

## Capítulo 2

# Junta Flexível

### 2.1 Objetivos

O objetivo desta prática é projetar um controlador ótimo por realimentação de estado para o módulo Junta Flexível. O controlador final deve permitir ao usuário controlar a posição angular do a junta, eliminando as vibrações presentes neste tipo de sistema.

Ao final desta prática, você deverá saber:

- Como modelar matematicamente o sistema Junta Flexível.
- Projetar um controlador LQR ótimo para o sistema.
- Atenuar as vibrações ajustando o controlador.

### 2.2 Requisitos do sistema

Na realização da prática o seguinte conjunto de equipamentos será utilizado:

- [ 1 ] Módulo de potência *Quanser UPM 2405/1503* ou equivalente.
- [ 1 ] *Quanser MultiQ/MQ3* ou equivalente.
- [ 1 ] Planta servo *Quanser SRV02-E*

[ 1 ] Módulo Junta Flexível rotativa - *Quanser ROTFLEX*

[ 1 ] PC equipado com o requerido programa como declarado no manual do usuário.

## 2.3 Modelo Matemático

A Fig. 2.1 abaixo, mostra o módulo de junta flexível acoplado a planta *SRV02* na configuração correta. O braço principal é conectado ao corpo do módulo por duas molas, assim, resultando em uma junta flexível. A ilustração à direita da Fig. 2.1 mostra os diferentes pontos de apoio sobre o corpo e o braço resultando em várias configurações do módulo.

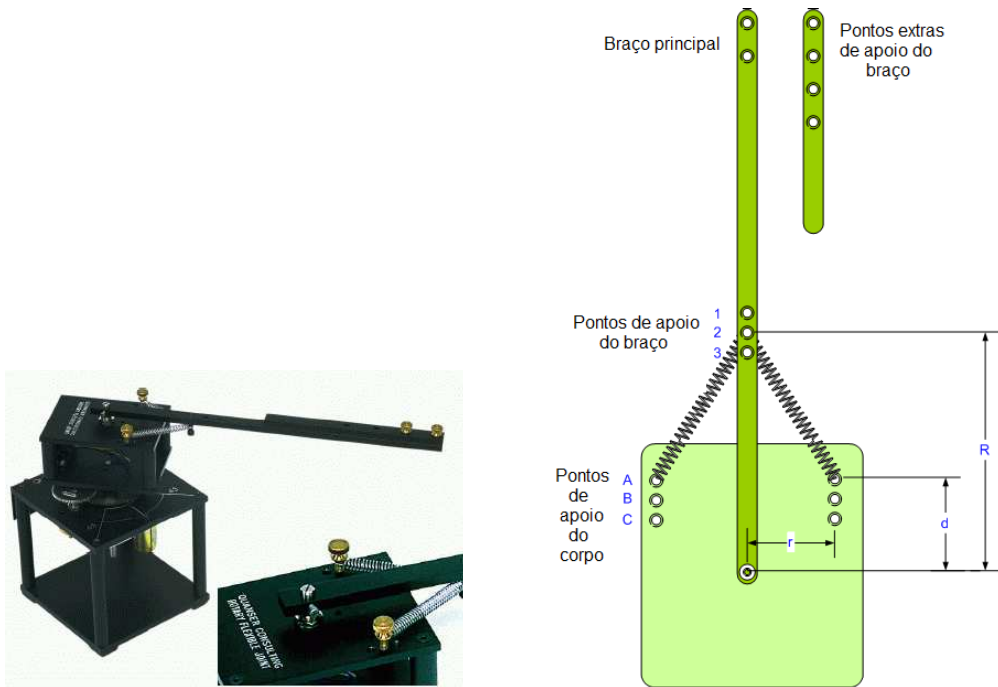


Figura 2.1: Módulo Junta Flexível e representação da junta flexível.

A Fig. 2.2 mostra a junta em posição de equilíbrio e para um dado valor de  $\alpha$ . Note que a mola 1 está comprimida e a mola 2 está esticada (em relação ao estado da junta estacionária).

Utilizando a nomenclatura descrita na Tabale 2.3, pode-se calcular os comprimentos

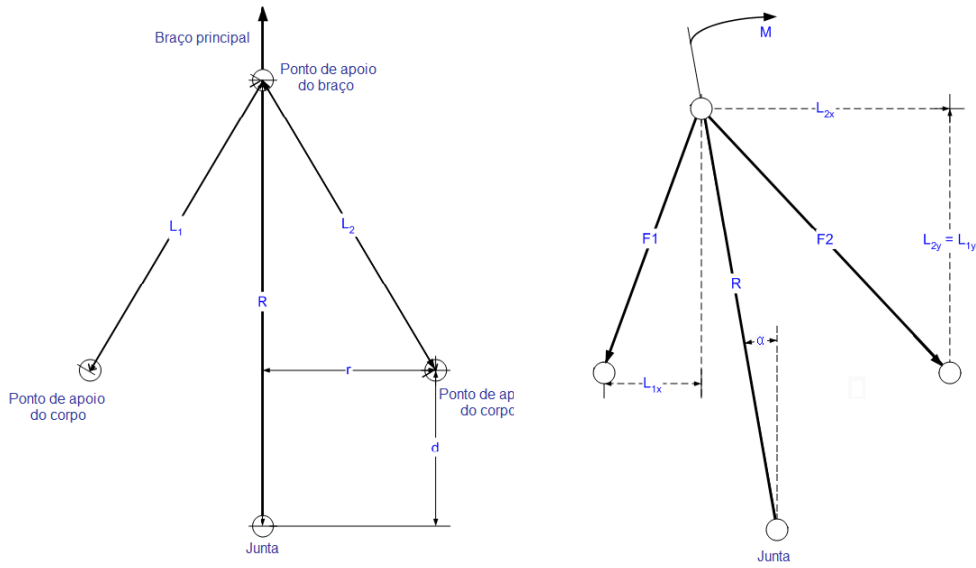


Figura 2.2: Junta flexível - emposição de equilíbrio e deslocada de  $\alpha$ .

de cada mola, dados por:

$$L_{1x} = r - R \sin \alpha$$

$$L_{1y} = R \cos \alpha - d$$

$$L_{2x} = r + R \sin \alpha$$

$$L_{2y} = L_{1y} = R \cos \alpha - d$$

$$L_1 = \sqrt{L_{1x}^2 + L_{1y}^2}$$

$$L_2 = \sqrt{L_{2x}^2 + L_{2y}^2}$$

(2.1)

Símbolo	Descrição
$R$	Distância da junta ao apoio do braço
$d$	Distância da junta ao apoio do braço
$r$	Distância fixa ( $r = 3.18cm$ )
$\theta$	Ângulo da caixa de engrenagem servo (radianos)
$\alpha$	Inclinação do braço (radianos)
$L_1, L_2$	Comprimento das molas #1 e #2
$F_1, F_2$	Forças sobre as molas #1 e #2
$k$	Rigidez da mola
$L$	Comprimento da mola não esticada
$M$	Momento de restauração

Em seguida, calcula-se as forças que atuam sobre cada mola:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= K(L_1 - L) + F_r \\
 F_2 &= K(L_2 - L) + F_r \\
 F_{1x} &= F_1 \frac{L_{1x}}{L_1}, \quad F_{1y} = F_1 \frac{L_{1y}}{L_1} \\
 F_{2x} &= F_2 \frac{L_{2x}}{L_2}, \quad F_{2y} = F_2 \frac{L_{2y}}{L_2}
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

sendo  $F_r$  a força de restauração de cada mola. As molas não esticaram até a força  $F_r$  ser aplicada.

Voltando a Fig. 2.2, pode-se notar que ambas  $F_1$  e  $F_2$  agem sobre o ponto de apoio do braço (ponto onde ambas as molas estão presas no braço). Por simples inspeção, pode-se notar que as componentes  $x$  estão se opondo uma a outra enquanto as componentes  $y$  estão na mesma direção, assim:

$$\begin{aligned}
 F_x &= F_{2x} - F_{1x} \\
 F_y &= F_{2y} + F_{1y}
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Tem-se duas forças atuando sobre o ponto de apoio que trará o braço de volta a sua posição original. Estas duas forças aplicam um torque sobre a junta. Sabe-se que o torque gerado pelas molas é igual ao produto vetorial do raio  $R$  e cada força resultante, assim:

$$\begin{aligned}
 M_x &= R \times F_x = RF_x \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = RF_x \cos\alpha \\
 M_y &= R \times F_y = RF_y \sin(2\pi - \alpha) = RF_y \sin\alpha \\
 M &= M_x + M_y = R \cos\alpha (F_{2x} - F_{1x}) - R \sin\alpha (F_{2y} + F_{1y})
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

A junta flexível é modelada como uma mola simplificada com a equação dinâmica abaixo.

$$M = K_S \alpha \tag{2.5}$$

Desde que  $M$  é não linear, pode se obter uma estimativa linear de 1º ordem da

rigidez  $K_S$ , dada por:

$$K_S = \frac{\delta M}{\delta \alpha}, \text{ em } \alpha = 0$$

$$K_S = \left[ \frac{2R}{D^{\frac{3}{2}}} \right] \left[ (Dd - Rr^2)F_r + (D^{\frac{3}{2}}d - D L d + Rr^2 L)K \right] \quad (2.6)$$

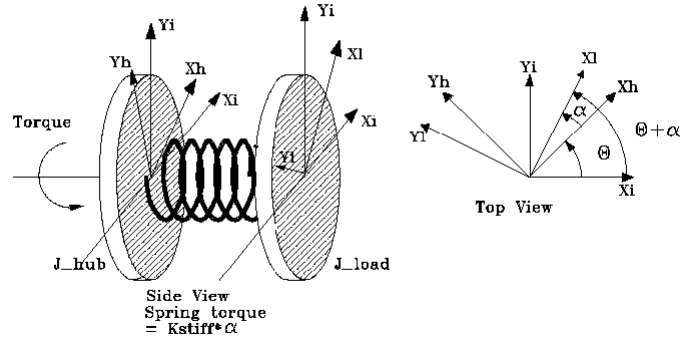


Figura 2.3: Modelo simplificado da junta flexível.

A Fig. 2.3, mostra o modelo simplificado que será usado pela junta flexível. As equações dinâmicas do sistema podem ser obtidas usando a formulação Euler-Lagrange. Obtém-se as energias potencial e cinética do sistema como:

**Energia Potencial:**

$$V = \frac{1}{2} K_S \alpha^2 \quad (2.7)$$

**Energia Cinética:**

$$T = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_{elo} (\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 \quad (2.8)$$

Formando o Lagrangiano:

$$L = T - V = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_{elo} (\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 - \frac{1}{2} K_S \alpha^2 \quad (2.9)$$

As duas coordenadas generalizadas são  $\theta$  e  $\alpha$ . Por essa razão, tem-se 2 equações:

$$\frac{\delta}{\delta t} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{\theta}} \right) - \frac{\delta L}{\delta \theta} = T_{output} - B_{eq} \dot{\theta} \quad (2.10)$$

$$\frac{\delta}{\delta t} \left( \frac{\delta L}{\delta \dot{\alpha}} \right) - \frac{\delta L}{\delta \alpha} = 0 \quad (2.11)$$

Resolvendo as equações (2.10) e (2.11), tem-se:

$$J_{eq} \ddot{\theta} + J_{elo}(\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}) = T_{output} - B_{eq} \dot{\theta} \quad (2.12)$$

$$J_{elo}(\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}) + K_S \alpha = 0 \quad (2.13)$$

Voltando ao experimento de controle de posição, sabe-se que o torque de saída sobre a carga do motor é:

$$T_{output} = \frac{\eta_m \eta_g K_t K_g (V_m - K_g K_m \dot{\theta})}{R_m}. \quad (2.14)$$

Finalmente, combinando as equações (2.12), (2.13) e (2.14), tem-se a representação do sistema em espaço de estados completa:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_S}{J_{eq}} & \frac{-\eta_m \eta_g K_t K_m K_g^2 + B_{eq} R_m}{J_{eq} R_m} & 0 \\ 0 & \frac{-K_S(J_{eq} + J_{elo})}{J_{eq} J_{elo}} & \frac{\eta_m \eta_g K_t K_m K_g^2 + B_{eq} R_m}{J_{eq} R_m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{n_m n_g K_t K_g}{J_{eq} R_m} \\ \frac{-n_m n_g K_t K_g}{J_{eq} R_m} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

## 2.4 Procedimento de Laboratório

O propósito deste laboratório é projetar um controlador por realimentação de estado visando atenuar as altas vibrações da junta flexível, mantendo uma resposta aceitável para a posição da mesma. A lei de controle de realimentação de estado  $u = -kx$  é implementada neste laboratório, sendo

$$u = -[k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4] \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}.$$

A primeira tarefa ao iniciar a prática é se familiarizar com o sistema. O sinal de inclinação ( $\alpha$ ) deve ser conectado ao encoder canal #1 e o sinal de posição dos servos motores  $\theta$  deve ser conectado ao encoder canal #0. A saída analógica canal #0 deve ser conectada ao UPM (Amplificador) e da saída do amplificador para a entrada do servo motor. Este sistema tem um entrada ( $V_m$ ) e duas saídas ( $\theta$  e  $\alpha$ ).

#### 2.4.1 Análise da Influência dos Ganhos

O controlador é inicializado com 4 ganhos ( $k_1, k_2, k_3, k_4$ ) e o estudante deve variar cada parâmetro para 2 condições: ( $0.5 \times k_i$  e  $2 \times k_i$ ),  $i = 1, \dots, 4$ . Preencha a Tabela 2.3, dada na Seção 2.5, conforme a tabela que se segue:

Tabela 2.1: Tabela de análise dos ganho

$\times k_1$	$\times k_2$	$\times k_3$	$\times k_4$	Tempo de Subida	Vibração $\alpha$	% Overshoot $\gamma$	Faixa de $\alpha$
0.5	1	1	1	Maior	Menor	0	$-3.5^\circ < \alpha < 3.5^\circ$
2	1	1	1	Menor	Maior	35.00%	$-12^\circ < \alpha < 12^\circ$

A Tabela 2.3 mostra as 2 condições para cada ganho. Para cada iteração, tenha certeza de configurar os outros ganhos para o valor padrão 1. Para as colunas *Tempo de Subida* e *Vibração  $\alpha$*  somente uma observação qualitativa é suficiente. O objetivo deste exercício é notar os efeitos de cada ganho sobre os parâmetros individuais do sistema.

#### 2.4.2 Especificações de Desempenho

Os ganhos finais devem satisfazer as seguintes especificações:

- Tempo de subida similar ao padrão.
- Sem vibração em  $\alpha$  (mínimo).
- 0 % de sobressinal em  $\gamma = \theta + \alpha$ .
- $\alpha$  não deve exceder  $\pm 10^\circ$ .

**\*Dica:** Use a tabela obtida anteriormente como um guia para selecionar o melhor conjunto de ganhos que alcancem os requisitos.

### 2.4.3 Controle Ótimo

Dado o sistema no espaço de estados abaixo

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

sendo  $x$  o estado,  $u$  a ação de controle e  $A$  e  $B$  as matrizes do sistema, o Controle Ótimo (Regulador Linear Quadrático (LQR)) busca encontrar uma lei de controle da forma  $u = -kx$  tal que o seguinte funcional é minimizado:

$$J = \int_0^\infty x^T Q x + u^T R u$$

sendo  $Q$  e  $R$  matrizes de ponderação (simétricas e definidas positivas).

Para o propósito deste laboratório, fixamos a matriz  $Q$  diagonal. Isto permite variar 4 parâmetros de  $Q$ ,  $(q_1, q_2, q_3, q_4)$ , e um parâmetro para  $R$ ,  $(r)$  ( $R$  neste caso é escalar, pois temos apenas uma entrada):

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{bmatrix}, \quad R = r \quad (2.16)$$

Os valores padrões de  $Q$  e  $R$  são  $Q = \text{diag}([10 \ 100 \ 1 \ 1])$  e  $R = 1$ . Deve-se observar que o maior valor em  $Q$  é  $q_2$ , para manter  $\alpha$  tão perto quanto possível de 0. Portanto, o maior elemento de  $Q$  deve ser o que está associado com  $\alpha$ .

No total deverão ser preenchidas **10** entradas na tabela (variando cada parâmetro em 2 passos enquanto mantém-se os outros parâmetros constantes). Para uma idéia de quais valores testar, use como referência a faixa sugerida na tabela abaixo :

Tabela 2.2: Faixa de parâmetros sugerida

Parâmetro	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$r$
Faixa	$0 < q_1 < 500$	$0 < q_2 < 2000$	$0 < q_3 < 10$	$0 < q_4 < 20$	$0.1 < r < 10$



## 2.5 Relatório da prática

Integrantes do Grupo:

1: \_\_\_\_\_

2: \_\_\_\_\_

3: \_\_\_\_\_

4: \_\_\_\_\_

5: \_\_\_\_\_

6: \_\_\_\_\_

### 1. Análise da influência dos ganhos

Tabela 2.3: Tabela de análise dos ganhos

$\times k_1$	$\times k_2$	$\times k_3$	$\times k_4$	Tempo de Subida	Vibração $\alpha$	% Overshoot $\gamma$	Faixa de $\alpha$
0.5	1	1	1				
2	1	1	1				
1	0.5	1	1				
1	2	1	1				
1	1	0.5	1				
1	1	2	1				
1	1	1	0.5				
1	1	1	2				

### 2. Obtendo o ganho para as seguintes especificações:

- Tempo de subida similar ao padrão.
- Sem vibração em  $\alpha$  (mínimo).
- 0 % de sobressinal em  $\gamma = \theta + \alpha$ .
- $\alpha$  não deve exceder  $\pm 10^\circ$ .

$\times k_1$	$\times k_2$	$\times k_3$	$\times k_4$	Tempo de Subida	Vibração $\alpha$	% Overshoot $\gamma$	Faixa de $\alpha$

## 3. Analise a influência dos ganhos no desempenho do sistema

R. \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

## 4. Controle Ótimo LQR

Tabela 2.4: Tabela de análise das matrizes de ponderação

$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$r$	Tempo de Sub.	Vibração $\alpha$	% Overshoot $\gamma$	Faixa de $\alpha$
					-	-	-	-

## 5. Analise a influência das matrizes de ponderação no desempenho do sistema

R. \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_