Plastificação – ciclos em carregamentos axiais

Prof. Alfredo Gay Neto

PEFUSP
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA
DE ESTRUTURAS E GEOTÉCNICA

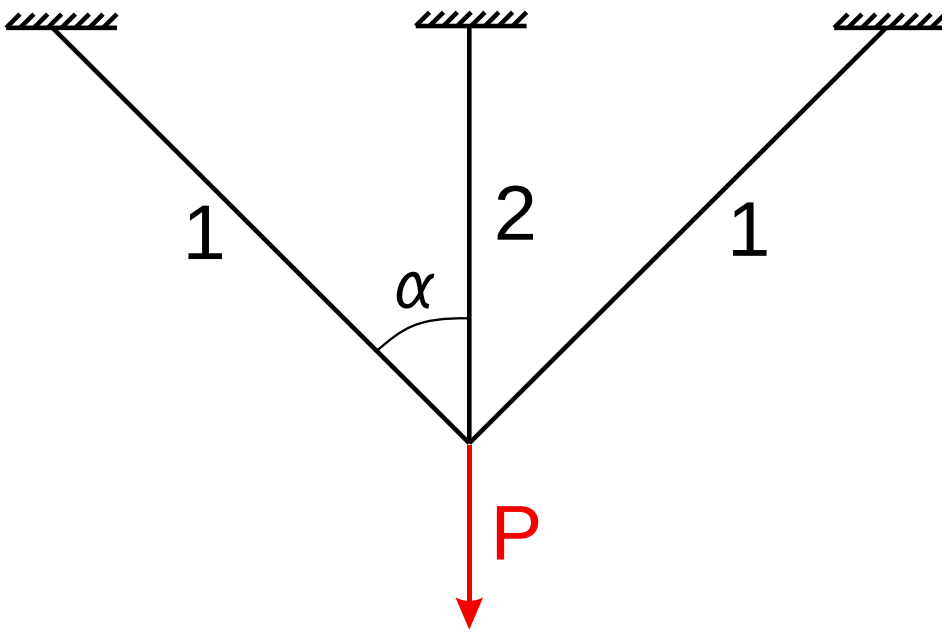
PEF 2401
Mecânica das Estruturas II

Exercício – problema hiperestático

PEFUSP

- Determinar o primeiro e o segundo limite (P_I e P_{II}), bem como realizar um carregamento e descarregamento completo

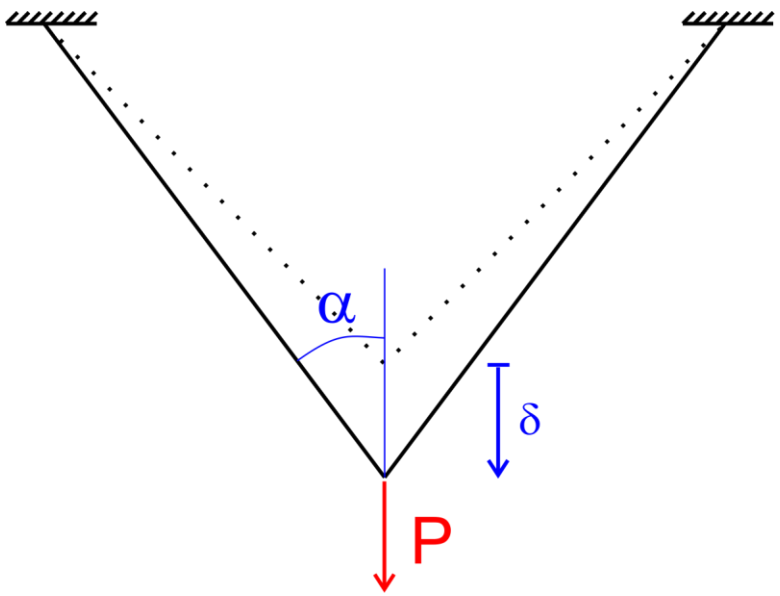
- $E_1 = E$
- $E_2 = E$
- $A_1 = 4A$
- $A_2 = A$
- $\sigma_{e1} = \sigma_e$
- $\sigma_{e2} = \sigma_e$



Problema 1 – Isostático (sem a barra 2)

PEFUSP

- Dados: E, A, σ_e
- Equilíbrio: $N = \dfrac{P}{2cos\alpha}$
- Lei de Hooke: $\sigma = \dfrac{P}{2Acos\alpha}$



- Primeiro e segundo limites:

$$P_I = P_{II} = \sigma_e 2Acos\alpha$$

- Deslocamento do ponto de aplicação da carga P:

$$\delta = \frac{\Delta l}{cos\alpha} = \frac{\sigma_e l}{Ecos\alpha}$$

Problema 2 – Hiperestático (com a barra 2)

PEFUSP

- Equilíbrio: $2N_1 cos\alpha + N_2 = P$

- Compatibilidade: $\Delta l_2 = \delta$ $\quad \Delta l_1 = \delta\cos(\alpha)$ $\qquad \Delta l_1 = \Delta l_2 \cos(\alpha)$

- Lei de Hooke: $\dfrac{N_1}{A_1} = E\dfrac{\Delta l_1}{l_1}$ $\qquad \dfrac{N_2}{A_2} = E\dfrac{\Delta l_2}{l_2}$

- Expressões finais dos esforços nas barras:

$$N_1 = \frac{P cos^2(\alpha)}{\dfrac{A_2}{A_1} + 2\cos^3(\alpha)}$$

$$N_2 = \frac{P}{1 + 2\dfrac{A_1}{A_2}\cos^3(\alpha)}$$

Problema 2 – Hiperestático (com a barra 2)

PEFUSP

- Valores numéricos:
  - $\cos(\alpha) = 0{,}5$
  - $l_1 = 2l$ e $l_2 = l$
  - $A_1 = 4A$ e $A_2 = A$

$$N_1 = N_2 = \frac{P}{2}$$

- Tensões nas barras: $\sigma_1 = \dfrac{\frac{P}{2}}{A_1} = \dfrac{P}{8A}$ $\quad \sigma_2 = \dfrac{\frac{P}{2}}{A_2} = \dfrac{P}{2A}$

- Deslocamentos: $\sigma_2 = E\dfrac{\Delta l_2}{l_2} \rightarrow \Delta l_2 = \delta = \dfrac{\sigma_2 l_2}{\mathrm{E}} = \dfrac{\mathrm{P}l}{2\mathrm{EA}}$

- Primeiro limite à tração (a barra 2 escoa primeiro):

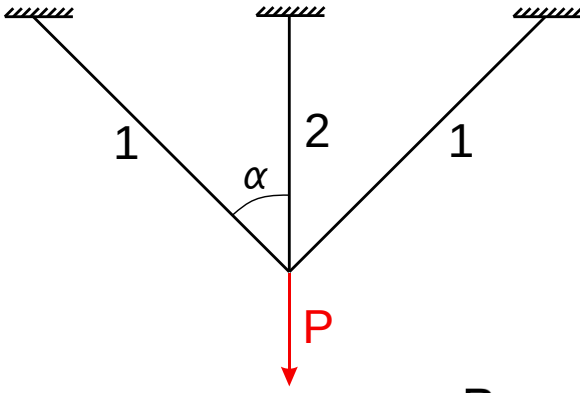
$$P_I^{tração} = 2\sigma_e A \qquad \delta = P_I^{tração} = \sigma_e l/\mathrm{E}$$

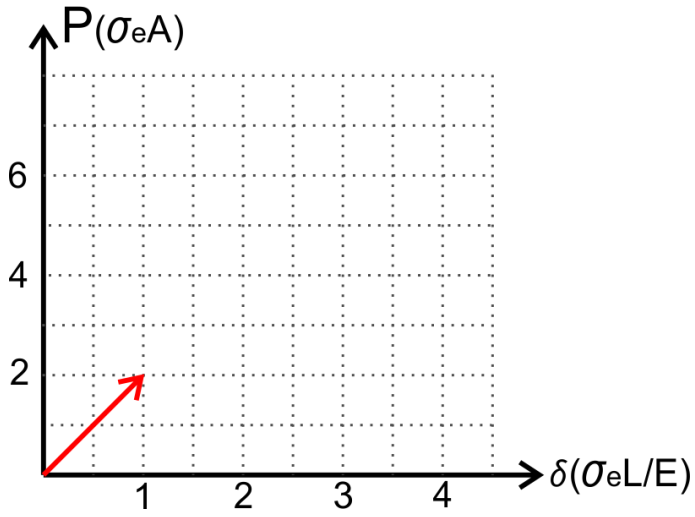
- A partir desse ponto, o ΔP inserido obedecerá as equações do problema 1 (isostático, sem a barra 2) $\sigma_1 = \dfrac{P}{8A} = \dfrac{\sigma_e}{4}$

Problema 2 – Hiperestático (com a barra 2)

PEFUSP

- Carregamento elástico em todas as barras





Problema 2 – Hiperestático (com a barra 2)

PEFUSP

- A tensão final nas barras do tipo "1" é: $$\sigma_1 = \frac{P}{8A} = \frac{\sigma_e}{4}$$

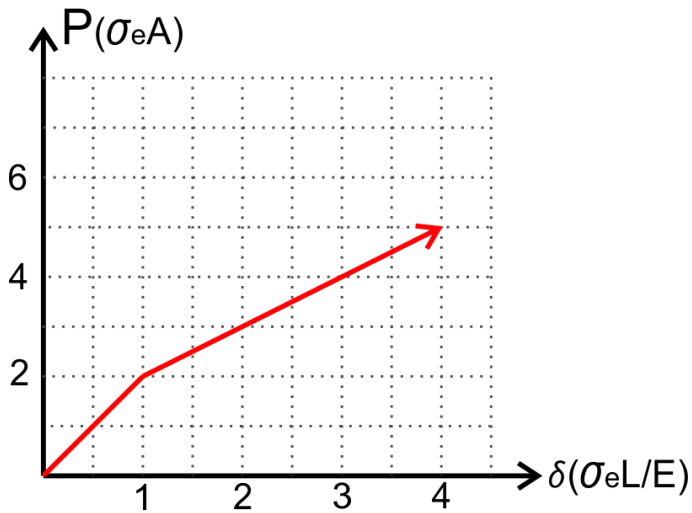
- Do problema 1 (isostático, sem a barra 2): $$\Delta\sigma_1 = \frac{\Delta P}{2A_1 cos\alpha}$$

- Ainda há disponibilidade de $\Delta\sigma_1 = \frac{3}{4}\sigma_e$

- Logo: $\Delta P = 3\sigma_e A$

$$\Delta\delta = \frac{\Delta\sigma_1 l_1}{Ecos\alpha} = \frac{3\sigma_e l}{E}$$

$$P_{II}^{tração} = 5\sigma_e A$$



Problema 2 – Hiperestático (com a barra 2)

PEFUSP

- Descarregamento (voltam a valer expressões do problema hiperestático):

$$\Delta P = -5\sigma_e A$$

$$\Delta\sigma_1 = \frac{\Delta P}{8A} = -\frac{5}{8}\sigma_e \qquad \Delta\sigma_2 = \frac{\Delta P}{2A} = -\frac{5}{2}\sigma_e$$

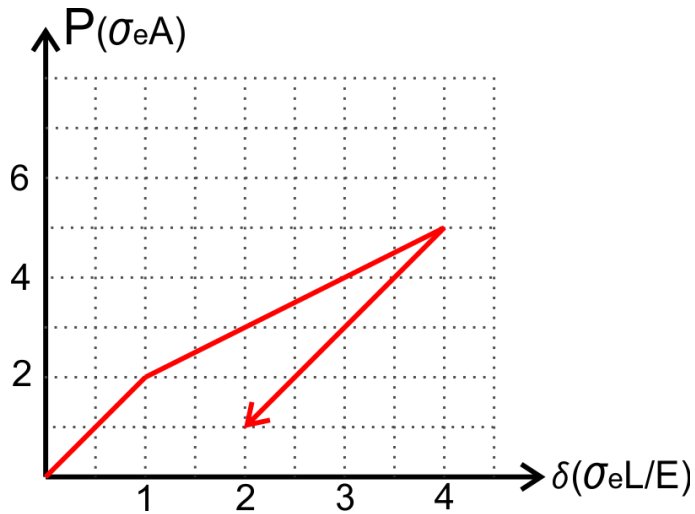
- Logo, teremos que fazer o descarregamento parcial, pois a barra 2 escoa em compressão durante a descarga:

$$\Delta\sigma_2 = -2\sigma_e \rightarrow \Delta P = -4\sigma_e A$$

$$\Delta\sigma_1 = \frac{\Delta P}{8A} = -\frac{4\sigma_e A}{8\mathrm{A}} = -\frac{1}{2}\sigma_e$$

$$\Delta\delta = \frac{\Delta\sigma_2 l_2}{\mathrm{E}} = \frac{-2\sigma_e\ l}{\mathrm{E}}$$

$$P_I^{compressão} = 1\sigma_e A$$

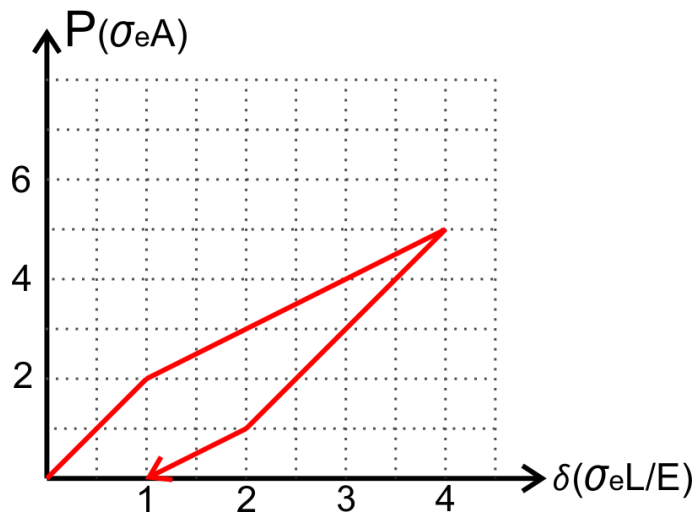


Problema 2 – Hiperestático (com a barra 2)

PEFUSP

- Descarregamento restante (voltam a valer expressões do problema isostático – sem a barra 2):

$$\Delta\sigma_1 = \frac{\Delta P}{2A_1 cos\alpha} = -\frac{1\sigma_e A}{2 \cdot 4A \cdot 0{,}5} = -\frac{\sigma_e}{4}$$

$$\Delta\sigma_2 = 0$$

$$\Delta\delta = \frac{\Delta\sigma_1 l_1}{E cos\alpha} = \frac{-\frac{\sigma_e}{4} 2l}{E \cdot 0{,}5} = -\frac{\sigma_e l}{\mathrm{E}}$$