Escoamento potencial

J. L. Baliño

Escola Politécnica - Universidade de São Paulo

Apostila de aula
2017, v.1

Sumário

1 Propriedades matemáticas

2 Escoamento potencial bidimensional

3 Soluções analíticas utilizando variável complexa

Potencial escalar ϕ

Estudaremos os escoamentos não viscosos e irrotacionais. Este tipo de escoamento se estabelece fora da camada limite de um corpo submetido a uma corrente livre. A solução não viscosa deve ser acoplada à solução da camada limite.

Se o escoamento é irrotacional, então a velocidade pode ser escrita como o gradiente de uma função potencial escalar (definida a menos de uma constante):

$$\boldsymbol{V} = \nabla\phi \quad \Rightarrow \quad u = \frac{\partial\phi}{\partial x} \; ; \; v = \frac{\partial\phi}{\partial y} \; ; \; w = \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

Se, aliás, o escoamento é incompressível, resulta da equação de continuidade:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = \nabla \cdot (\nabla\phi) = \nabla^2\phi = 0$$

Isto é, o potencial ϕ satisfaz a equação de Laplace (é harmônica). O potencial escalar reduz o número de incógnitas, mas aumenta a ordem da equação diferencial resultante.

Potencial vectorial $\boldsymbol{\psi}$

Se o escoamento é incompressível ($\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0$), então a velocidade pode ser escrita como o rotacional de uma função potencial vectorial (definida a menos de uma campo vectorial irrotacional):

$$\boldsymbol{V} = \nabla \times \boldsymbol{\psi}$$

Se, aliás, aplicamos a condição (norma) $\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0$, então o potencial vector fica definido a menos de um vector constante.
O potencial vector resulta de utilidade para escoamentos bidimensionais.
Em um escoamento no plano $x - y$, podemos demonstrar que o potencial vector tem componente somente na direção z, $\boldsymbol{\psi} = (0,\ 0,\ \psi)$; neste caso, essa componente é conhecida como *função corrente*.

Condições de contorno e cálculo da pressão

Devido a que a equação de momento é de primeira ordem na velocidade, não é possível satisfazer a condição de não escorregamento e a condição de contorno em uma parede é a condição de imprenetrabilidade (velocidade normal à parede nula):

$$V_n = \boldsymbol{V} \cdot \breve{\boldsymbol{n}} = 0$$

Notar que a componente tangencial da velocidade em uma parede resulta da solução do problema.
Conhecido o campo de velocidade (seja através do potencial escalar ou do potencial vectorial), para calcular o campo de pressão podemos utilizar a equação de Bernoulli:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 + \mathcal{U} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2} V_0^2 + \mathcal{U}_0 - \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{r}$$

onde $\boldsymbol{r}_0$ é uma posição de referência. Uma característica do escoamento potencial é que as equações de movimento não têm nenhum parâmetro característico; os únicos parâmetros resultarão das condições de contorno.

Propriedades matemáticas

Considerando um escoamento bidimensional:

$$u = u\left(x,\, y\right) \quad ; \quad v = v\left(x,\, y\right) \quad ; \quad w = 0$$

Da condição de irrotacionalidade e incompressibilidade:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nabla^2 u = 0 \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \nabla^2 v = 0 \end{array}$$

isto é, as componentes da velocidade são também funções harmônicas.

Linhas equipotenciais e linhas de corrente

Utilizando a função potencial $\phi\,(x,\,y)$:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}\,dy = u\,dx + v\,dy$$

Em uma linha equipotencial:

$$d\phi = 0 \;\Rightarrow\; \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\phi} = -\frac{v}{u}$$

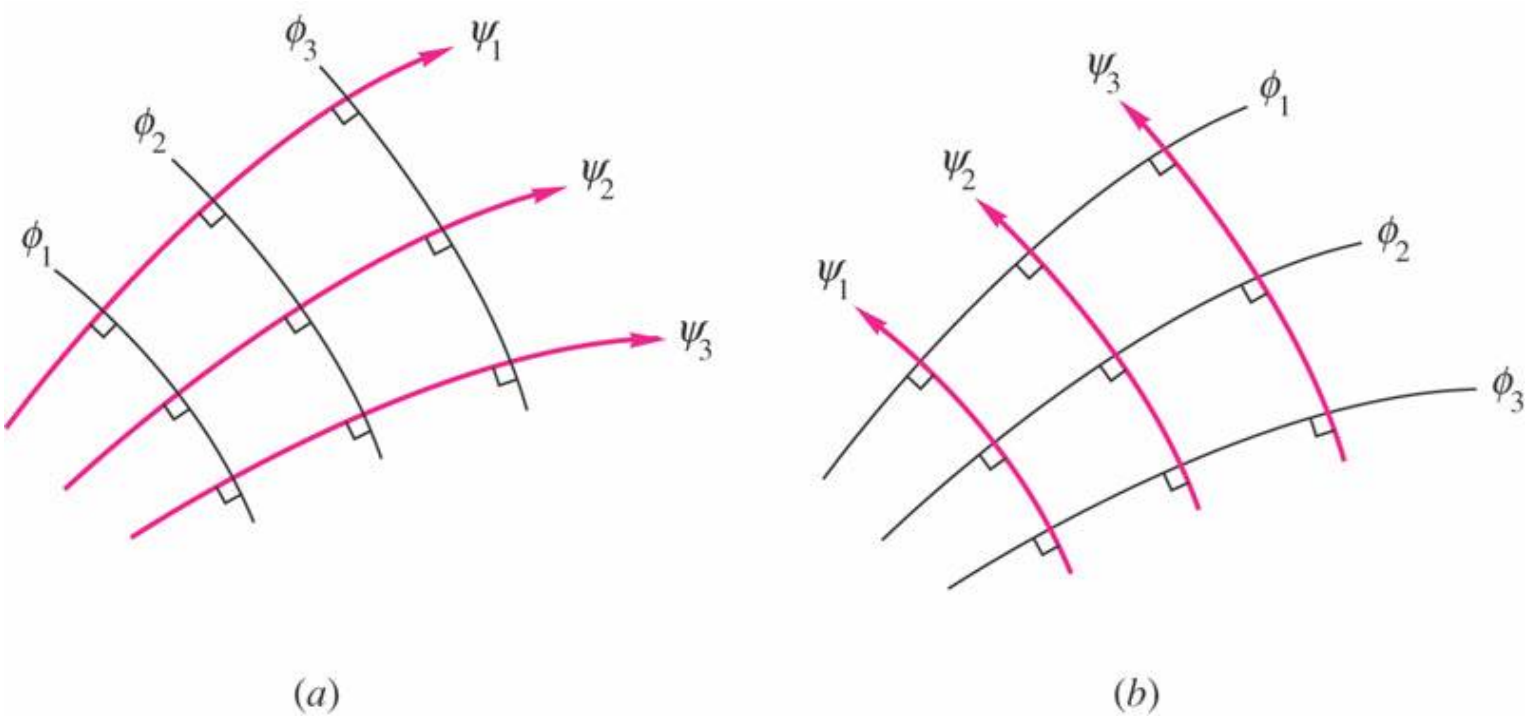
Utilizando o potencial vectorial para escoamento bidimensional, $\boldsymbol{\psi} = \psi\,(x,\,y)\,\breve{\boldsymbol{k}}$ e resulta $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ e $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$. O diferencial da função corrente resulta:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}\,dy = -v\,dx + u\,dy$$

Em uma linha de função corrente constante:

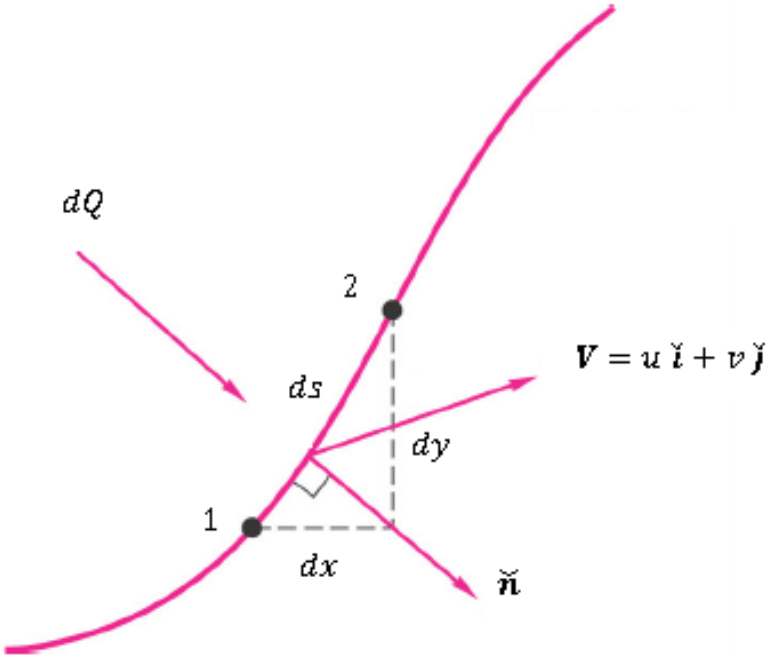
$$d\psi = 0 \;\Rightarrow\; \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\psi} = \frac{v}{u} = -\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\phi}\right]^{-1}$$

Linhas equipotenciais e linhas de corrente



As linhas de função corrente constante coincidem com as linhas de corrente e são perpendiculares às linhas equipotenciais.

Função corrente e vazão volumétrica



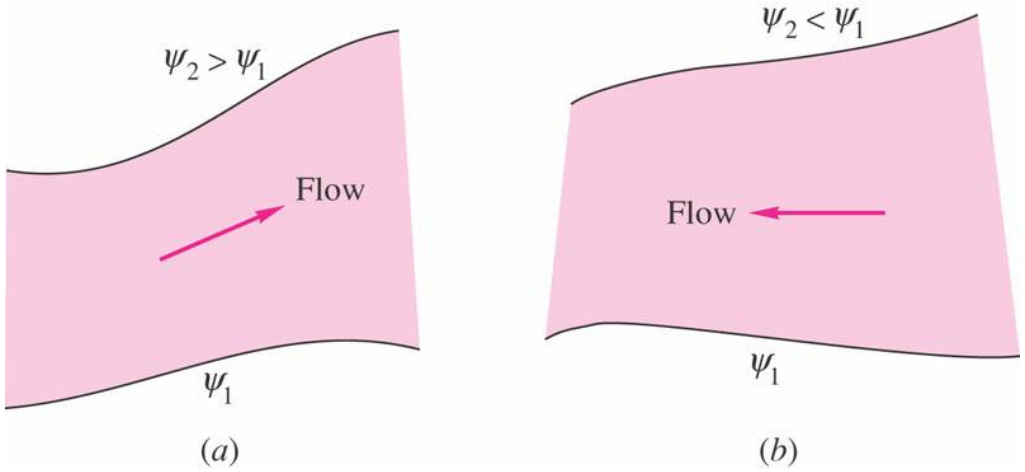
Considerando o volume de controle do triângulo de lados dx, dy e ds, resulta:

$$dQ_{12} = dQ = u\,dy - v\,dx = \frac{\partial \psi}{\partial y}\,dy - \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)\,dx = \frac{\partial \psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}\,dy = d\psi$$

Integrando, obtemos:

$$Q_{12} = \psi_2 - \psi_1$$

Função corrente e vazão volumétrica



A vazão por unidade de comprimento na direção normal que atravessa qualquer linha entre dois pontos é igual à diferença entre as funções corrente nesses pontos. Não existe escoamento atravessando uma linha de corrente, pelo qual pode ser enxergada como uma superfície sólida.

Da condição de irrotacionalidade, resulta que ψ também é harmônica:

$$(\nabla \times \boldsymbol{V})_z = 0 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = -\nabla^2 \psi$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \psi = 0$$

Equação de Laplace bidimensional

A equação de Laplace foi amplamente estudada em Eletromagnetismo e na Hidrodinâmica. É uma equação linear. Podemos demonstrar que a solução existe e é unica (a menos de uma constante) para recintos simplemente conexos (os que não apresentam corpos fechados); no contrário a solução está definida a menos de uma circulação Γ.

Algumas ferramentas para sua resolução:

(a) Superposição (separação de variáveis, funções de Green, etc.);

(b) Métodos numéricos (FDM, FEM, FVM, etc.);

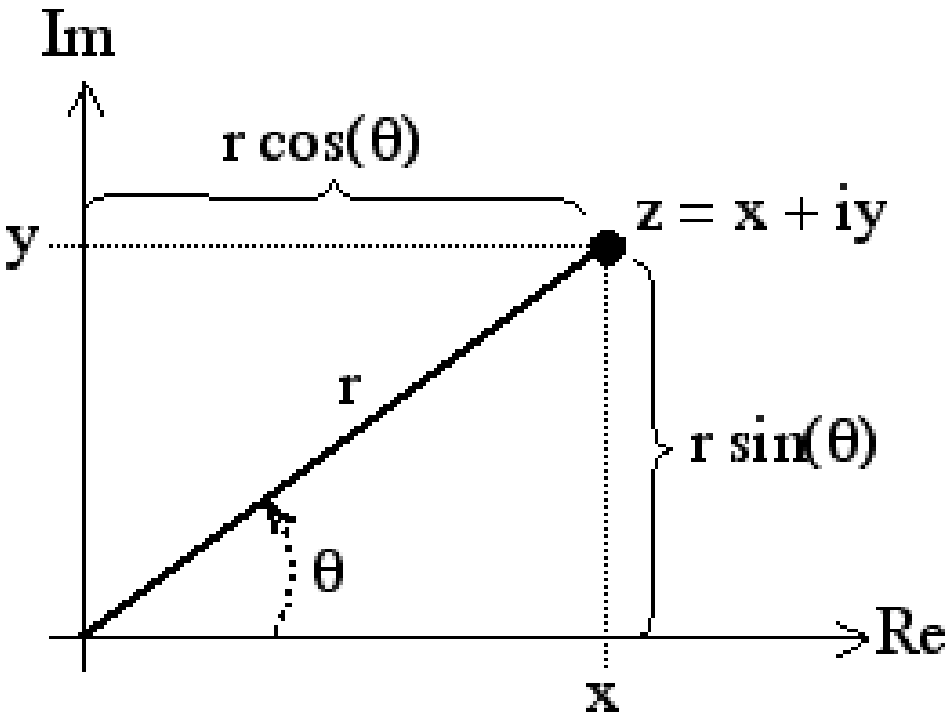
(c) Mapeamento conforme em variável complexa;

(d) Analogias elétricas e magnéticas, e

(e) Analogias mecânicas.

Notar que podemos aplicar superposição linear para ϕ e ψ (e a velocidade), mas não para a pressão, que depende do quadrado da velocidade.

Variável complexa



A variável complexa z é definida por um par $(x,\ y)$ em coordenadas cartesianas ou $(r,\ \theta)$ em coordenadas polares:

$$z = x + i\,y$$

$$z = r\,(\cos\theta + i\ \sin\theta) = r\ \exp\,(i\,\theta)$$

Condições de Cauchy - Riemann

Por um conhecido teorema da variável complexa, se uma função $F(z) = \mathrm{Re}(x, y) + i\,\mathrm{Im}(x, y)$ é analítica (F e suas derivadas são contínuas), então as partes reais e complexa satisfazem as condições de Cauchy - Riemann:

$$\frac{\partial \mathrm{Re}}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{Im}}{\partial y} \; ; \; \frac{\partial \mathrm{Re}}{\partial y} = -\frac{\partial \mathrm{Im}}{\partial x}$$

Podemos deduzir facilmente que $\nabla^2 \mathrm{Re} = 0$ e $\nabla^2 \mathrm{Im} = 0$, isto é, as partes real e imaginária são funções harmônicas. Se fazemos $\mathrm{Re} \equiv \phi$ e $\mathrm{Im} \equiv \psi$, as condições são:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = u \; ; \; \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = v$$

Vemos que qualquer transformação analítica $F(z)$ representa um escoamento potencial.

Velocidade complexa

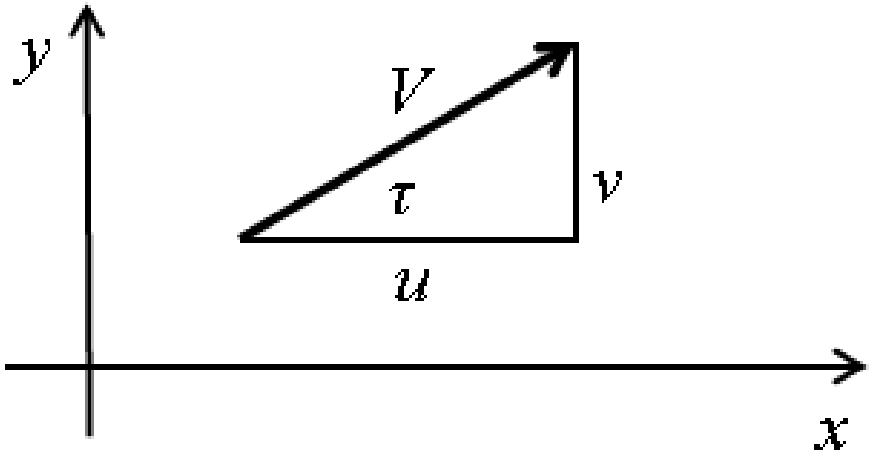
Definindo a velocidade complexa w como:

$$w = u + i\,v$$

resulta:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y = \frac{dF}{dz}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \frac{dF}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\,\frac{\partial \psi}{\partial x} = u - i\,v = \tilde{w}$$

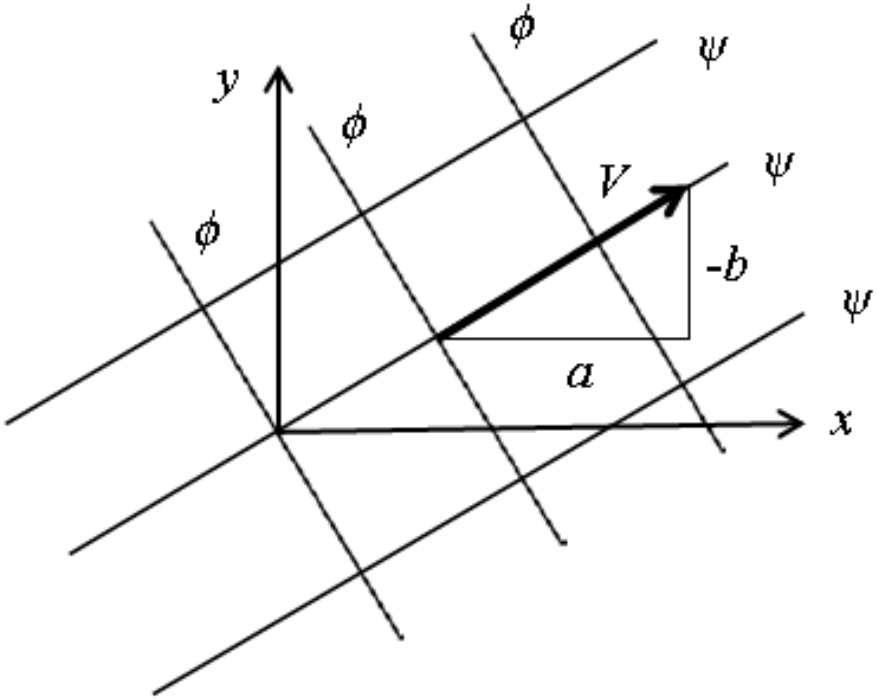
$$\Rightarrow \frac{dF}{dz} = \tilde{w} \quad (\tilde{}\,: \text{complexo conjugado})$$



$$w = u + i\,v = V\,\exp\left(i\,\tau\right)$$
$$\tilde{w} = u - i\,v = V\,\exp\left(-i\,\tau\right)$$
$$\Rightarrow w\,\tilde{w} = V^2$$

onde $V = \left(u^2 + v^2\right)^{1/2}$ e $\tau = \tan^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)$.

Corrente uniforme



$$F(z) = (a + i\,b)\,z$$

onde a e b são constantes reais.

$$\frac{dF}{dz} = \tilde{w} = a + i\,b = u - i\,v$$

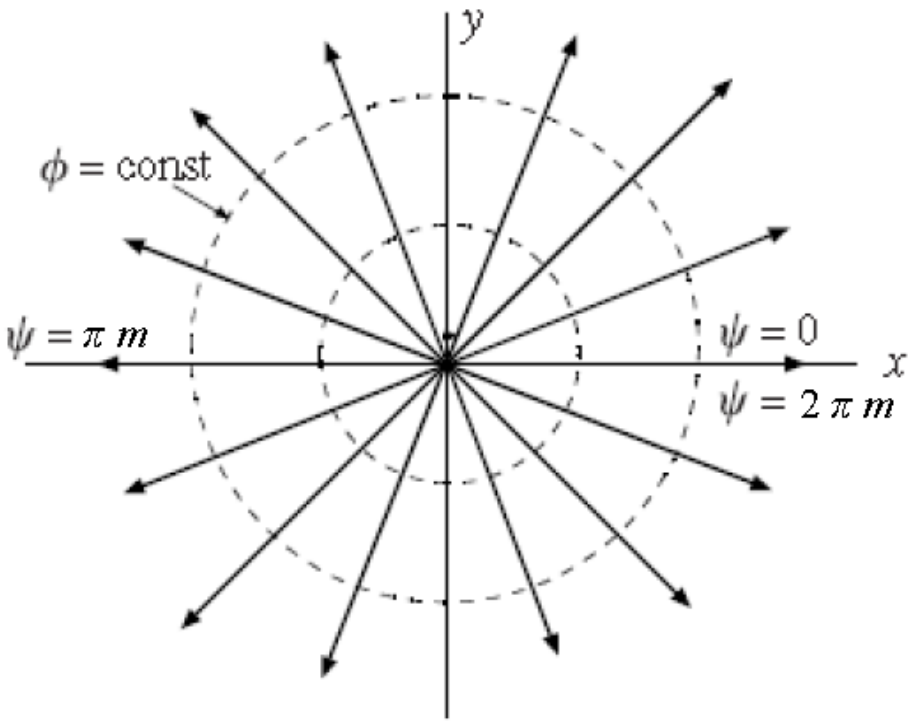
$$\Rightarrow \begin{cases} u = a \\ v = -b \end{cases}$$

$$F(z) = (a + i\,b)(x + i\,y) = (a\,x - b\,y) + i\,(b\,x + a\,y) = \phi + i\,\psi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi = a\,x - b\,y = r\,(a\cos\theta - b\,\sin\theta) \\ \psi = b\,x + a\,y = r\,(b\cos\theta + a\,\sin\theta) \end{cases}$$

Se $b = 0$, teremos uma corrente uniforme paralela ao eixo x. Analogia elétrica: campo elétrico entre placas planas de um capacitor.

Fonte ou sumidouro



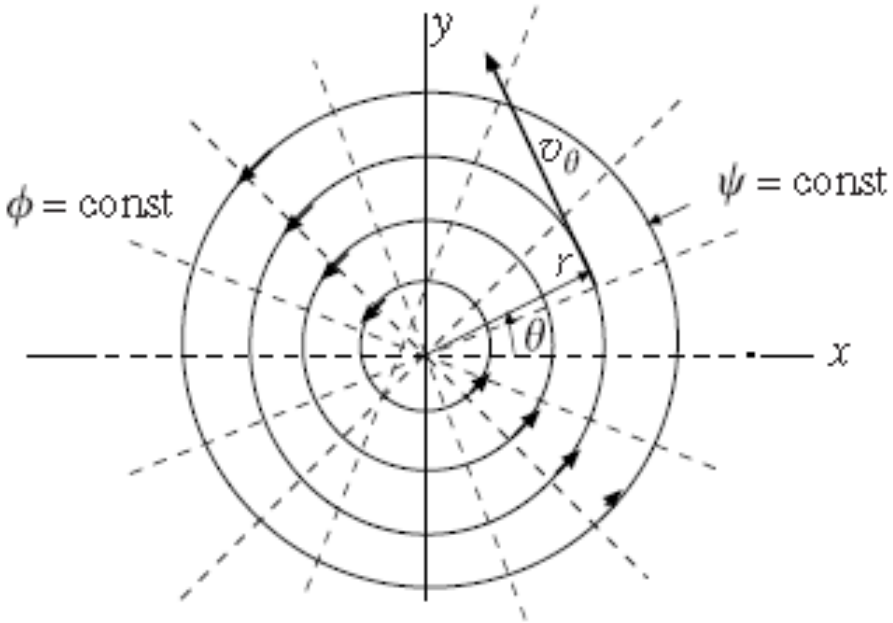
$$F(z) = m\,\ln z = m\,\ln\left[r\,\exp(i\,\theta)\right]$$
$$= m\,\ln r + i\,m\,\theta = \phi + i\,\psi$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \phi = m\,\ln r \\ \psi = m\,\theta \end{cases}$$
$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{m}{r}$$
$$v_\theta = \frac{1}{r}\,\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0$$

ou, mais elegantemente,

$$\tilde{w} = \frac{dF}{dz} = \frac{m}{z} = \frac{m}{r}\,\exp(-i\,\theta)$$
$$\Rightarrow w = \frac{m}{r}\,\exp(i\,\theta)$$

A vazão volumétrica por unidade de comprimento que atravesa qualquer circunferência de raio r resulta $Q = 2\,\pi\,r\,v_r = 2\,\pi\,m$. Analogia elétrica: campo elétrico em uma linha infinita de carga.

Vórtice potencial



$$
\begin{aligned}
F(z) &= -i\,K\,\ln z \\
&= -i\,K\,\ln\left[r\,\exp(i\,\theta)\right] \\
&= -i\,K\,\ln r + (-i\,K)\,i\,\theta \\
&= K\,\theta - i\,K\,\ln r = \phi + i\,\psi
\end{aligned}
$$

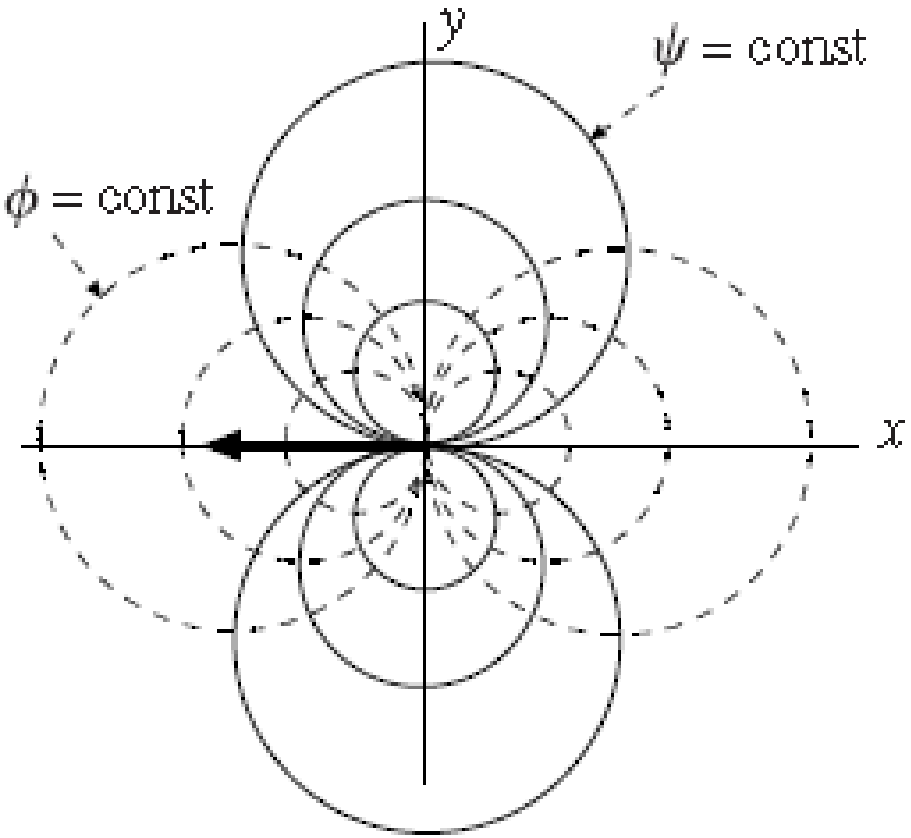
$$
\Rightarrow \begin{cases} \phi = K\,\theta \\ \psi = -K\,\ln r \end{cases}
$$

$$
v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0
$$

$$
v_\theta = \frac{1}{r}\,\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{K}{r}
$$

A circulação em uma linha fechada que inclui a origem de coordenadas vale $\Gamma = 2\,\pi\,r\,v_\theta = 2\,\pi\,K$. Se a linha não inclui a origem, então $\Gamma = 0$. Analogia elétrica: campo magnético em uma linha infinita de corrente.

Dipolo



$$F(z) = \lim_{\substack{a \to 0 \\ 2\,a\,m \to \lambda}} \left[m \ln \left(\frac{z+a}{z-a} \right) \right]$$

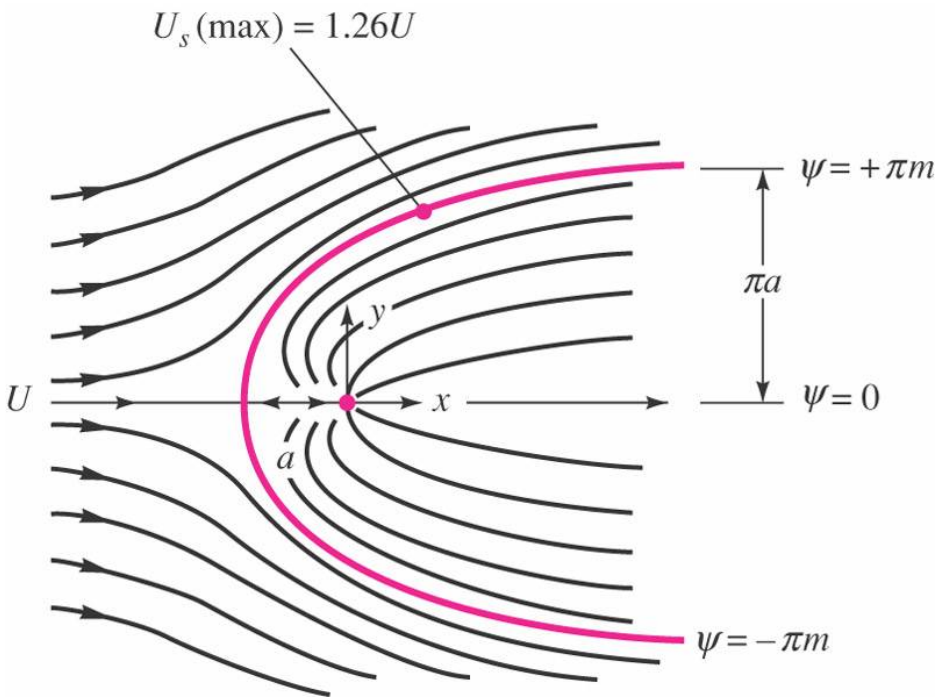
Resultam:

$$\phi = \frac{\lambda}{r} \cos\theta$$

$$\psi = -\frac{\lambda}{r} \sin\theta$$

O dipolo é obtido como o limite da superposição de uma fonte em $x = -a$ e um sumidouro em $x = a$, aproximando o par à origem de coordenadas e mantendo o produto $2\,a\,m = \lambda$ constante. Analogia elétrica: dipolo elétrico.

Semicorpo de Rankine



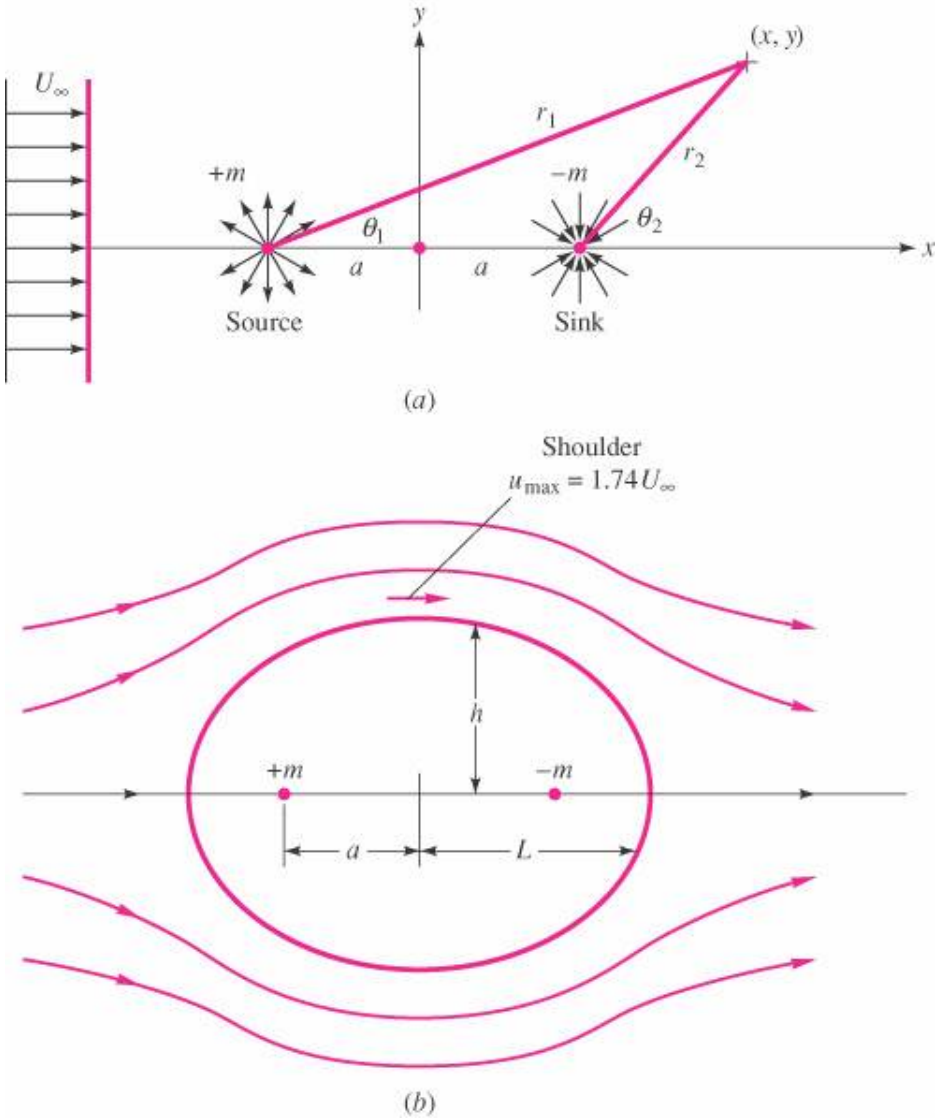
$$F(z) = U\,z + m\,\ln z$$

Resultam:

$$\phi = U\,r\,\cos\theta + m\,\ln r$$
$$\psi = U\,r\,\sin\theta + m\,\theta$$

O semicorpo é obtido como a superposição de uma corrente uniforme e uma fonte na origem.
Existe um ponto de estagnação em $x = -a$, onde $a = \frac{m}{U} = \frac{Q}{2\,\pi\,U}$.
A velocidade máxima na superfície é $V_{s\,max} \approx 1,26\,U$ para $\theta \approx 63^o$.
Para $x \to \infty$, o largo do semicorpo é $2\,\pi\,a = 2\,\pi\,\frac{m}{U} = \frac{Q}{U}$.

Óvalo de Rankine



$$F(z) = U_\infty z + m \ln\left(\frac{z+a}{z-a}\right)$$

Resulta:

$$\psi = U r \sin\theta + m(\theta_1 - \theta_2)$$

A solução depende do parâmetro $\beta = \frac{m}{U_\infty a}$.

Pontos de estagnação em $x = \pm L$, onde $\frac{L}{a} = (1 + 2\beta)^{1/2}$.

Ombros do corpo em $y = \pm h$, onde $\frac{h}{a} = \cot\left(\frac{\frac{h}{a}}{2\beta}\right)$

A velocidade máxima no ombro é $\frac{u_{max}}{U_\infty} = 1 + \frac{2\beta}{1+\left(\frac{h}{a}\right)^2}$.

Para $\beta \to \infty$, o largo do semicorpo é $\frac{L}{h} \to 1$ e $\frac{u_{max}}{U_\infty} \to 2$ (cilindro infinito).

Desenho e valores para $\beta = 1$.

Escoamento em torno de um canto

O escoamento em torno de um canto de ângulo arbitrário são gerados com:

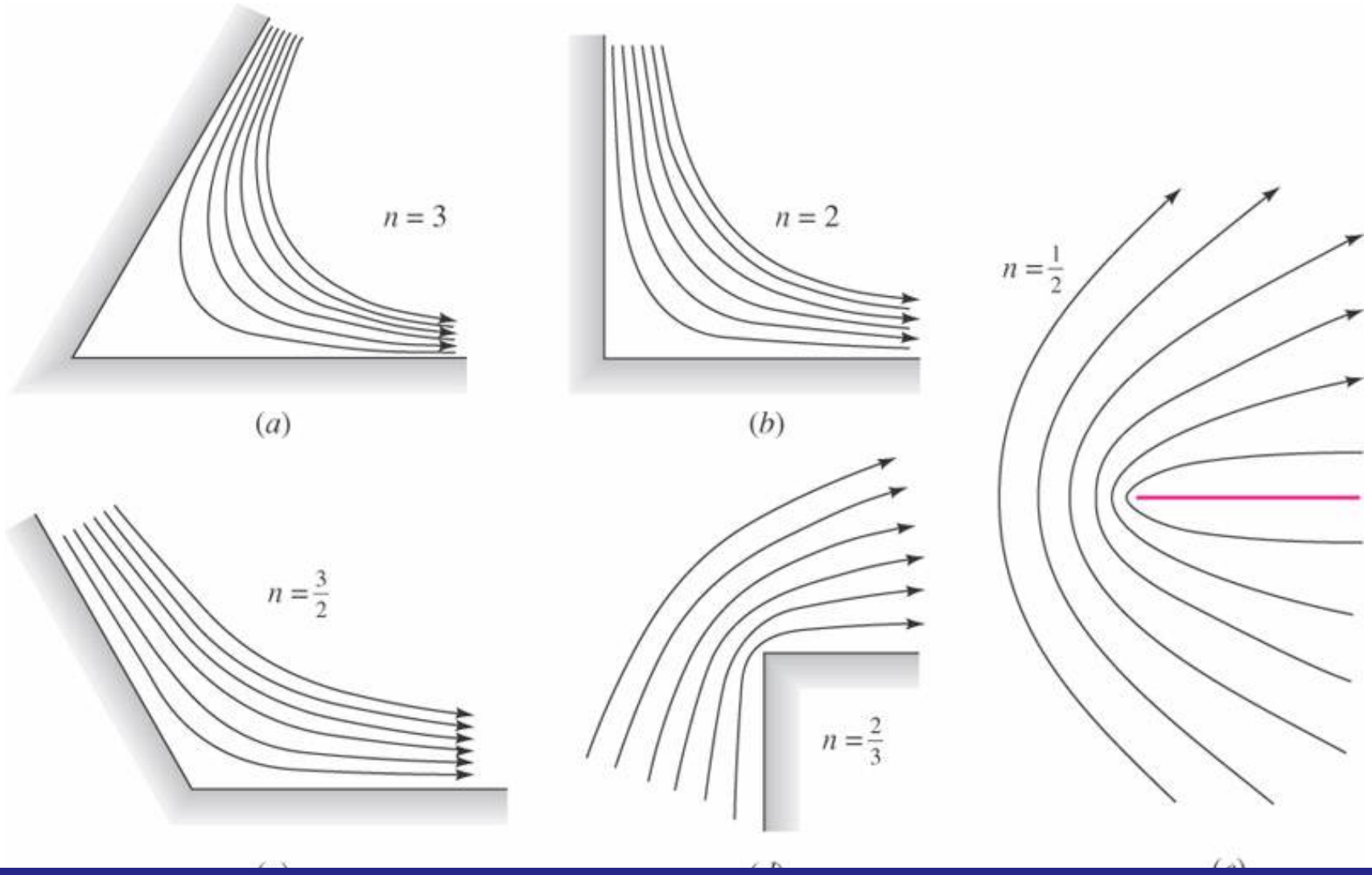
$$F(z) = \frac{1}{n} z^n = \frac{1}{n} [r \exp(i\theta)]^n = \frac{r^n}{n} \exp(i n \theta) = \frac{r^n}{n} [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$$

$$\psi = \frac{r^n}{n} \sin(n\theta)$$

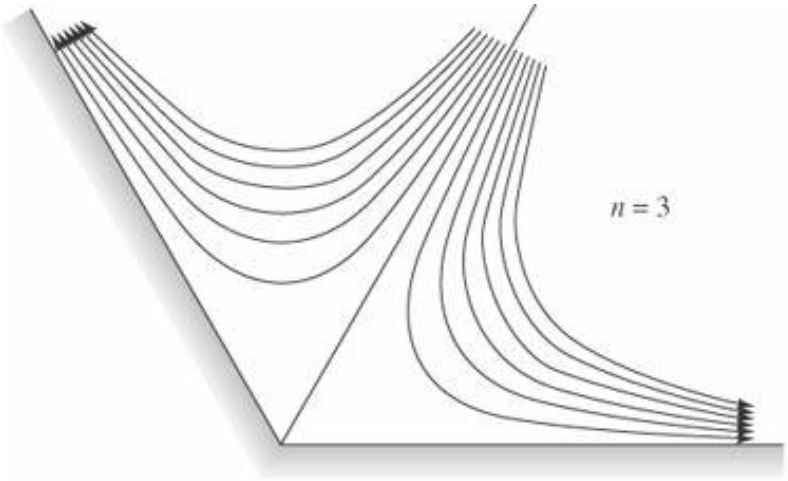
Vemos que $\psi = 0$ para $\theta = 0, \frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \ldots, \frac{k\pi}{n}$, com k inteiro.
Por exemplo, para $n = 2$:

$$\psi = \frac{r^2}{2} \sin(2\theta) = r^2 \sin\theta \cos\theta = x y$$

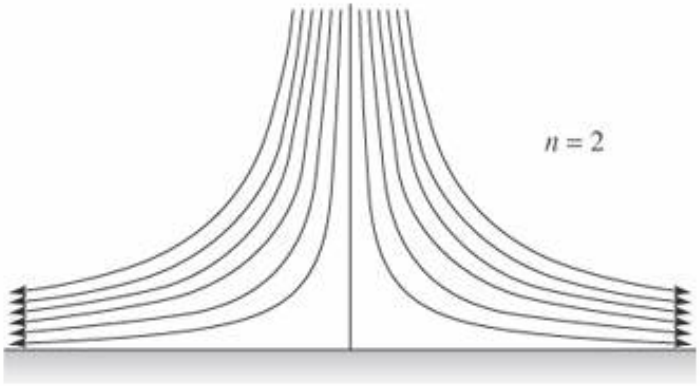
Escoamento em torno de um canto



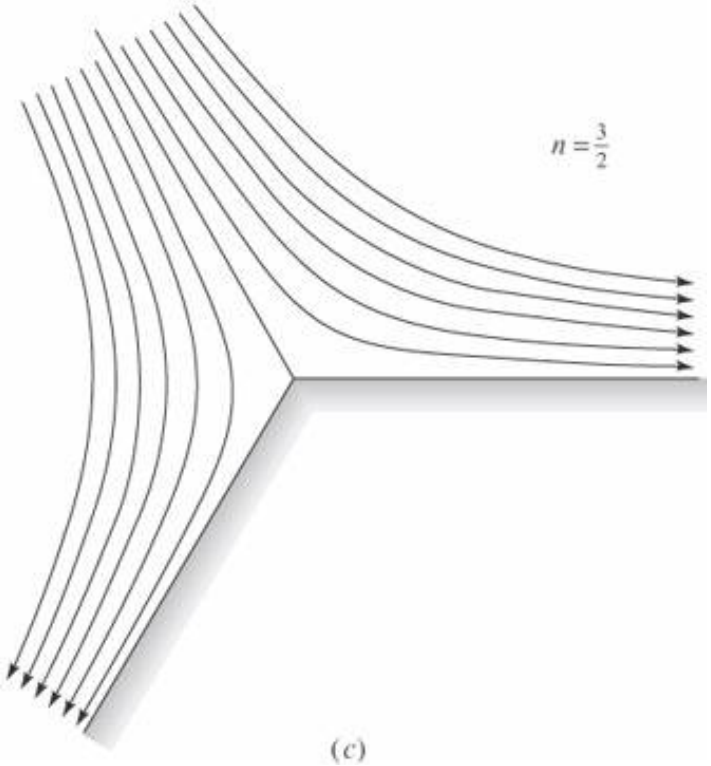
Escoamento em torno de um canto



(a)



(b)



(c)

Escoamento em torno de um cilindro circular

Os escoamentos em torno de um cilindro circular são gerados com a superposição de uma corrente uniforme U_∞, um dipolo de intensidade $\lambda = U_\infty\, a^2$ (onde a é o raio do cilindro) e um vórtice:

$$F(z) = U_\infty \left(z + \frac{a^2}{z} \right) - i\, K \ln z$$

$$\psi = U_\infty\, a \left(\frac{r}{a} - \frac{a}{r} \right) \sin\theta - K\, \ln r$$

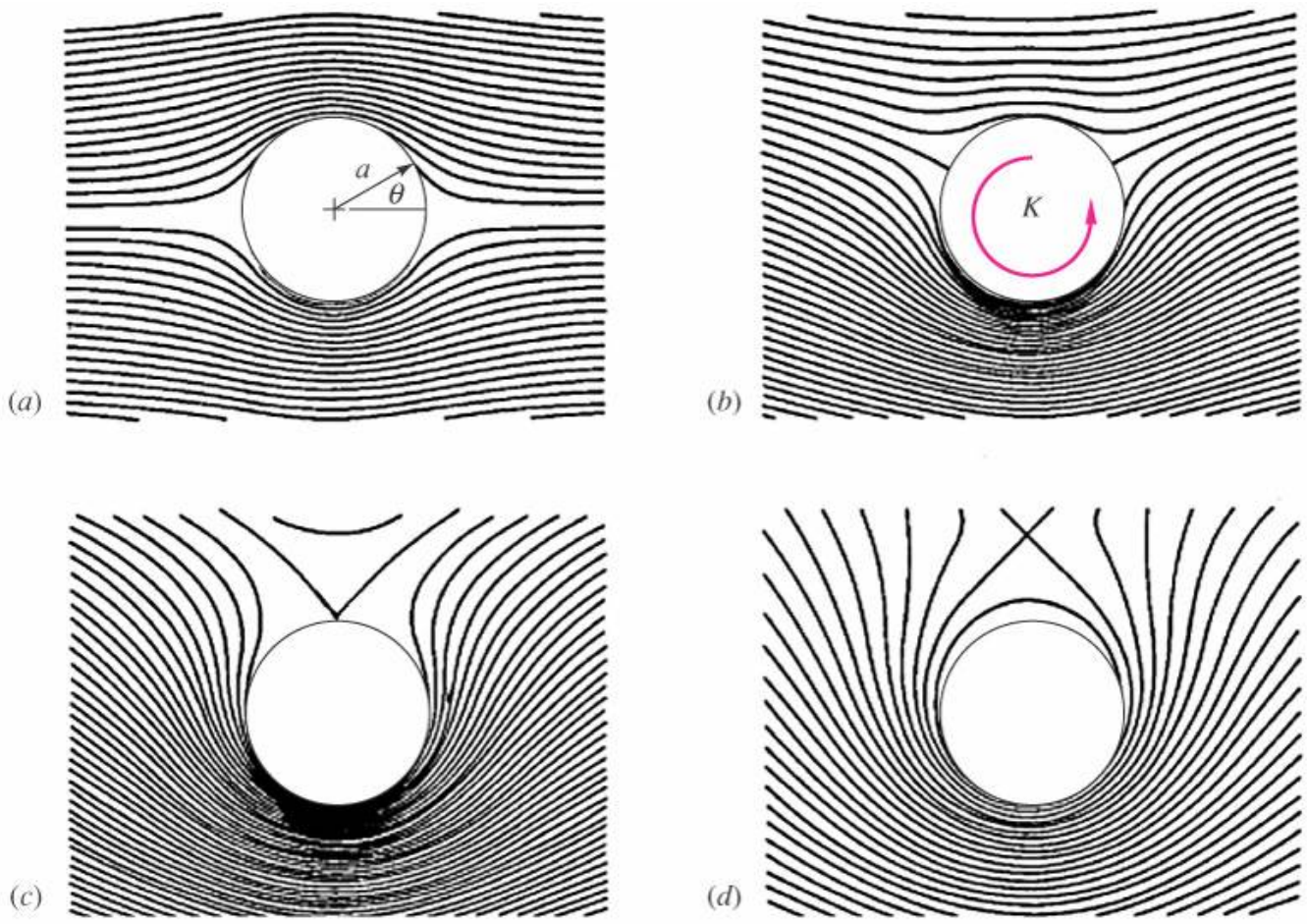
$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U_\infty \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos\theta \;;\; v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -U_\infty \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin\theta + \frac{K}{r}$$

A velocidade na superfície do cilindro é puramente tangencial:

$$v_{r\,s} = 0 \;;\; v_{\theta\,s} = -2\, U_\infty\, \sin\theta + \frac{K}{a}$$

A solução depende do parâmetro $\beta = \frac{K}{U_\infty\, a}$. Para $\beta \leq 2$ existem dois pontos de estagnação na superfície, cuja posição angular satisfaz $\sin\theta_s = \frac{1}{2}\,\beta$.

Escoamento em torno de um cilindro circular



(a) $\beta = 0$; (b) $\beta = 1$; $\beta = 2$; $\beta = 3$.

Escoamento em torno de um cilindro circular

Utilizando Bernoulli, a distribuição de pressão na superfície do cilindro resulta:

$$p_s(\theta) - p_\infty = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 \left(1 - 4\sin^2\theta + 4\beta\cos\theta - \beta^2\right)$$

As forças de arrasto e sustentação por unidade de profundidade b resultam:

$$\frac{\mathcal{D}}{b} = -\int_0^{2\pi} (p_s - p_\infty)\, a \cos\theta\, d\theta = 0$$

$$\frac{\mathcal{L}}{b} = -\int_0^{2\pi} (p_s - p_\infty)\, a \sin\theta\, d\theta = -\rho U_\infty 2\pi K = -\rho U_\infty \Gamma$$

O resultado anterior é independente da geometria do corpo e pode ser generalizado como:

Segundo a teoria não-viscosa, o arrasto de qualquer corpo de qualquer formato, imerso em uma corrente uniforme, é identicamente nulo (paradoxo de D´Alembert).

Segundo a teoria não-viscosa, a sustentação por unidade de profundidade em qualquer corpo de qualquer formato, imerso em uma corrente uniforme, é igual a $-\rho U_\infty \Gamma$, *onde* Γ *é a circulação líquida contida no corpo* (teorema de Kutta-Joukowski).