

Instituto de Física da USP
Física Moderna I – 4300375
1º Semestre de 2014
Profª Márcia de Almeida Rizzutto

1ª Lista de Exercícios

1 Revisão de Física Estatística

- 1 A lei da equipartição da energia requer que o calor específico dos gases seja independente da temperatura, o que não está de acordo com a experiência. Vimos que essa lei conduz à lei de radiação de Rayleigh-Jeans, que também não está de acordo com a experiência. Como você pode relacionar nestes dois casos a não validade da lei da equipartição?
- 2 Qual a origem a catástrofe do ultravioleta?
- 3 Considere que a distribuição de velocidades de uma molécula de um gás ideal é dada por:

$$f(v_x, v_y, v_z) = A \exp \left\{ -\frac{m}{2k_B T} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right\}$$

e determine:

- a) A constante A .
 - b) A distribuição $f(v)$, onde $v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ é o módulo da velocidade.
- 4 Seja uma molécula que obedece à distribuição de Maxwell-Boltzmann de velocidades.
 - a) Determine a velocidade mais provável v_{mp} e esboce um gráfico de v_{mp} em função da temperatura T .
 - b) Determine a $\langle v \rangle$, $\langle v^2 \rangle$ e $\sigma = \sqrt{\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2}$. Esboce gráficos destas três grandezas como função da temperatura T .
 - c) Discuta o significado dos resultados dos itens (a) e (b) para $T \rightarrow 0$ e $T \rightarrow \infty$.

2 Experimento de Thomson e Experimento de Millikan

- 1 Há grandezas quantizadas na física clássica? A energia é quantizada na física clássica?
- 2 Faz sentido falar na quantização de carga em física? Em que isto é diferente da quantização da energia?
- 3 As partículas elementares parecem ter um conjunto discreto de massas de repouso. Pode-se encarar este fato como uma quantização da massa?
- 4 Se os elétrons de um feixe têm energia de 2 keV, determine:
 - a) A velocidade dos elétrons.
 - b) O tempo que os elétrons levam para percorrer uma distância de 5 cm entre as placas defletoras do experimento de Thomson.

- c) A componente vertical da velocidade dos elétrons depois de passarem pelas placas, se o campo elétrico é $3,33 \cdot 10^3$ V/m.
- 5 Estamos interessados em usar um espectrômetro de massa para separar átomos de ^{197}Au e ^{198}Hg em uma certa amostra. Usando as massas atômicas e supondo que todos os átomos estejam monoionizados e entrem no espectrômetro com uma velocidade de $1,5 \cdot 10^5$ m/s, responda:
- a) Qual deve ser o valor de um campo magnético uniforme, perpendicular à velocidade dos íons, para que as trajetórias dos mesmos tenha um raio de 1m (aproximadamente)?
- b) Qual será a diferença ΔR entre os pontos de impacto depois que os íons dos dois tipos descreverem semicírculos completos?
- c) Quais seriam as respostas dos itens (a) e (b) se todos os átomos estivessem duplamente ionizados?
- 6 Para uma gota de óleo de raio a , caindo sob ação somente da força da gravidade e da resistência do ar, determina-se a velocidade de queda pela medida do tempo de queda numa distância de 1 mm. Sabendo-se que a densidade de óleo é igual a $0,8$ g/cm³, e que o coeficiente da viscosidade do ar é $\rho = 1,8 \cdot 10^{-4}$ poises (sistema CGS), faça uma tabela de valores do raio em função do tempo de queda, para t_q variando de 0s a 40s em intervalos de 5s.

3 Radiação de Corpo Negro

- 1 Um corpo negro sempre aparenta ser negro? Explique o significado do termo.
- 2 Se observamos uma cavidade cujas paredes são mantidas a temperatura constante, os detalhes do interior não são visíveis. Explique.
- 3 Um pedaço de metal brilha com uma cor vermelha brilhante a 1100 K. Nesta mesma temperatura, no entanto, um pedaço de quartzo absolutamente não brilha. Explique.
- 4 A radiação cósmica de fundo apresenta a distribuição espectral de um corpo negro a temperatura de 2,7 K.
- a) Qual é o comprimento de onda da radiação de fundo para o qual a intensidade é máxima?
- b) Qual é a frequência de radiação neste ponto do espectro?
- c) Qual a potência total da radiação de fundo que incide sobre nosso planeta?
- 5 Obtenha a lei do deslocamento de Wien, $\lambda_{max}T = 0,2014hc/k$, resolvendo a equação $d\rho(\lambda)/d\lambda = 0$. (Sugestão: Faça $hc/\lambda kT = x$ e mostre $x = 4,965$ é a solução.)
- 6 A relação $R_T = \sigma T^4$ é exata para corpos negros e se mantém para todas as temperaturas. Porque esta relação não é usada como a base de uma definição de temperatura a, por exemplo, 100°C?
- 7 Assumindo que o diâmetro do sol é $1,4 \cdot 10^9$ m, que sua massa é de $2,0 \cdot 10^{30}$ kg e que sua temperatura de superfície é de 5700 K
- a) use a lei de Stefan para determinar a massa perdida pelo sol, por segundo, devido a radiação eletromagnética.
- b) Qual a fração da massa solar perdida por ano através da radiação eletromagnética?
- 8 A uma dada temperatura, $\lambda_{max} = 6500\text{Å}$ para uma cavidade de corpo negro. Qual será λ_{max} se a temperatura das paredes da cavidade for aumentada de modo que a taxa de emissão de radiação espectral seja dobrada?

4 Efeito Fotoelétrico

- 1 Nas experiências do efeito fotoelétrico, a corrente (número de elétrons emitidos por unidade de tempo) é proporcional à intensidade da luz. Esse resultado isolado pode ser usado para fazer a distinção entre as teorias quântica e clássica?
- 2 A respeito do efeito fotoelétrico, responda as seguintes questões:
 - a) Porque mesmo para radiação monocromática fotoelétrons são emitidos com diversas velocidades?
 - b) A existência de uma frequência de corte no efeito fotoelétrico é frequentemente considerada a mais forte objeção à teoria ondulatória. Explique porquê.
 - c) Porque medidas do efeito fotoelétrico são muito sensíveis a natureza da superfície fotoelétrica?
- 3 Você pode usar o artifício de fazer $h \rightarrow 0$ para obter resultados clássicos a partir de resultados quânticos no caso do efeito fotoelétrico? Explique.
- 4 Radiação de comprimento de onda de 2000\AA incide sobre uma superfície de alumínio. Para o alumínio são necessários $4,2\text{ eV}$ para remover um elétron. Qual a energia cinética do fotoelétron emitido:
 - a) mais rápido?
 - b) mais lento?
 - c) Qual é o potencial de corte?
 - d) Qual é o comprimento de onda limite para o alumínio?
 - e) Se a intensidade da luz incidente é $3,2\text{ W/m}^2$, qual é o número médio de fótons por unidade de tempo e por unidade de área que atinge a superfície?
- 5 A tabela abaixo mostra o potencial de corte em função do comprimento de onda para o efeito fotoelétrico em uma amostra de sódio. Faça um gráfico com base nesses dados e use-o para determinar:
 - a) A função trabalho.
 - b) A frequência de corte.
 - c) A razão h/e .

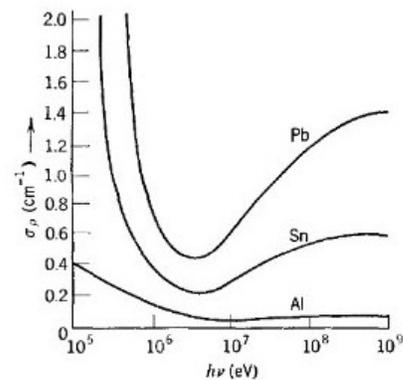
λ (nm)	200	300	400	500	600
V_0 (V)	4,20	2,06	1,05	0,41	0,03

- 6 A energia necessária para remover um elétron do sódio é $2,3\text{ eV}$.
 - a) Há efeito fotoelétrico no sódio para luz amarela de comprimento de onda 5890\AA ?
 - b) Qual é o comprimento de onda de corte para emissão fotoelétrica do sódio?
- 7 Considere uma placa fotográfica iluminada por uma fonte luminosa. A luz será gravada se ela dissociar uma molécula de AgBr na placa. A energia mínima para a dissociação é da ordem de 10^{-19} J . Qual a região de comprimentos de onda para a qual a luz não será gravada?
- 8 Sob condições ideais o olho humano registra um estímulo visual a 5500\AA se mais de 100 fótons forem absorvidos por segundo. A que potência isso corresponde?

5 Efeito Compton, Produção de Pares e Atenuação

- 1 Quais são a frequência, o comprimento de onda e o momento de um fóton cuja energia é igual a energia de repouso de um elétron?
- 2 Você pode observar efeito Compton com a luz visível? Por quê?
- 3 Pode ocorrer a aniquilação de elétron-pósitron com a criação de um fóton se houver um núcleo próximo para absorver momento?
- 4 Qual seria o inverso do processo no qual dois fótons são criados na aniquilação elétron-pósitron? Ele pode ocorrer? É provável que ele ocorra?
- 5 Fótons com comprimento de onda $0,024 \text{ \AA}$ incidem sobre elétrons livres.
 - a) Qual é o comprimento de onda de um fóton espalhado de um ângulo de 22° em relação à direção de incidência e qual a energia cinética transmitida ao elétron?
 - b) E para um ângulo de 132° ?
- 6 A energia cinética máxima que pode ser fornecida ao elétron em um evento de espalhamento Compton é importante em determinadas análises espectrais. Essa energia máxima é conhecida como borda Compton. Suponha que a borda Compton medida em certo experimento seja 520 keV . Quais eram o comprimento de onda e energia dos raios gama incidentes?
- 7 Por qual ângulo um fóton deve ser espalhado por um elétron livre de modo que perca 10% de sua energia
 - a) se a energia do fóton for $0,20 \text{ MeV}$?
 - b) se a energia do fóton for $0,40 \text{ MeV}$?
 - c) Determine o desvio por efeito Compton no comprimento de onda em ambos os casos.
- 8 Produz-se um par de forma que o pósitron esteja em repouso e o elétron tenha uma energia cinética de $1,0 \text{ MeV}$ e se move na direção na qual o fóton que produziu o par incidiu.
 - a) Desprezando a energia transmitida ao núcleo do átomo próximo, ache a energia do fóton incidente.
 - b) Que porcentagem do momento do fóton é transferida ao núcleo?

- 9 Use os dados da figura ao lado para calcular a espessura de uma lâmina de chumbo que atenuie um feixe de raios X de 10 MeV por um fator de 100.



6 Raios-X: Produção, Raios-X Característicos e Difração

- 1 Um tubo de televisão emite raios X? Explique.
- 2 Você esperaria, segundo a teoria eletromagnética clássica, que houvesse um comprimento de onda mínimo na radiação emitida para um dado valor de energia do elétron incidente sobre o alvo de um tubo de raios X?
- 3 Discuta o processo de bremsstrahlung como sendo o inverso do efeito Compton. E como o inverso do efeito fotoelétrico.
- 4 a) Mostre que o comprimento de onda mínimo no espectro contínuo de raios X é dado por $\lambda_{min} = 12,4\text{Å}/V$, onde V é a voltagem aplicada, em kilovolts.
b) Se a voltagem aplicada a um tubo de raios X é 186 kV, quanto vale λ_{min} ?
- 5 a) Calcule o segundo e terceiro maiores comprimentos de onda da série K do molibdênio.
b) Qual o menor comprimento de onda desta série?
- 6 a) Explique, com suas palavras, a equação

$$n\lambda = 2d \sin \phi$$

e faça um esboço da reflexão de Bragg.

- b) O espaçamento planar principal em um cristal de cloreto de potássio é de $3,14\text{Å}$. Compare o ângulo de reflexão de Bragg de primeira ordem, por esses planos, de elétrons com energia cinética de 40 keV com o de fótons de energia de 40 keV.

7 Dualidade Onda-Partícula e Quantização de Wilson-Sommerfeld

- 1 O comprimento de de Broglie se aplica apenas a "partículas elementares" como um elétron ou nêutron, ou também se aplica para sistemas compostos de matéria, dotados de estrutura interna? Dê exemplos e justifique.
- 2 Estudos cristalográficos poderiam ser realizados com prótons? E com nêutrons?
- 3 O comprimento de de Broglie pode ser menor que uma dimensão linear da partícula? E maior? Existe, necessariamente, alguma relação entre tais quantidades?
- 4 a) Como se explica os feixes regularmente refletidos em experimentos de difração de elétrons e raios-X?
b) Discuta que diferentes tipos de informações podem ser obtidas com experimentos de difração de raios-X e elétrons.
- 5 Sejam:
 - a) elétron com energia cinética de 50 eV.
 - b) elétron com energia total de 10 MeV.
 - c) nêutron em equilíbrio térmico com $T = 500\text{ K}$.
 - d) núcleo de ouro com energia cinética de 500 GeV.
 - e) grão de poeira de $1 \times 10^{-6}\text{ g}$ em equilíbrio térmico com a temperatura ambiente.

Calcule o comprimento de onda de de Broglie destes entes físicos e determine uma situação onde seu caráter ondulatório seria observado, para cada caso.

- 6 Um projétil de massa 40 g se move a 1000 m/s.
- Qual é o comprimento de onda que podemos associar a ela?
 - Porque sua natureza ondulatória não se revela por meio de efeitos de difração?
 - Qual seria a velocidade mínima para que observássemos difração para este projétil em uma fenda de $1 \mu\text{m}$?

7 Considere barra muito fina, de comprimento L e massa M girando em torno de um eixo que passa por seu centro.

- Aplice as regras de quantização de Wilson-Sommerfeld e mostre que os valores possíveis previstos para a energia total são:

$$E_n = \frac{6\hbar^2 n^2}{ML^2}$$

- Esboce os níveis de energia deste sistema.
 - Qual a energia do fóton que excita o sistema do estado fundamental para o estado $n = 4$?
 - Quais serão os níveis de energia obtidos se forem adicionadas duas esferas de massa m e raio $r \ll L$ nos extremos da barra?
- 8 Considere um oscilador harmônico simples unidimensional de massa m . Usando a regra de quantização de Wilson-Sommerfeld:

- Determine os níveis de energia deste sistema .
 - Esboce o diagrama de energias deste sistema.
 - O que acontece com estes níveis de energia se a massa é multiplicada por α ?
 - Qual a energia do fóton de menor energia emitido por uma transição neste sistema? A qual transição ele corresponde?
- 9 a) Usando a regra de quantização de Wilson-Sommerfeld, mostre que as energias de uma partícula de massa m , em movimento unidimensional livre de forças, entre duas paredes distantes L com as quais sofre colisões elásticas são dadas por:

$$E_n = \frac{n^2 (hc)^2}{8mc^2 L^2}$$

- Esboce o diagrama de níveis de energia (em eV) de elétrons dentro de uma caixa de 1Å de largura. Qual é o estado fundamental deste sistema?
 - Calcule os comprimentos de onda (em Å) dos fótons emitidos em uma transição de um estado n qualquer ao estado fundamental.
- 10 Em um experimento do tipo Franck-Hertz, hidrogênio atômico é bombardeado com elétrons e são encontrados potenciais de excitação em 10,21 V e 12,10 V.
- Esboce o diagrama de níveis de energia.
 - Explique a observação que três linhas espectrais acompanham estas excitações.
 - Agora, assuma que as diferenças de energia possam ser expressas como $h\nu$ e encontre os três valores permitidos de ν .
 - Suponha que um feixe de fótons de energia 12,10 eV passe por esta amostra. Esboce a intensidade do feixe antes e depois de passar pela amostra.

- 11 a) Considere um elétron em algum ponto dentro de um átomo de diâmetro 1Å . Qual é a incerteza no momento do elétron? Isto é consistente com a energia de ligação de elétrons em átomos?
- b) Imagine que um elétron esteja em algum ponto no interior de um núcleo de 10^{-12} cm . Qual é a incerteza no momento do elétron? Isto é consistente com a energia de ligação dos constituintes do núcleo?
- c) Considere agora um nêutron, ou um próton, como estando dentro desse núcleo. Qual é a incerteza no momento do nêutron, ou do próton? Isto é consistente com a energia de ligação dos constituintes do núcleo?
- 12 Em uma caixa unidimensional de largura $0,2\text{ nm}$ há partículas com energia cinética constante.
- a) Determine a mais baixa energia possível de um próton dentro desta caixa, segundo o princípio da incerteza.
- b) Determine a mais baixa energia possível de um elétron dentro desta caixa, segundo o princípio da incerteza.
- c) Explique a diferença entre os resultados encontrados.
- 13 Uma partícula de massa m oscila sujeita ao potencial $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$.
- a) Use o princípio da incerteza para calcular a energia mínima de oscilação em termos da frequência angular $\omega = \sqrt{k/m}$.
- b) Este resultado é consistente com o resultado da mecânica clássica? Explique, no contexto do princípio da correspondência, o resultado obtido no item anterior.
- 14 a) A energia de um estado nuclear de um experimento em particular pode ser medida com uma indeterminação de 1 eV . Qual é o tempo de vida mínimo deste estado, segundo o princípio da incerteza?
- b) A vida média de um estado excitado de um núcleo é normalmente de cerca de 10^{-12} s . Qual é a incerteza na energia do fóton de raio γ emitido?
- 15 a) Mostre que a menor incerteza possível na posição do elétron cuja velocidade é dada por $\beta = v/c$ é
- $$\Delta x_{min} = \frac{h}{4\pi m_0 c} \sqrt{1 - \beta^2}$$
- b) Qual o significado desta equação para $\beta = 0$? E $\beta = 1$?

8 Modelos Atômicos

- 1 Como modelo de Thomson difere de uma distribuição aleatória de elétrons e prótons em uma região esférica?
- 2 Destaque, justificando, quais os principais méritos e as principais limitações de cada um dos seguintes modelos atômicos e/ou de quantização:
- a) Thomson;
- b) Bohr;
- c) Wilson-Sommerfeld.
- 3 Qual deve ser o raio, no modelo de Thomson, de um átomo de hidrogênio para que ele irradie uma linha espectral de comprimento de onda $\lambda = 6000\text{Å}$? Comente seu resultado. (Sugestão: suponha que o movimento do e^- dentro do átomo seja de oscilações harmônicas em torno do centro da esfera).

- 4 Quais são a energia, o momento e o comprimento de onda de um fóton emitido por um átomo de hidrogênio ao fazer uma transição direta de um estado excitado com $n = 10$ para o estado fundamental? Obtenha a velocidade de recuo do átomo de hidrogênio neste processo.
- 5 Um feixe de partículas α , com energia cinética 5,30 MeV e intensidade 10^4 partículas por segundo, incide segundo a normal sobre uma folha de ouro de densidade $19,3 \text{ g/cm}^3$, peso atômico 197 e espessura $1,0 \times 10^{-5} \text{ cm}$. Um contador de partículas α de área $1,0 \text{ cm}^2$ é colocado a 10 cm de distância da folha. Se Θ é o ângulo entre o feixe incidente e uma linha que vai do centro da folha ao centro do contador, use a seção de choque diferencial de espalhamento de Rutherford para obter o número de contagens por hora para $\Theta = 10^\circ$ e $\Theta = 45^\circ$ (Dado: $Z_{\text{Au}} = 79$).
- 6 Usando o modelo de Bohr, calcule a energia necessária para remover um elétron de um átomo de Hélio ionizado.
- 7 Qual a distância de maior aproximação de uma partícula α com 5,30 MeV a um núcleo de cobre em uma colisão frontal?
- 8 O elétron de um átomo de hidrogênio transita do estado fundamental para o estado $n = 2$ e aí permanece por 10^{-8} s antes de decair de volta para o estado fundamental.
- a) Calcule a largura natural em eV da energia do estado $n = 2$.
- b) Determine a razão entre o seu resultado do item anterior com a energia deste nível segundo o modelo de Bohr.

9 Átomo de Bohr

- 1 Bohr postulou a quantização da energia? O que ele postulou?
- 2 Descreva brevemente os principais fenômenos que foram elucidados pela velha mecânica quântica e as principais limitações e críticas a esta teoria.
- 3 A energia de ionização do deutério é diferente da do hidrogênio?
- 4 Porque a estrutura da curva da corrente de Franck-Hertz versus voltagem não é composta por picos?
- 5 Assuma que uma quantidade de ^3H suficiente para análise espectroscópica possa ser colocada em um tubo contendo ^1H .
- a) Determine a série de Balmer de ambos os átomos.
- b) Determine a separação, medida em termos de comprimento de onda, entre as duas primeiras linhas da série de Balmer do hidrogênio ^1H e do trítio ^3H .
- 6 Considere a energia o átomo de hidrogênio com a correção relativística feita por Sommerfeld

$$E_{n,n_\theta} = -\frac{\mu Z^2 e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 2n^2 \hbar^2} \left[1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n} \left(\frac{1}{n_\theta} - \frac{3}{4n} \right) \right].$$

Calcule a energia da transição do estado excitado $n = 2$ para o estado fundamental e determine a variação de comprimento de onda desta transição em relação ao modelo de Bohr e ao modelo de Bohr com correção de massa nuclear finita.

- 7 a) Descreva, com suas palavras, no que consiste o princípio da correspondência.

- b) Um oscilador harmônico quântico tem energia dada por

$$E_n = \hbar\omega_0(n + 1/2).$$

Calcule o número quântico equivalente à energia de um oscilador clássico com massa de 100 g, amplitude de oscilação de 0,5 cm e frequência angular de 1 rad/s.

- c) Segundo a mecânica clássica, um elétron se movendo em um átomo deveria ser capaz de fazê-lo com qualquer momento angular. Segundo a teoria de Bohr para o átomo de Hidrogênio, o momento angular é quantizado como $L = nh/2\pi$. O princípio da correspondência pode reconciliar estes dois resultados?

10 Ondas de Matéria e Equação de Schrödinger

- 1 Considere duas ondas de matéria:

$$\Psi_1(x, t) = \sin(2\pi[\kappa x - \nu t])$$

$$\Psi_2(x, t) = \sin\left(2\pi\left[2\kappa x - \frac{\nu}{2}t\right]\right)$$

- a) Interprete o significado das duas equações, explicitando o significado dos termos

$$\kappa x - \nu t$$

e

$$2\kappa x - \frac{\nu}{2}t.$$

- b) Compare a energia, momento e comprimento de onda destas ondas de matéria. Em um dado feixe, temos ambas as ondas presentes. Este feixe é monoenergético?
- c) Obtenha, *explicitamente*, a onda resultante da interferência destas duas ondas.

- 2 Seja a função de onda

$$\Psi(x, t) = \begin{cases} A\sqrt{1 - \frac{|x|}{x_0}} \exp(i\omega t) & , \quad -x_0 < x < +x_0 \\ 0 & , \quad \text{demais valores de } x \end{cases}$$

onde $x_0 > 0$.

- a) Calcule $\Psi^*(x, t)$. Interprete o significado do produto $\Psi^*\Psi$ para uma posição x e um instante de tempo t quaisquer.
- b) Esboce a densidade de probabilidades $P(x, t)$.
- c) Calcule o valor esperado de x .
- d) Calcule o valor esperado de x^2 e determine o desvio padrão $\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$.

- 3 Seja a função de onda

$$\Psi(x, t) = \begin{cases} A\sqrt{1 - \frac{|x|}{x_0}} \exp(i\omega t) & , \quad -x_0 < x < +x_0 \\ 0 & , \quad \text{demais valores de } x \end{cases}$$

onde $x_0 > 0$.

- a) Calcule o valor esperado de p .
- b) Calcule o valor esperado de p^2 e determine o desvio padrão $\sigma = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$.

4 Seja um poço de potencial dado por:

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & , \quad \text{se } x < -a/2 \\ 0 & , \quad \text{se } -a/2 \leq x \leq +a/2 \\ +\infty & , \quad \text{se } x > +a/2 \end{cases}$$

- Esboce o gráfico de $V(x)$.
- Descreva as condições de contorno, justificando fisicamente sua resposta.
- Quais são as energias permitidas para o sistema? Determine quais as regiões de estado ligado e estado não ligado. Justifique.

5 Seja o mesmo poço do exercício anterior.

- Escreva a equação de Schrödinger **dependente do tempo** para as três regiões do poço. Justifique.
- Suponha que o sistema tenha energia $E > 0$. Escreva a equação de Schrödinger **independente do tempo** e as soluções gerais $\psi(x)$ da parte espacial. Justifique.
- Aplice as condições de contorno em x e determine as energias possíveis ao sistema. Elas são quantizadas? Justifique.
- Mostre que as energias deste sistema são tais que

$$\frac{\Delta E}{E_n} = \frac{E_{n+1} - E_n}{E_n} = \frac{2n + 1}{n^2}$$

e discuta o significado físico deste resultado, tendo em vista o princípio da correspondência.

6 Considere o poço infinito das duas questões anteriores.

- Determine as funções de onda normalizadas do problema. Justifique.
- Determine $\langle x \rangle$ e $\langle x^2 \rangle$. Justifique.
- Determine $\langle \hat{p} \rangle$ e $\langle \hat{p}^2 \rangle$. Justifique.
- Interprete os resultados dos itens b) e c) em vista do princípio da correspondência. Justifique.
- Determine as incertezas da posição e momento, e discuta a validade do princípio da incerteza nestas funções de onda. Justifique.

7 Seja um poço de potencial dado por:

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & , \quad \text{se } x < -a \\ V_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) & , \quad \text{se } -a \leq x \leq +a \\ V_0 & , \quad \text{se } x > +a \end{cases}$$

com $a > 0$.

- Esboce o gráfico de $V(x)$.
- Descreva as condições de contorno, justificando fisicamente sua resposta.
- Quais são as energias permitidas para o sistema? Para uma dada energia E determine quais as regiões de estado ligado e estado não ligado. Quais as posições permitidas classicamente, para $E < V_0$ e $E > V_0$? Justifique.

8 Seja uma partícula livre, com $V(x) = 0, \forall x$.

- a) Escreva a equação de Schrödinger **dependente do tempo**. Escreva a solução $\Psi(x, t)$ para este sistema. Justifique.
- b) Considere uma partícula de massa m se movendo a partir de $-\infty$. Mostre que o operador momento, nesta situação, pode ser escrito como $\hat{p}\psi(x, t) \equiv \hbar k\psi(x, t)$, justificando seus resultados. Interprete este resultado.

9 Considere uma barreira de potencial da forma

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{se } x < -2a \\ V_0 & , \quad \text{se } -2a < x < -a \\ 0 & , \quad \text{se } -a < x < +a \\ V_0 & , \quad \text{se } +a < x < +2a \\ 0 & , \quad \text{se } x > +2a \end{cases}$$

com $a > 0$.

- a) Esboce o gráfico de $V(x)$.
- b) Utilizando argumentos físicos, esboce a forma de $\psi(x)$. Justifique.

10 Uma partícula de massa m encontra-se em um estado descrito pela função de onda

$$\Psi(x, t) = C \left(4 \frac{m\omega x^2}{\hbar} - 2 \right) e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} e^{-i5\omega t/2}$$

onde ω é uma constante conhecida.

- a) Esboce o gráfico da parte espacial $\psi(x)$.
- b) Determine a constante C . Justifique fisicamente seu cálculo.
- c) Quais as posições mais prováveis para esta partícula? Justifique.
- d) Determine o valor esperado da posição \hat{x} e do quadrado da posição \hat{x}^2 . Justifique.
- e) Determine o valor esperado do momento \hat{p} e do quadrado do momento \hat{p}^2 . Justifique.

Dica: Considere $\xi = \alpha x$, $\alpha = \sqrt{m\omega/\hbar}$ e recorde-se que:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{(2a)^n} = \quad , \quad n \geq 1 \end{cases}$$

11 Uma partícula de massa m encontra-se em um estado descrito pela função de onda do exercício anterior.

- a) Mostre que esta equação é uma solução da equação de Schrödinger dependente do tempo para um potencial da forma $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$.
- b) A energia desta partícula é constante no tempo? Se sim, determine seu valor. Se não, determine o seu valor médio. Em ambos os casos, justifique a resposta.
- c) Suponha que seja feita uma medida desta partícula. O que pode ser dito sobre sua posição? E sobre seu momento? E sobre sua energia? Justifique.
- d) E se forem feitas 1000 medidas?

12 Uma partícula de massa m executa um movimento unidimensional sob o efeito de um potencial da forma

$$V(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 & , \quad \text{se } |x| > a \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 & , \quad \text{se } -a \leq x \leq +a \end{cases}$$

com energia $E < V_0$ e com $a > 0$.

- a) Esboce este potencial.
- b) Escreva a equação de Schrödinger para cada uma das três regiões do problema. Descreva as soluções cabíveis do problema, justificando fisicamente sua escolha.
- c) Escreva as equações que determinam as energias acessíveis ao sistema. **Não é necessário resolvê-las.**

13 Uma partícula de massa m se move no espaço bidimensional na ausência de um potencial. Considere a partícula se movendo na direção $\hat{k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + \hat{y})$ com energia $E > 0$.

- a) Escreva a equação de Schrödinger **dependente do tempo** desta partícula. Descreva as soluções deste problema. Justifique.
- b) O momento \vec{p} da partícula é constante **no tempo**? Se sim, determine seu valor. Se não, determine o seu valor médio. Em ambos os casos, justifique a resposta.