13-1 – Relação entre funções com derivadas iguais

Demonstramos como um corolário 12.14 imediato do teorema do valor médio que uma condição necessária e suficiente para que uma função seja constante em um intervalo é que ela seja diferenciável e que sua derivada se anule em todos os pontos interiores a este intervalo. Mais precisamente,

Corolário 12.14: " Seja $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diferenciável, então f é constante, se e somente se, $f'(x) = 0$, $\forall x \in D$."

É importante contrastar esse resultado com o seguinte exemplo:

Exemplo 13.1: " Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Claramente, $f'(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. contudo tal f não é uma função constante. De fato, há um salto no gráfico de f para $x = 0$. Contudo, tal f não constitui um contra-exemplo do Corolário 12.14, pois $f'(0)$ não está definida. Assim, ao violarmos uma das hipóteses do corolário 12.14, a saber a da existência da derivada de f em todos os pontos de seu domínio, o resultado deixa de ser válido."

Uma conseqüência do corolário 12.14 é que duas funções cujas derivadas coincidem em um dado intervalo diferem por no máximo uma constante.

Teorema 13.2: " Sejam $f: D(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: D(g) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, duas funções contínuas no intervalo $I = D(f) \cap D(g)$. Se $f'(x) = g'(x)$, para qualquer x no interior do intervalo I, então existe uma constante $k \in \mathbb{R}$ tal que: $g(x) = f(x) + k$, $\forall x \in I$."

Demonstração:

. A função $h(x) = g(x) - f(x)$ é contínua em I e diferenciável com $h'(x) = g'(x) - f'(x) = 0$ para qualquer ponto no interior do intervalo I. Pelo corolário 12.14, existe uma constante $k \in \mathbb{R}$ tal que $h(x) = k$, $\forall x \in I$. Logo, $g(x) = f(x) + k$, $\forall x \in I$.

$\blacksquare$

Claramente, se as funções f, g além de satisfazerem as hipóteses do teorema 13.2, forem tais que $f(c) = g(c)$ para algum $c \in I$, então, o $k \in \mathbb{R}$ predito pelo teorema 13.2 é $k = 0$ e $g(x) = f(x)$, $\forall x \in I$.

Exemplo 13.3: " Determine uma função $y = f(x)$, definida em um intervalo aberto I, com $f(1) = 1 \in I$, tal que:

$$\frac{dy}{dx} = xy \ , \ \forall x \in I.$$

Solução:

Precisamos encontrar uma solução da equação diferencial

$$f'(x) = x f(x) \quad \text{com} \quad f(1) = 1.$$

Como f é diferenciável para todo $x \in I$, temos que f é contínua em I. Logo, pelo teorema 6.24, como $f(1) = 1 > 0$, temos que existe uma vizinhança $N_1(r)$ de $x = 1$, com $r > 0$ tal que $f(x) > 0$, $\forall x \in N_1(r) \subseteq I$.

Procuremos, pois, por uma função, definida num intervalo I, que satisfaça $f(x) > 0$, $\forall x \in I$. Temos então que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = x \ , \ \forall x \in I$$

Lembrando que:

$$(*) \quad \frac{d}{dx}\left[\log f(x)\right] = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{d\,f(x)}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$(*) \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{2x}{2} = x$$

Temos que:

$$\frac{d}{dx} \log f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right), \quad \forall x \in I$$

Invocando o teorema 13.2, concluímos que existe uma constante $k \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\log f(x) = \frac{x^2}{2} + k, \quad \forall x \in I$$

Ademais, como $f(1) = 1$, temos que

$$\log 1 = \frac{1}{2} + k \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

Portanto,

$$\log f(x) = \frac{x^2 - 1}{2} \Rightarrow f(x) = e^{\frac{x^2-1}{2}} = \frac{e^{x^2/2}}{\sqrt{e}}, \quad \forall x \in I.$$

Como $e^{x^2/2} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, podemos considerar $I = \mathbb{R}$.

Note que provamos que tal f é uma função que satisfaz às condições dadas. É, entretanto, possível demonstrar que tal é a única função a satisfazê-las."

Um outro exemplo da aplicação do teorema 13.2 é visto na demonstração do teorema 10.19, que estabelece que a única função a satisfazer a equação diferencial ordinária:

$$\frac{df(x)}{dx} = k f(x), \quad k \in \mathbb{R} \quad \text{com} \quad f(0) = C$$

é $f(x) = C e^{kx}$.

13.2 - Primitivas e integrais indefinidas

O exemplo 13.3 e o teorema 10.19 motivam a definição seguinte:

Definição 13.4: " Seja $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma primitiva de f é uma função $F: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in D$."

Exemplo 13.5: " Algumas primitivas:

(a) $F(x) = C e^{kx}$ é uma primitiva de

$$f(x) = F'(x) = kC e^{kx}$$

(b) $F(x) = \dfrac{e^{x^2/2}}{\sqrt{e}}$ é uma primitiva de

$$f(x) = F'(x) = \frac{x e^{x^2/2}}{\sqrt{e}}$$

(c) $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ é uma primitiva de

$$f(x) = F'(x) = x^2.$$

Claramente, se $F: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for uma primitiva de $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em D, então para qualquer constante $k \in \mathbb{R}$, a função

$$F(x) + k$$

também é uma primitiva de f em I. Por outro lado, como vimos anteriormente no <u>teorema 13.2</u>, se duas funções têm derivadas iguais em um dado intervalo, então elas diferem por no máximo uma constante real neste intervalo. Concluímos, pois, que as primitivas de f no intervalo D são funções da forma $F(x) + k$. Dizemos, então, que

$$\int f(x)\, dx = F(x) + k$$

é uma família de primitivas de f em D. Dizemos também que $\int f(x)\, dx$ é a integral indefinida de f e denominamos a função f de integrando.

Exemplo 13.6: "Usando as expressões para as derivadas de algumas funções elementares podemos trivialmente escrever as seguintes primitivas:

(a) $\int x^{\alpha}\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k \,, \quad \alpha \neq -1$

(b) $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + k$

(c) $\int e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + k$

(d) $\int \sin x\,dx = -\cos x + k$

(e) $\int \cos x\,dx = \sin x + k$

onde $k \in \mathbb{R}$."