Exp 5 - Pêndulo de torção

1. Objetivos

Estudo de um movimento oscilatório de torção, harmônico, sem amortecimento e também com amortecimento subcrítico, de tal forma que sejam observadas oscilações com decréscimo exponencial de amplitude. O amortecimento será produzido mergulhando-se parte do pêndulo em um lubrificante de automóvel, o que introduzirá um termo de atrito viscoso na equação de movimento. Buscaremos determinar os principais parâmetros desse movimento e realizar um estudo gráfico.

2. Introdução

O pêndulo de torção consiste em um disco metálico suspenso por um fio que passa por seu centro, como mostra a Fig. 1.

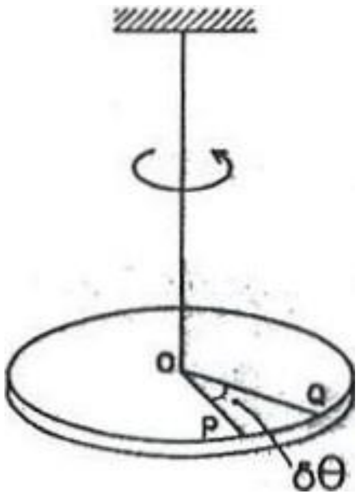

Figura 1: Esquema do pêndulo de torção.

A segunda lei de Newton para o movimento de rotação ao redor de um eixo fixo (eixo *z)* pode ser escrita em termos de uma só componente dos vetores, como

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt} = I\,\frac{d\omega_z}{dt} \qquad (1)$$

onde $\vec{L}$ é o vetor momento angular, I o momento de inércia do pêndulo para uma rotação ao redor do eixo z, $\vec{\omega}$ o vetor velocidade angular, e $\vec{\tau}$ o torque resultante. O fio de aço produz um torque de restituição linear, similar à força de restituição de uma mola, de forma que um deslocamento angular θ produz um torque no sentido de fazer o disco voltar à sua posição de equilíbrio. Este torque é dado pela lei de Hooke (na forma angular)

$$\tau_z^{fio} = -k\theta \qquad (2)$$

onde consideramos a posição angular de equilíbrio como sendo $\theta=0$, e o eixo vertical, paralelo ao torque, sendo o eixo *z* (vejam a Fig. 1). k é a constante elástica de torção do fio.

<u>No caso sem atrito</u>, o único torque existente é o torque de restituição linear acima, e a equação de movimento (Eq. (1)) é escrita como

$$I\frac{d\omega_z}{dt} = -k\theta \qquad ou \qquad I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -k\theta \tag{3}$$

A Eq. (3) à direita é uma equação diferencial linear de segunda ordem, cujas soluções são funções $\theta(t)$. Escolhendo-se as condições iniciais $\theta(0)=\theta_{max}$ e $d\theta/dt(0)=0$ (isso significa que deslocamos o pêndulo desde a sua posição de equilíbrio até a posição θ_{max} e o abandonamos a partir do repouso), a solução será dada por

$$\theta(t) = \theta_{max}\, cos\,(\omega_0 t) \tag{4}$$

Verifiquem tal fato inserindo a solução (4) na equação diferencial (3). A constante ω_0 é a frequência angular do movimento, ligada ao período T_0 do movimento oscilatório pela expressão

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{5}$$

e dada, em termos dos parâmetros do pêndulo, por

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I}} \tag{6}$$

A energia do sistema que executa as oscilações descritas acima é conservada, sendo igual a

$$E = \frac{1}{2}k\theta^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}k\theta_{max}^2 \tag{7}$$

onde vemos que **a energia é proporcional ao quadrado da amplitude** do movimento oscilatório.

<u>No caso com atrito</u>, em que mergulhamos a parte inferior do pêndulo no lubrificante de automóvel, passa a haver atrito viscoso não desprezível, e as Eqs. (3) adquirem um termo extra, o torque de atrito viscoso, que para o regime de movimento laminar é proporcional à velocidade angular $d\theta/dt$

$$\tau_z^{visc} = -b\frac{d\theta}{dt} \tag{8}$$

onde b é uma constante positiva, e o sinal negativo indica que esse torque age no sentido de tentar restabelecer o equilíbrio. A segunda lei de Newton toma então a forma

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -b\frac{d\theta}{dt} - k\theta \tag{9}$$

Como no caso anterior, esta é uma equação diferencial linear de segunda ordem, agora com um termo a mais, cuja solução, no caso de amortecimento subcrítico, é

$$\theta(t) = \theta_{max}\, e^{-\gamma t}\, cos(\omega_1 t) \tag{10}$$

onde as condições iniciais escolhidas são as mesmas que no caso anterior. Verifiquem a validade da solução (10) inserindo-a na equação diferencial (9) e realizando os cálculos. γ é uma constante associada ao atrito viscoso, e a frequência angular ω_1 está relacionada com o período T_1 do movimento por

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \tag{11}$$

Nesta situação, o pêndulo oscilará com uma frequência angular um pouco menor que no caso sem atrito, ω_1 sendo dada por

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\,, \tag{12}$$

e γ se relaciona com a constante b do atrito viscoso e com o momento de inércia I através de

$$\gamma = \frac{b}{2I} \tag{13}$$

Em princípio, γ pode ser obtido experimentalmente com o auxílio da Eq. (12), reescrita em termos dos períodos das oscilações com e sem amortecimento viscoso:

$$\gamma = \sqrt{\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T_1^2}} \tag{14}$$

Esta, no entanto, é uma determinação um pouco mais difícil de realizar, pois ela depende do conhecimento dos períodos T_0 *e* T_1 com precisão elevada.

O comportamento da posição angular em função do tempo pode ser visto no gráfico da Fig. 2.

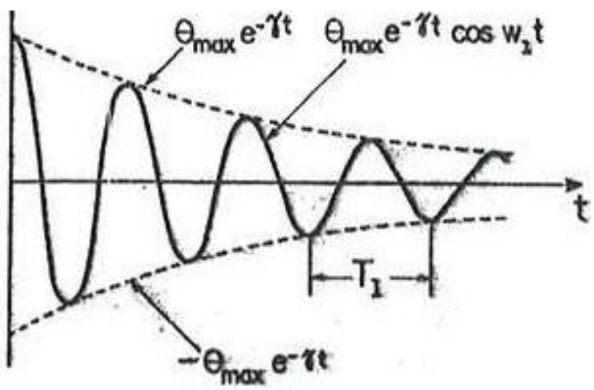

Figura 2: Comportamento da posição angular em função do tempo na presença de atrito viscoso, causando amortecimento subcrítico.

A energia mecânica do movimento amortecido não é constante, sofrendo uma diminuição com o passar do tempo. Mesmo assim, podemos calcular a sua média $\langle E(t)\rangle$ em um período, que é definida como

$$\langle E(t)\rangle = \frac{1}{T_1}\int_t^{t+T_1} E(t)dt \qquad (15)$$

resultando em

$$\langle E(t)\rangle = \frac{1}{2}k\theta_{max}^2 e^{-2\gamma t} = E_0 e^{-2\gamma t} \qquad (16)$$

E_0 é a energia total do pêndulo sem óleo (que é constante), e vemos na Eq. (16) que a energia total do pêndulo no óleo continua sendo proporcional ao quadrado da amplitude do movimento que contém agora um termo dissipativo. Consequentemente, a energia total do pêndulo no óleo não é mais conservada.

3. Material

Utilizaremos aqui um pêndulo de torção similar àquele representado na Fig. 1, composto por um fio de aço, um pino central, um disco dotado de uma escala milimetrada em sua borda, e uma casca cilíndrica (caneca) de alumínio em sua parte inferior, utilizada para produzir um torque de atrito viscoso, quando em contato com o fluido usado para esse fim. Junto ao equipamento, existe também uma "mira": um pedestal dotado de uma ponta de arame, que serve como referência para a medida do comprimento de arco nos pontos de inversão (pontos onde a velocidade do pêndulo é nula). O fluido utilizado para se produzir o torque de atrito viscoso é um óleo de automóvel.

4. Experimento

1. Medida do período T_0 do movimento livre (sem óleo). Vocês terão que fazer quatro medidas do tempo de dez oscilações completas do pêndulo (dez períodos). Aqui está envolvido o cálculo de média, desvio padrão da amostra, desvio padrão da média e desvio total (vejam a apostila de teoria de erros e discutam esses conceitos com o professor). Ao final, obterão T_0 e seu desvio total dividindo o tempo médio obtido e o seu desvio total por 10.

2. Medida dos pontos de inversão (máximos ou mínimos) do movimento com o auxílio da escala milimetrada fixada em torno do disco. Como se vê, ao invés de medirem o ângulo θ, medirão equivalentemente o comprimento de arco (em cm). A tabela presente no Relatório Programado deve ser preenchida na ordem temporal, medindo na sequência todas as posições do máximo (ou do mínimo) do movimento do pêndulo (ponto de inversão $x_{\leftarrow}$ ou $x_{\rightarrow}$). Com o pêndulo em repouso, determinem o valor de x_{equil} para que este possa ser subtraído de seus valores de $x_{\leftarrow}$ ou $x_{\rightarrow}$, produzindo assim o valor real da amplitude de movimento do pêndulo (x_{extr}). Dica: afastem o pêndulo da sua posição de equilíbrio de 11 cm e começam as medições da amplitude quando chegar em 10 cm, para deixar a ele o tempo de estabilizar os movimentos laterais indesejáveis que dificultam a leitura dos dados

3. Cálculo geométrico do momento de inércia. Este é o cálculo do momento de inércia com o auxílio das medidas de massas e dimensões anotadas na tabela do Relatório Programado. Para o cálculo do momento de inércia total do pêndulo, usem as fórmulas relacionadas com cada geometria envolvida e calculem o valor total com as fórmulas abaixo.

$$I_{Tot} = \sum_n I_n \quad (mesmo\ eixo) \tag{17}$$

$$I_{Disco} = \frac{1}{2} M R^2 \ \ (eixo\ perp.ao\ disco, no\ centro) \tag{18}$$

$$I_{Caneca} = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2) \ \ (eixo\ no\ centro, paralelo\ \text{à}\ caneca) \tag{19}$$

4. Determinação da constante elástica k do fio. Usem as Eqs (5) e (6). Tomem cuidado com as unidades, e trabalhem no SI. O desvio de k é relativamente simples

$$\sigma_k = k\sqrt{\left(\frac{\sigma_I}{I}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma_{T_0}}{T_0}\right)^2} \tag{20}$$

5. Medida do período T_1 do movimento amortecido. Servem aqui os mesmos comentários feitos no item 1.

6. Determinação de γ a partir de T_0 e T_1. γ pode ser calculado com o auxilio da Eq. (14). O cálculo de seu desvio pode ser um pouco trabalhoso, sendo optativo. Como comentado, esta forma de determinar γ pressupõe o conhecimento suficientemente preciso da diferença (T_1-T_0), o que não é o nosso caso (por quê?).

7. Medida dos pontos de inversão (máximos ou mínimos) do movimento amortecido. Servem aqui os mesmos comentários feitos no item 2.

8. Representação dos dados no PC em um gráfico mono-log, usando uma escala linear para as abscissas, e uma escala logarítmica para as ordenadas. Vejam a explicação do professor sobre a escala logarítmica. O que deve ser sempre lembrado é que:

   - no eixo logarítmico, não temos nem o zero e nem valores negativos;
   - nele, as distâncias aparecem segundo o logaritmo dos dados;
   - portanto, para representar os pontos experimentais, não precisamos fazer nenhuma conta com os valores a serem plotados;
   - não podemos escolher a vontade a escala no eixo logarítmico. Podemos apenas escolher as potências de 10 sucessivas (por exemplo 10^0, 10^1 10^2), tal que seus dados estejam contemplados no eixo.

   Representem os valores consecutivos de x_{extr} em cm no eixo logarítmico das ordenadas para o movimento sem óleo. Quanto ao eixo linear das abscissas, usem múltiplos inteiros de T_0 para representar os seus dados de tempo (usem T_0 como unidade de tempo!). Depois, façam a mesma coisa, no mesmo gráfico, para os valores da amplitude de oscilação do pêndulo no óleo, usando agora T_1 como unidades de tempo (portanto, a escala em x será a mesma para as duas curvas e conterá apenas os números 0 a 9).

9. Análise do gráfico mono-log: ao representarmos x_{extr} em função do tempo, nós representamos a envoltória positiva da função $\theta\,(t)$. Essa envoltória é dada pela função

$$x(t) = x_{max}\, e^{-\gamma t} \qquad (21)$$

onde substituímos o ângulo θ por x, o nosso comprimento de arco. O uso de um gráfico mono-log tem a finalidade de linearizar determinadas funções que aparecem frequentemente em fenômenos físicos. Se extrairmos o logaritmo da Eq. (21), teremos

$$Log\ x(t) = Log\ x_{max} - \gamma t \log e = \alpha - \beta t \qquad (22)$$

onde usamos as propriedades dos logaritmos, e α e β são constantes. A Eq. (22) indica que $Log\ x(t)$ varia linearmente com o tempo t. Visto que, numa escala logarítmica, as distâncias $x(t)$ são marcadas segundo o logaritmo dos valores, isto implica que os dados de x_{extr} que medimos deverão ter o aspecto de uma reta. A inclinação dessa reta (coeficiente angular) é β, o coeficiente de t. A determinação de γ a partir do gráfico está agora simplificada, por tratarmos com uma reta. Podemos fazer uma regressão linear usando o método dos mínimos quadrados para encontrar o coeficiente angular desta reta e a incerteza dele. Não se esqueçam de corrigir estes dois valores para recuperar as unidades de tempo, em segundo (lembrem-se que, no gráfico, o tempo foi expressado em unidade de T_0 e T_1, e não em segundo).

10. Estudo da dissipação de energia no movimento amortecido. A Eq. (16) nos mostra que a energia média decai exponencialmente, de acordo com o fator $e^{-\gamma t}$. A esse comportamento exponencial, podemos associar um tempo característico chamado de **meia vida**, muito usado em radioatividade, que é o tempo após o qual uma população de núcleos radioativos se reduz à metade da original. No caso das oscilações com amortecimento subcrítico, o comportamento exponencial permite que também pensemos em um tempo característico, por exemplo para que a energia do pêndulo caia à metade da inicial. Chamemos esse tempo de $t_{1/2}$ (esta será a meia vida do nosso experimento!). Temos então

$$e^{-2\gamma(t+t_{1/2})} = \frac{1}{2} e^{-2\gamma t} \quad ou \quad e^{-2\gamma t_{1/2}} = \frac{1}{2} \qquad (23)$$

o que resulta em

$$2\gamma t_{1/2} = Ln\ 2 \quad e \quad t_{1/2} = \frac{Ln\ 2}{2\gamma} \qquad (24)$$

Vocês também podem solucionar a questão proposta no Relatório Programado simplesmente observando o gráfico mono-log: como a energia média é proporcional ao quadrado da amplitude, ela cai pela metade quando a amplitude cai de $1/\sqrt{2} \cong 0{,}71$. Busquem então no gráfico o ponto para o qual a amplitude é aproximadamente 0,71 vezes a amplitude inicial. O tempo correspondente será $t_{1/2}$

(não se esqueçam que este tempo está expressado em unidades do período T_1, o que equivale portanto ao número de oscilações).

Da forma como foi proposto no Relatório Programado, utilizando a fração f da energia perdida em cada período, a sugestão é observar que, de oscilação em oscilação, a energia média do pêndulo após cada oscilação completa pode ser escrita como

0 oscilação:	E_0	
1 oscilação:	$(1-f)\ E_0$	(25)
2 oscilações:	$(1-f)^2\ E_0$	
3 "	$(1-f)^3\ E_0$	

ficando a encargo de vocês escrever a equação que possibilite encontrar o tempo $t_{1/2}$ (ou o número de oscilações) para que esta energia caia pela metade.

5. Referências

1. O Halliday, R. Resnick e J. Walker, Fundamentals of Physics, Extended, John Wiley & Sons, Inc., 1997, caps. 11 e 16.

2. Outras modalidades de pêndulos de torção são apresentadas nesta página Internet, contendo as equações associadas (principalmente seus momentos de inércia):

http://faraday.physics.utoronto.ca/IYearLab/Intros/TorsionPend/TorsionPend.html