período e dividimos este valor pelo período:

$$(f(t))_{medio} = \frac{\int_0^T f(t)dt}{T}$$

No nosso caso, f(t)=|sen ωt|. Esta função é periódica em meio ciclo, ou seja, ωT=π, logo, T= π/ω

Assim,

$$(f(t))_{medio} = \frac{\int_0^{\pi/\omega} \sin \omega t\, dt}{\pi/\omega} = \frac{\omega}{\pi}\frac{(-\cos \omega t)}{\omega}\Big]_0^{\pi/\omega} = \frac{1}{\pi}(-(-1-1)) = \frac{2}{\pi}$$

E a fem média será: $\varepsilon_{media} = \frac{2}{\pi} N\omega BA$

Queremos uma tensão média de 112V, assim,

$$\omega = \frac{\pi\varepsilon_{media}}{2NBA} = \frac{\pi 112}{2500(0.2T)(10\times 10^{-2}m)^2} = 176 rad/s$$

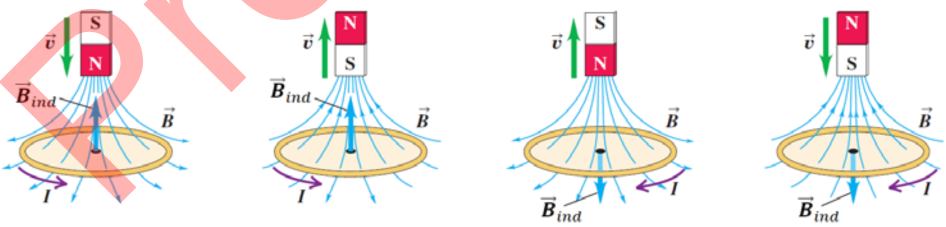
2π rad = 360º = 1 revolução
60 segundos = 1 minuto

$$\omega = 176\frac{rad}{s} = 176\frac{rad}{s}\frac{1rev}{2\pi rad}\frac{60s}{1min} = 1680 rev/min$$

Lei de Lenz

A lei de Lenz é um método alternativo padra determinar o sentido da corrente. Ela não constitui um princípio independente, pois pode ser deduzida a partir da lei de Faraday. A ***Lei de Lenz*** afirma que:

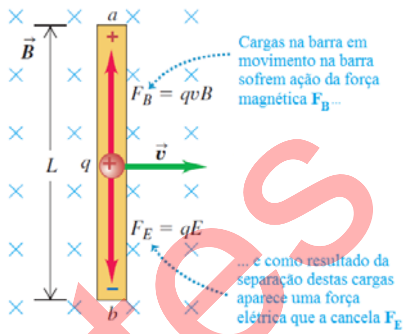
"O sentido de qualquer efeito de indução magnética é tal que se opõe à causa que produz esse efeito"



Força Eletromotriz Produzida pelo Movimento

O campo magnético B é uniforme e está entrando no plano da página. Deslocamos a haste para a direita com uma velocidade constante ***v***. Uma partícula com carta q no interior da haste sofre a ação de uma força magnética dada por $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$, cujo módulo é $F = |q|vB$.

Esta força magnética produz o deslocamento das cargas, criando um excesso de cargas positivas na extremidade superior e de cargas negativas na extremidade inferior.



As cargas continuam a se acumular até que a força elétrica orientada de cima para baixo (qE) seja exatamente igual à força magnética orientada de baixo para cima. Logo, *qE* = *qvB*

O módulo da diferença de potencial é $V_{ab}=V_a-V_b$, igual ao modulo do campo elétrico E multiplicado pelo comprimento *L* da haste. Da relação acima, *E* = *vB*. Logo

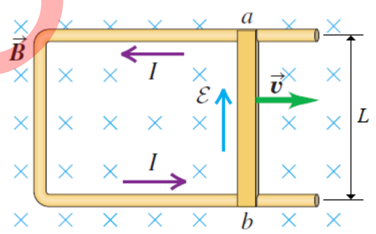
$$V_{ab} = EL = vBL$$

Força Eletromotriz Produzida pelo Movimento

Suponha agora que a haste esteja deslizando sobre um condutor em forma de U, fechando um circuito completo.

Sobre as cargas nos condutores em repouso não existe força magnética, porém as cargas nas vizinhanças de *a* e *b* se redistribuem ao longo dos condutores, criando um campo elétrico no interior deles.

Este campo produz uma corrente no sentido indicado.



O fem induzido na haste em movimento cria um campo elétrico estacionário no condutor e isso gera a corrente no circuito fechado

A haste deslizante torna-se uma fonte de fem: no interior delas cargas se movem do potencial mais baixo para o potencial mais elevado. No restante do circuito as cargas se movem do potencial mais elevado para o potencial mais baixo.

Esta força eletromotriz produzida é denominada ***força eletromotriz do movimento***, e é dada por:

$$\varepsilon = vBL$$

Se R for a resistência total dos condutores em forma de U, a corrente induzida no circuito será dada por:

$$vBL = RI$$

Generalização

Podemos generalizar este conceito de ***fem*** do movimento para um condutor que possui *qualquer* forma e que se desloca em qualquer campo magnético, uniforme ou não (supondo apenas que em cada ponto ele não varie com o tempo)

Para um elemento $d\vec{l}$ do condutor, a contribuição de da ***fem*** é dada pelo módulo dl multiplicado pelo componente de $\vec{v} \times \vec{B}$ (a força magnética por unidade de carga) paralela a $d\vec{l}$, ou seja:

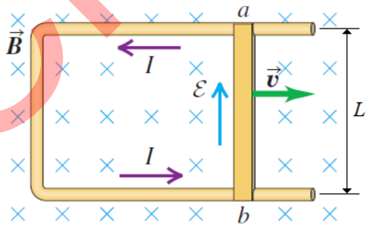
$$d\varepsilon = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

Para qualquer espira condutora fechada, a ***fem*** é dada por

$$\varepsilon = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

Esta expressão é equivalente à obtida anteriormente, $\varepsilon = -d\Phi_B/dt$. É possível demonstrar que a taxa de variação do fluxo magnético através de uma espira que se move é dada por esta expressão. No entanto, esta fórmula só é útil para condutores que se movem. Para condutores em repouso em um campo magnético usamos a lei de Faraday $\varepsilon = -d\Phi_B/dt$ é a única a ser aplicada.

Considere o sistema ao lado com o comprimento L sendo 0.10m, velocidade v igual a 2.5m/s, resistência total da espira de 0.03ohm e B igual a 0.6T. Calcule a ***fem***, a corrente induzida e a força que atua sobre a haste.



A fem induzida será:

$$\varepsilon = vBL = (2.5m/s)(0.6T)(0.1m) = 0.15V$$

A corrente I induzida na espira será:

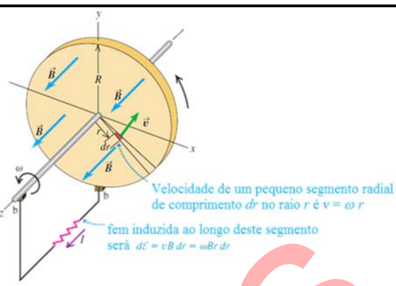
$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{0.15V}{0.03\Omega} = 5A$$

Em virtude dessa corrente, uma força magnética F atua sobre a haste no sentido oposto ao movimento: isso pode ser verificado pela Lei de Lenz ou então usar a regra da mão direita para o produto vetorial $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$

Como vimos, um fio conduzindo uma corrente I em um comprimento L sofre a ação de uma força dada por

$$F = ILB = (5A)(0.1m)(0.6T) = 0.3N$$

Dínamo baseado no disco de Faraday: a figura ao lado mostra um disco condutor de raio R contido no plano *xy* e girando com velocidade angular ω constante em torno do eixo Oz. Determine a ***fem*** induzida entre o centro e a periferia do disco.



Cada elemento de área na superficie do disco se moverá com a mesma velocidade angular ω. No entanto a velocidade escalar será diferente em cada ponto pois v= ω r.

Para obter a força eletromotriz entre o centro do disco e sua extremidade é necessário considerar a contribuição deste infinitesimal de área para a força eletromotriz:

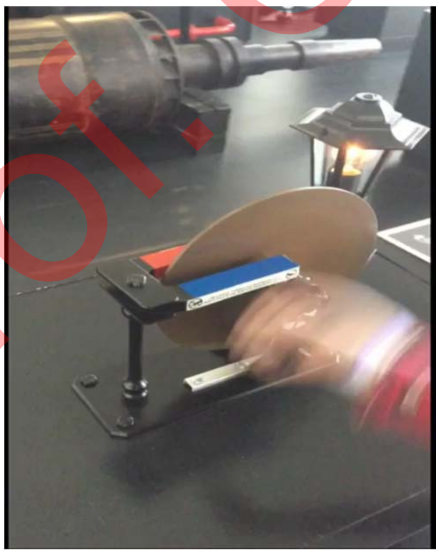
$$d\varepsilon = vBdr = \omega Brdr$$

A fem total entre o centro e a periferia será a integral de todas estas contribuições:

$$\varepsilon = \int_0^R \omega Brdr = \frac{1}{2}\omega BR^2$$

*Este gerador, também conhecido como dínamo de Faraday ou gerador homopolar, fornece corrente contínua, produzindo uma **fem** constante no tempo*

Dínamo de Faraday

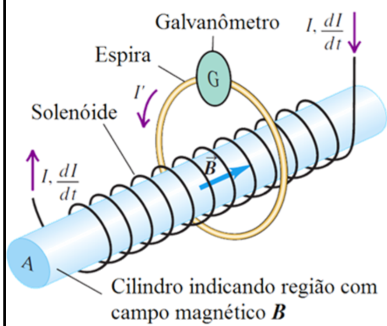


Campos Elétricos induzidos

Quando um condutor se move em um campo magnético podemos entender a ***fem*** induzida com base nas forças magnéticas que atuam sobre o condutor.

Mas vimos que também existe uma ***fem*** quando ocorre um fluxo magnético variável através de um condutor em repouso. Qual é a força que age ao longo do circuito neste caso?

Como exemplo considere a figura abaixo. Um solenoide longo, fino e com área de seção transversal A possui n voltas por unidade de comprimento é envolto por uma espira circular concêntrica. O galvanômetro G mede a corrente na espira. A corrente *I* no enrolamento do solenoide gera um campo magnético ***B*** ao longo do eixo do solenoide.



$B = \mu_0 n I$, onde n é o número de voltas por unidade de comprimento.

O fluxo Φ_B através da espira é $\Phi_B = BA = \mu_0 n I A$

Quando a corrente do solenoide *I* muda com o tempo. De acordo com a Lei de Faraday, a ***fem*** induzida na espira será:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\mu_0 n A \frac{dI}{dt}$$

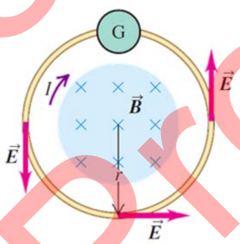
Se a resistência total da espira é *R*, a corrente induzida na espira (*I′*), será *I′* = $\mathcal{E}$ / *R*

Campos Elétricos induzidos

Mas, qual é a força que move as cargas ao longo da espira?

Não pode ser o campo magnético pois a espira nem está imersa em um campo magnético.

Somos forçados a concluir que deve existir um ***campo elétrico induzido*** no condutor *causado pelas mudanças no fluxo magnético.*



Veja que curioso: estamos acostumados a imaginar campos elétricos sendo criados por cargas elétricas, mas agora estamos concluindo que mudanças no campo magnético de alguma forma gera campos elétricos.

Quando a carga *q* se move ao longo da espira, o trabalho total feito pelo campo elétrico deve ser igual a *q* multiplicado pela ***fem*** ε.

Desta forma, o campo gerado na espira é ***não conservativo***, pois a integral de ***E*** ao longo de um caminho fechado ***não é zero***.

Na realidade, esta integral de linha, representando o trabalho feito pelo campo induzido E por unidade de carga é igual à ***fem*** ε :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \mathcal{E}$$

Campos Elétricos induzidos

Da Lei de Faraday, a ***fem*** ε é descrita como o negativo da taxa de mudança do fluxo magnético dentro da espira. Assim podemos reescrever a Lei de Faraday como:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Caminho de integração estacionário

Veja que a lei de Faraday na forma $\varepsilon = -d\Phi_B/dt$ é sempre válida. A equação acima é válida *somente* se o caminho de integração é estacionário.

Campos Elétricos não Eletrostáticos

A Lei de Faraday é válida em duas situações diferentes:

1) A ***fem*** é induzida por forças magnéticas em cargas quando um condutor se move através de um campo magnético
2) Um campo magnético variável induz um campo elétrico em um condutor estacionário e assim induz um fem. Na realidade, o campo E é induzido mesmo quando não existe condutor presente

Ele é não conservativo: a integral $\oint \vec{E} \cdot \vec{dl}$ em um caminho fechado não é zero e quando uma carga se move neste caminho fechado, o campo produz um trabalho não nulo.

Sendo assim, para este tipo de campo, o conceito de potencial não existe!

Independente desta diferença, o efeito fundamental de qualquer campo elétrico é exercer uma força elétrica $\vec{F} = q\vec{E}$ em uma carga q. Isto é válido independente de o campo ser conservativo ou não.

Desta forma, um campo magnético variável é uma fonte de campo elétrico de um tipo que não pode ser produzido por distribuições estáticas de carga. É a forma que a natureza funciona!

Como vimos antes, pelo conceito da corrente de deslocamento, um campo elétrico variável funciona como fonte de campo magnético.

Esta relação entre um campo podendo gerar o outro é a base da teoria eletromagnética e permite a existência de uma ***onda*** propagante de radiação eletromagnética

Lei Faraday – Forma integral e diferencial

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Podemos escrever o fluxo Φ_B passando por uma área em termos da integral do campo B passando por uma superfície *S*,

$$\Phi_B = \int_S \vec{B}\cdot\hat{n}dA$$

Assim,

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{d\vec{B}}{dt}\cdot\hat{n}dA$$

De calculo diferencial avançado, temos a Lei de Stokes:

"A integral de linha de um vetor em torno de uma curva fechada é igual a integral da normal da componente normal de seu rotacional sobre qualquer superfície limitada pela curva"

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla}\times\vec{F}\cdot\hat{n}dA$$

Aplicando a Lei de Stokes na lei de Faraday em termos de ***E***,

$$\int_S \vec{\nabla}\times\vec{E}\cdot\hat{n}dA = -\int_S \frac{d\vec{B}}{dt}\cdot\hat{n}dA$$

A integral é tomada na mesma superfície *S*. Assim, somente teremos a igualdade se os integrandos forem idênticos, logo:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

Equações de Maxwell

Formulação em termos de carga e corrente totais

Nome	Forma diferencial	Forma integral
Lei de Gauss	$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\oiint_{\partial V}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{Q(V)}{\varepsilon_0}$
Lei de Gauss para o magnetismo	$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$	$\oiint_{\partial V}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{A} = 0$
Lei de Faraday da indução	$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_{\partial S}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial\Phi_{B,S}}{\partial t}$
Lei de Ampère (com a correção de Maxwell)	$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$	$\oint_{\partial S}\mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_S + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\Phi_{E,S}}{\partial t}$