

PSI 3481  
SISTEMAS ÓPTICOS E DE MICRO-  
ONDAS

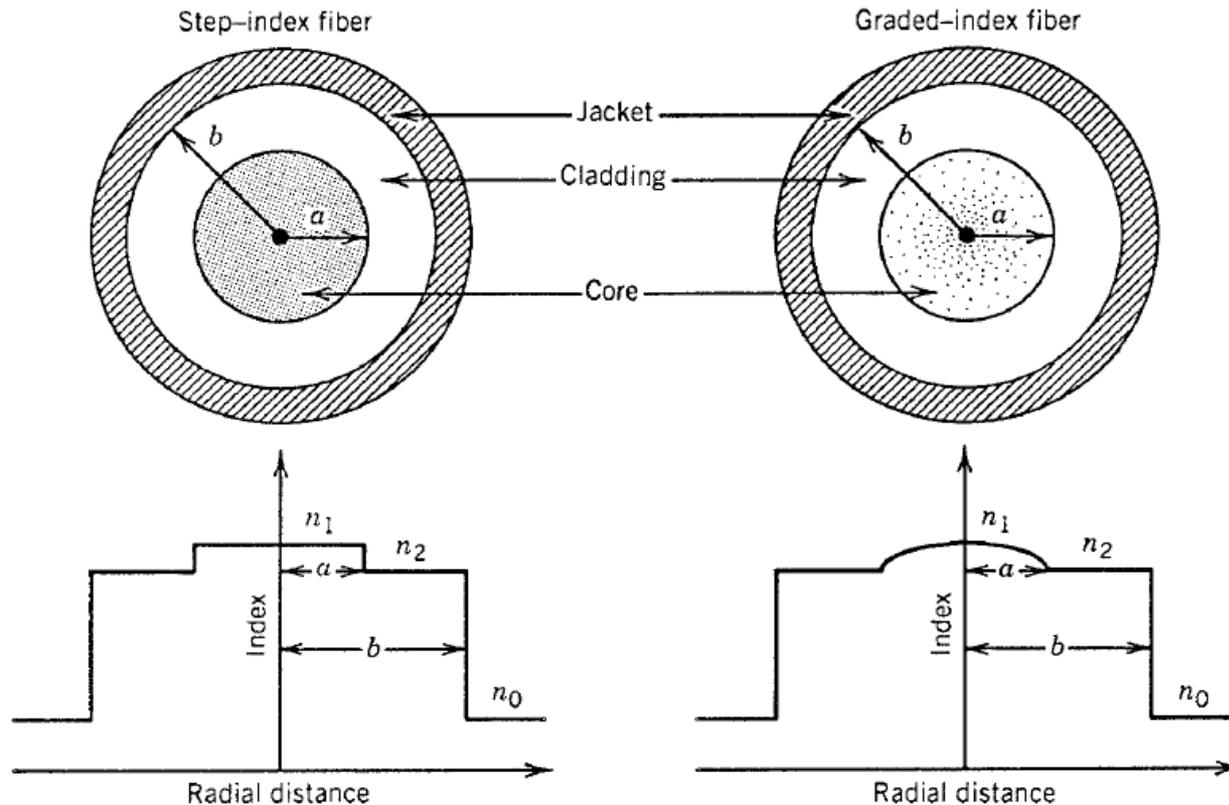
**Fibras Ópticas**

# Fibras Ópticas

- Luz guiada: reflexão interna total (1854)
- Fibra Óptica: multicamadas (1950).
  - Antes de 1970: perda  $\cong 1000$  dB/Km
  - Em 1970: perda  $\cong 20$  dB/Km
  - Em 1979: perda  $\cong 0,2$  dB/Km (1,55  $\mu\text{m}$ ).

# Fibras Ópticas

## Fibras Ópticas Multimodo



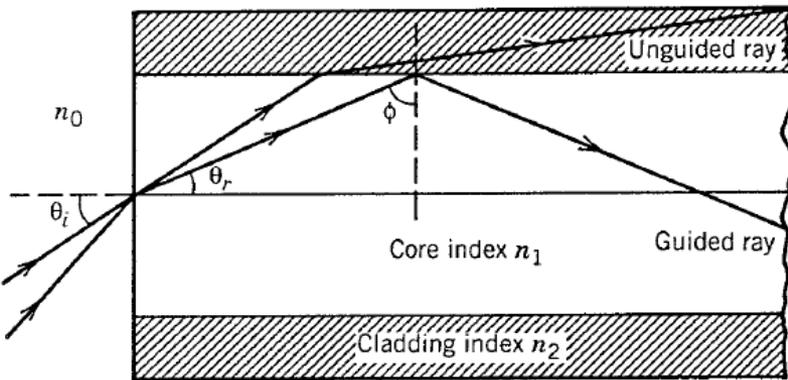
Fibra com perfil com perfil em degrau do índice de refração

Fibra com perfil com perfil graduado do índice de refração

# Fibras Ópticas Multimodo

## Aproximação de óptica geométrica

Perfil em degrau do índice de refração



Lei de Snell nas diferentes interfaces

Interface de excitação

$$n_0 \sin \theta_i = n_1 \sin \theta_r$$

Interface núcleo/camada externa

$$n_1 \sin \phi = n_2 \sin \phi_r$$

Condição crítica para o guiamento da luz

$$n_0 \sin \theta_i = (n_1^2 - n_2^2)^{1/2}$$

Apertura numérica

$$NA = n_0 \sin \theta_i$$

$$NA = n_1 (2\Delta)^{1/2}$$

$$\Delta = (n_1 - n_2)/n_1 \leftarrow \text{Diferença relativa de índice}$$

Tempo de atraso

$$\Delta T = \frac{L n_1^2 \Delta}{c n_2}$$

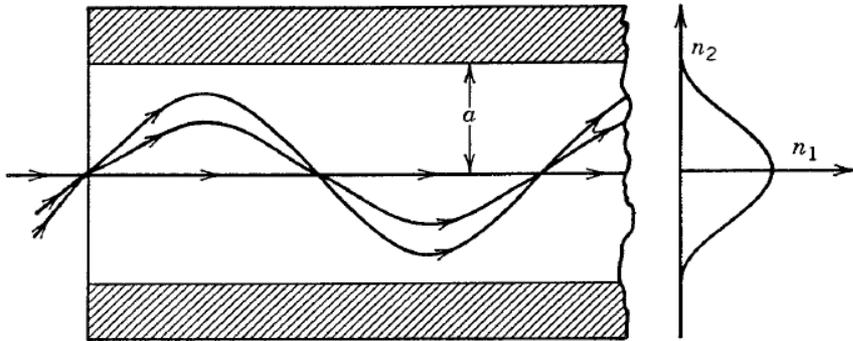
Figura de mérito BL da fibra

$$BL < \frac{n_2 c}{n_1^2 \Delta}$$

# Fibras Ópticas Multimodo

## Aproximação de óptica geométrica

Perfil graduado do índice de refração:  $n(\rho) = \begin{cases} n_1[1 - \Delta(\rho/a)^\alpha]; & \rho < a, \\ n_1(1 - \Delta) = n_2; & \rho \geq a, \end{cases}$



$\alpha$ : parâmetro do perfil do índice de refração

Aproximação para-axial

$$\frac{d^2\rho}{dz^2} = -\frac{1}{n} \frac{dn}{d\rho}$$

Para  $\alpha = 2$

$$\rho = \rho_0 \cos(pz) + (\rho'_0/p) \sin(pz),$$

$$p = (2\Delta/a^2)^{1/2}$$

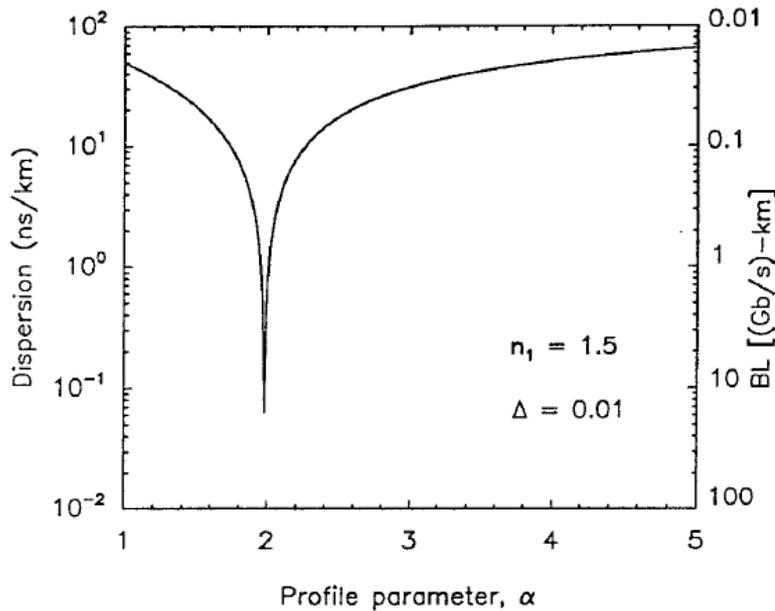
Eliminação da dispersão modal

$$z = 2m\pi/p,$$

# Fibras Ópticas Multimodo

## Aproximação de óptica geométrica

Perfil graduado do índice de refração  
Fibra multimodo na prática



Curva de dispersão intermodal  $\Delta T/L$  em função do parâmetro de perfil do índice de refração

Mínimo da curva de dispersão intermodal

em:  $\alpha = 2(1 - \Delta)$

$$\Delta T/L = n_1 \Delta^2 / 8c.$$

Figura de mérito  $BL$  da fibra

$$BL < 8c/n_1 \Delta^2.$$

# Fibras Ópticas

## Modelos ondulatórios

- **Equações de Maxwell**

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t,$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

- **Equações constitutivas**

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P},$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M},$$

### Equação de onda para meios homogêneos

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} + n^2(\omega) k_0^2 \tilde{\mathbf{E}} = 0,$$

$$k_0 = \omega / c = 2\pi / \lambda$$

# Fibras Ópticas

## Modelos ondulatórios

- Fibra com perfil graduado do índice de refração

$$n^2(r) = n^2 \left( 1 - \frac{n_2}{n} r^2 \right) \quad \text{Perfil do índice de refração}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \left( 1 - \frac{n_2}{n} r^2 \right) \mathbf{E} = 0 \quad \text{Equação de onda}$$

$$E_{l,m}(x, y, z) = E_0 H_l \left( \sqrt{2} \frac{x}{\sigma} \right) H_m \left( \sqrt{2} \frac{y}{\sigma} \right) \exp \left( - \frac{x^2 + y^2}{\sigma^2} \right) \quad \text{Forma da onda}$$

$$\beta_{l,m} = k \left[ 1 - \frac{2}{k} \sqrt{\frac{n_2}{n} (l + m + 1)} \right]^{1/2} \quad \text{Vetor de propagação}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi} \left( \frac{1}{nn_2} \right)^{1/4}} \quad \text{Tamanho do feixe guiado}$$

# Polinômios de Hermite

$$\frac{d^2 H}{dx^2} - 2x \frac{dH}{dx} + 2mH$$

Equação de Hermite

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

Formula de recorrência

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

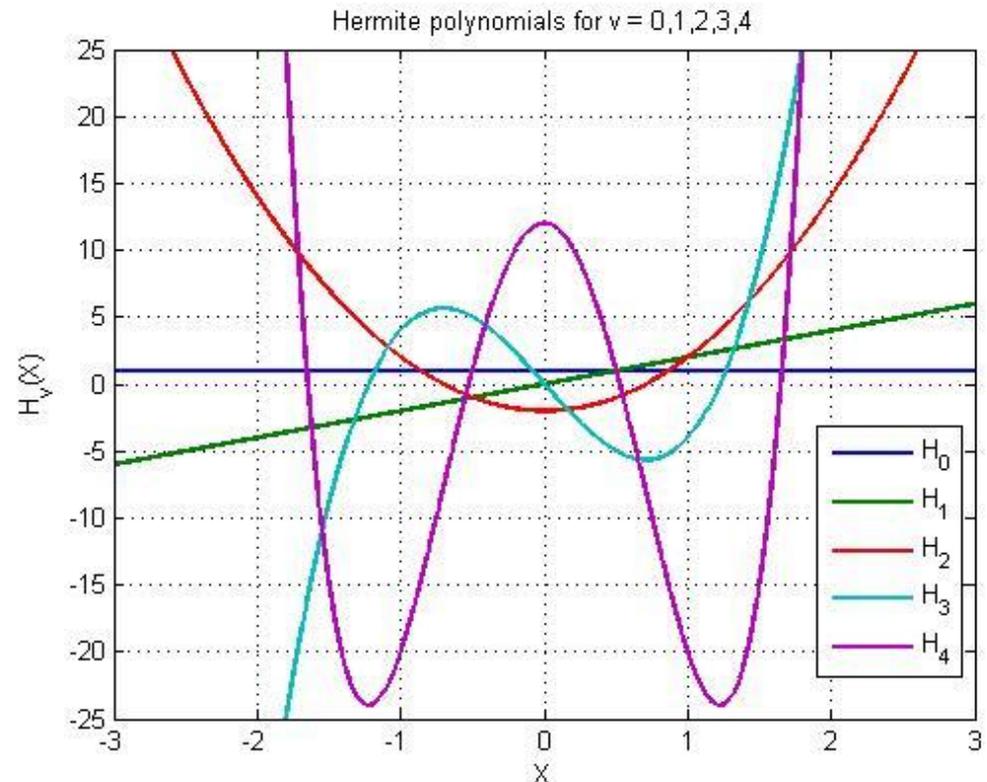
$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$$

Equação do Oscilador Harmônico

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + (2m + 1 - x^2)\psi = 0$$

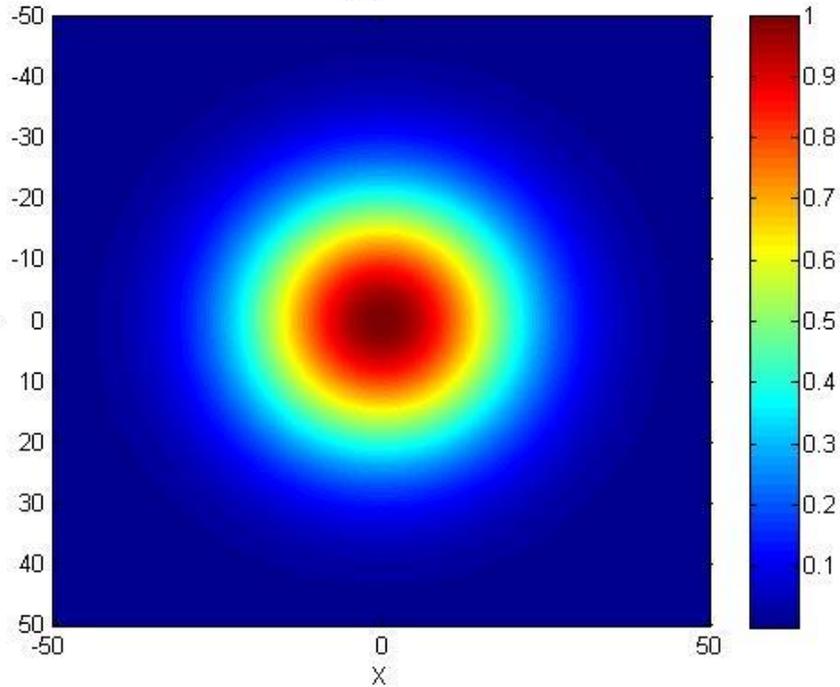
$$\psi(x) = AH_m \left( \frac{\sqrt{2}}{a} x \right) \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

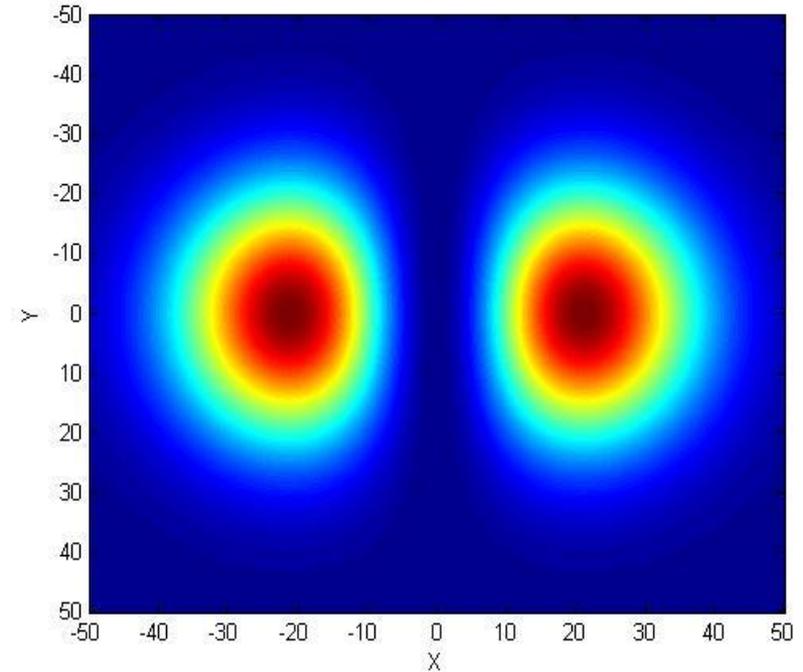


Perfil da intensidade do campo elétrico para os modos normais de uma fibra óptica com índice de refração de perfil graduado

HE<sub>00</sub> mode

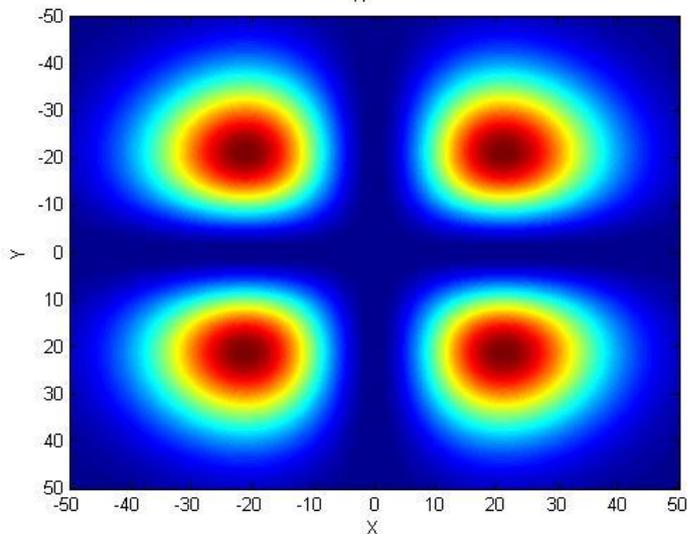


HE<sub>01</sub> mode

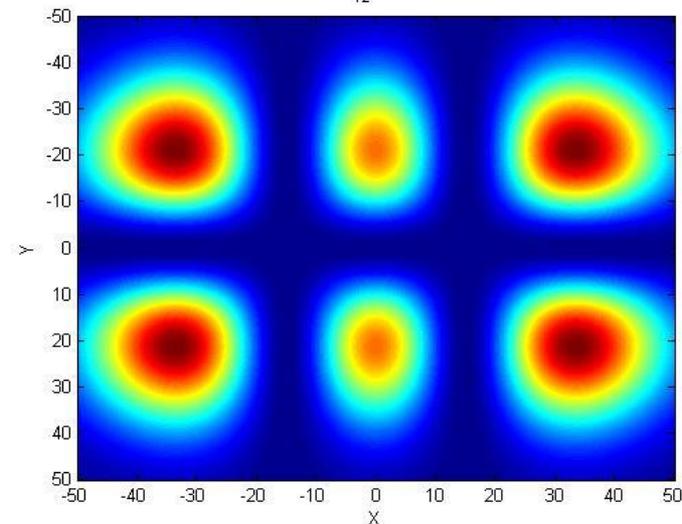


# Perfil da intensidade do campo elétrico para os modos normais de uma fibra óptica com índice de refração de perfil graduado

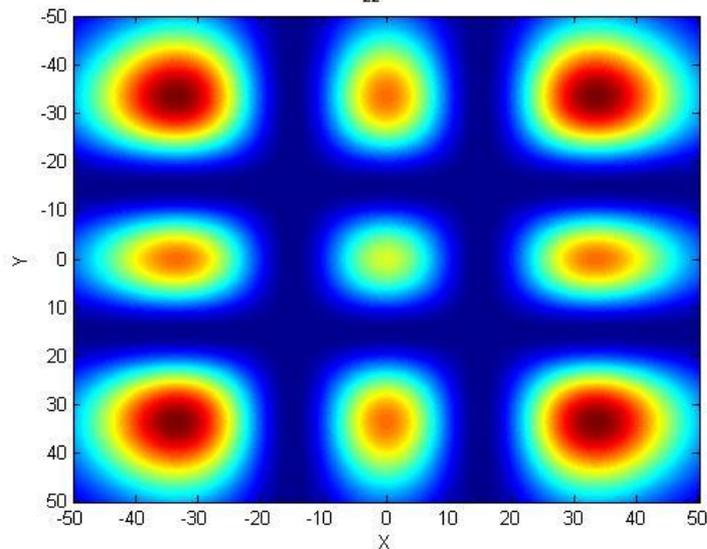
HE<sub>11</sub> mode



HE<sub>12</sub> mode



HE<sub>22</sub> mode

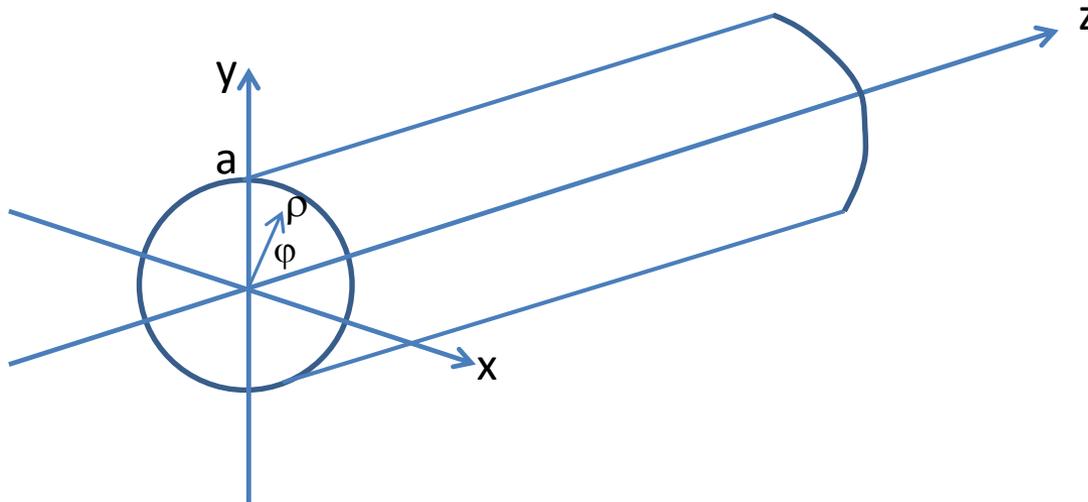


# Fibras Ópticas

## Modelos ondulatórios

- Fibra cilíndrica de índice de refração com perfil em degrau

$$n = \begin{cases} n_1; & \rho \leq a, \\ n_2; & \rho > a. \end{cases} \quad \text{Perfil do índice de refração}$$



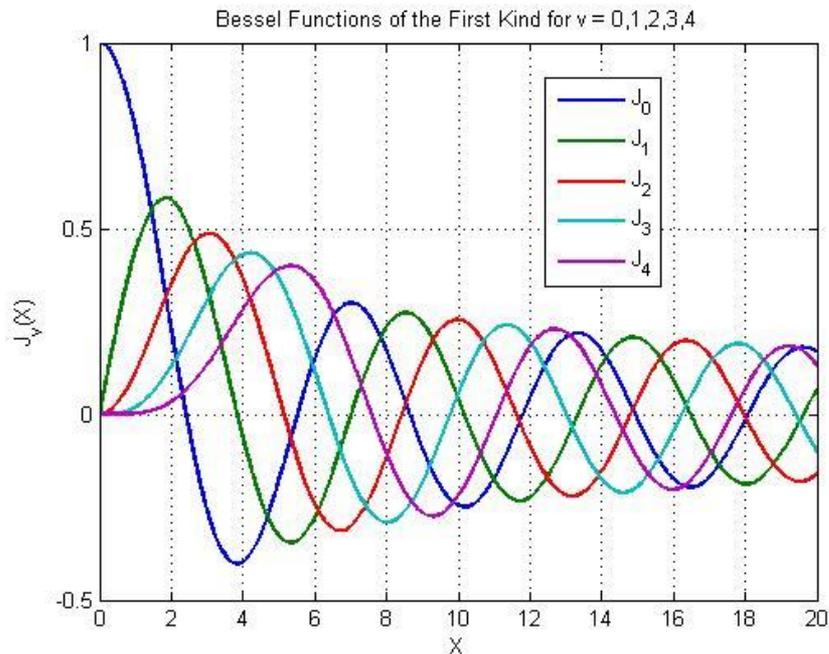
$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + n^2 k_0^2 E_z = 0.$$

Equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas

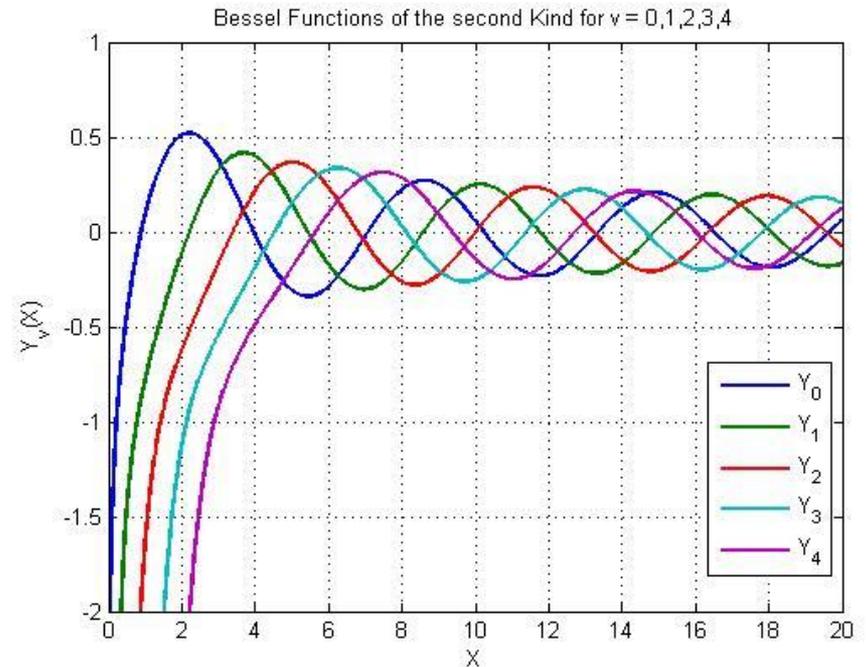
# Funções de Bessel do tipo $J_n(x)$ e $Y_n(x)$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2)y = 0$$

$$y(x) = J_n(x)$$



$$Y_n(x) = \lim_{\gamma \rightarrow n} \frac{\cos(\gamma\pi) J_n(x) - J_{-n}(x)}{\sin(\gamma\pi)}$$

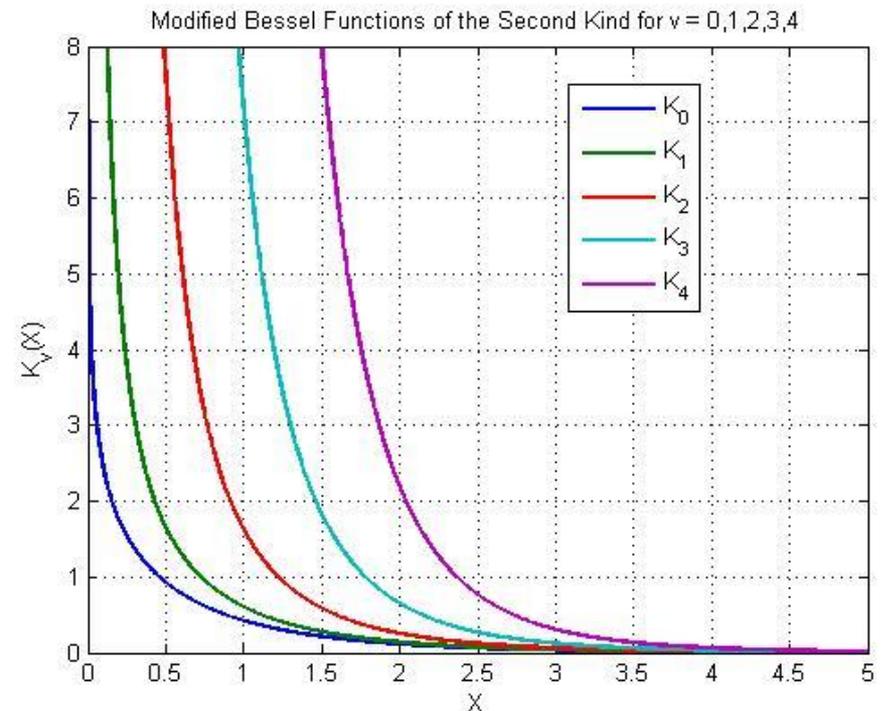
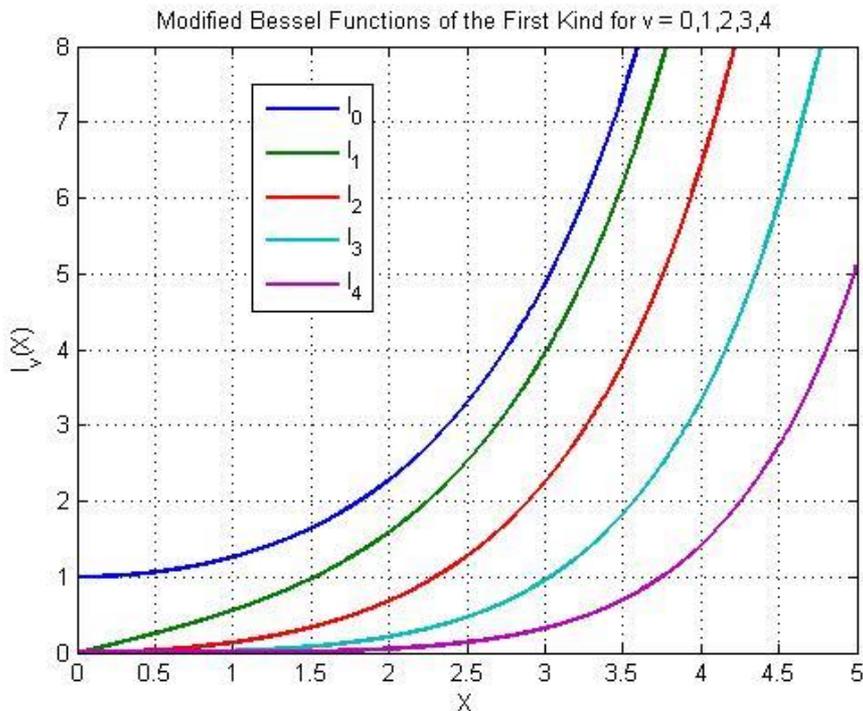


# Funções de Bessel do tipo $I_n(x)$ e $K_n(x)$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 - \gamma^2) y = 0$$

$$y(x) = I_\gamma(x)$$

$$K_\gamma = \frac{\pi I_{-\gamma}(x) - I_\gamma(x)}{2 \sin(\gamma\pi)}$$



# Fibras Ópticas

## Modelos ondulatórios

- Fibra cilíndrica de índice de refração com perfil em degrau

### Solução da equação de Helmholtz

$$E_z = \begin{cases} AJ_m(p\rho) \exp(im\phi) \exp(i\beta z); & \rho \leq a \\ CK_m(q\rho) \exp(im\phi) \exp(i\beta z); & \rho > a \end{cases}$$

$$p^2 = n_1^2 k_0^2 - \beta^2,$$

$$q^2 = \beta^2 - n_2^2 k_0^2.$$

$$H_z = \begin{cases} BJ_l(p\rho) \exp(il\phi) \exp(i\beta z); & \rho \leq a \\ DK_l(q\rho) \exp(il\phi) \exp(i\beta z); & \rho > a \end{cases}$$

$J_m, K_m$ : Funções de Bessel

As outras componentes dos campos elétrico e magnético são determinadas a partir das equações de Maxwell

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{i}{p^2} \left( \beta \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \mu_0 \frac{\omega}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right) \\ E_\phi &= \frac{i}{p^2} \left( \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \mu_0 \omega \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \\ H_\rho &= \frac{i}{p^2} \left( \beta \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - \epsilon_0 n^2 \frac{\omega}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \right) \\ H_\phi &= \frac{i}{p^2} \left( \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \epsilon_0 n^2 \omega \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) \end{aligned} \quad \rho \leq a$$

$$\begin{aligned} E_\rho &= \frac{-i}{q^2} \left( \beta \frac{\partial E_z}{\partial \rho} + \mu_0 \frac{\omega}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} \right) \\ E_\phi &= \frac{i}{q^2} \left( \mu_0 \omega \frac{\partial H_z}{\partial \rho} - \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} \right) \\ H_\rho &= \frac{i}{q^2} \left( \epsilon_0 n^2 \frac{\omega}{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \\ H_\phi &= \frac{-i}{q^2} \left( \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} + \epsilon_0 n^2 \omega \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) \end{aligned} \quad \rho > a$$

# Fibras Ópticas

## Modelos ondulatórios

- **Fibra cilíndrica de índice de refração com perfil em degrau**

**Equação de dispersão para a constante de propagação  $\beta$   
a partir das condições de fronteira na interface núcleo/camada externa ( $\rho = a$ )**

Continuidade dos campos tangenciais  
Condições de Dirichlet

$$N_x(E_1 - E_2) = 0$$

$$N_x(H_1 - H_2) = 0$$

Continuidade dos campos normais  
Condições de Neumann

$$N \cdot (D_1 - D_2) = 0$$

$$N \cdot (B_1 - B_2) = 0$$

**N** : vetor normal à interfase região 1/região 2

$$\left[ \frac{J'_m(pa)}{pJ_m(pa)} + \frac{K'_m(qa)}{qK_m(qa)} \right] \left[ \frac{J'_m(pa)}{pJ_m(pa)} + \frac{n_2^2 K'_m(qa)}{n_1^2 qK_m(qa)} \right] = \frac{m^2}{a^2} \left( \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right) \left( \frac{1}{p^2} + \frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{1}{q^2} \right)$$

$J'_m$  e  $K'_m$  são as primeiras derivadas das funções de Bessel  $J_m$ ,  $K_m$  respectivamente

**A solução desta equação para  $\beta$  é numérica.**

**A existência de soluções de  $\beta$  para diferentes valores dos coeficientes:  $m$  e  $l = 1, 2, 3, \dots$   
dão origem aos diferentes modos de propagação:  $\beta_{m,l}$**

# Fibras Ópticas

## Modelos ondulatórios

- Fibra cilíndrica de índice de refração com perfil em degrau

$\beta_{m,l}$  : constante de propagação  
 $m, l : 1, 2, 3, \dots$



Definem os diferentes modos de propagação

$$\bar{n}_{m,l} = \frac{\beta_{m,l}}{k_0} \quad \text{Índice de refração efetivo do modo } (m,n)$$

$n_2 < \bar{n}_{m,n} \leq n_1$  : Condição necessária dos modos guiados

$\bar{n}_{m,n} \leq n_2$  : Modos não guiados

- Nomenclatura dos modos

$H_z, E_z \neq 0$   Modos híbridos   $HE_{m,l} \rightarrow H_z \text{ dominate}$   
 $EH_{m,l} \rightarrow E_z \text{ dominate}$

$m = 0$   Modos transversais   $HE_{0,l} \rightarrow TE_{0,l} \text{ Modo de campo elétrico transversal}$   
 $EH_{0,l} \rightarrow TM_{0,l} \text{ Modo de campo magnético transversal}$

# Fibras Ópticas

## Modelos ondulatórios

- Fibra cilíndrica de índice de refração com perfil em degrau

Condição de corte dos modos guiados “cut off”

$$k_m(q\rho) = \left(\frac{\pi}{2q\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(-q\rho)$$

Perfil do campo região da camada externa

$$q = 0 \text{ ou } \bar{n} = n_2$$

Limite para a condição de corte

**Frequência normalizada: define a condição de corte e o número de modos guiados**

$$V = k_0 a (n_1^2 - n_2^2)^{1/2} \approx (2\pi/\lambda) a n_1 \sqrt{2\Delta}$$

$$\text{Numero de modos} = V^2/2$$

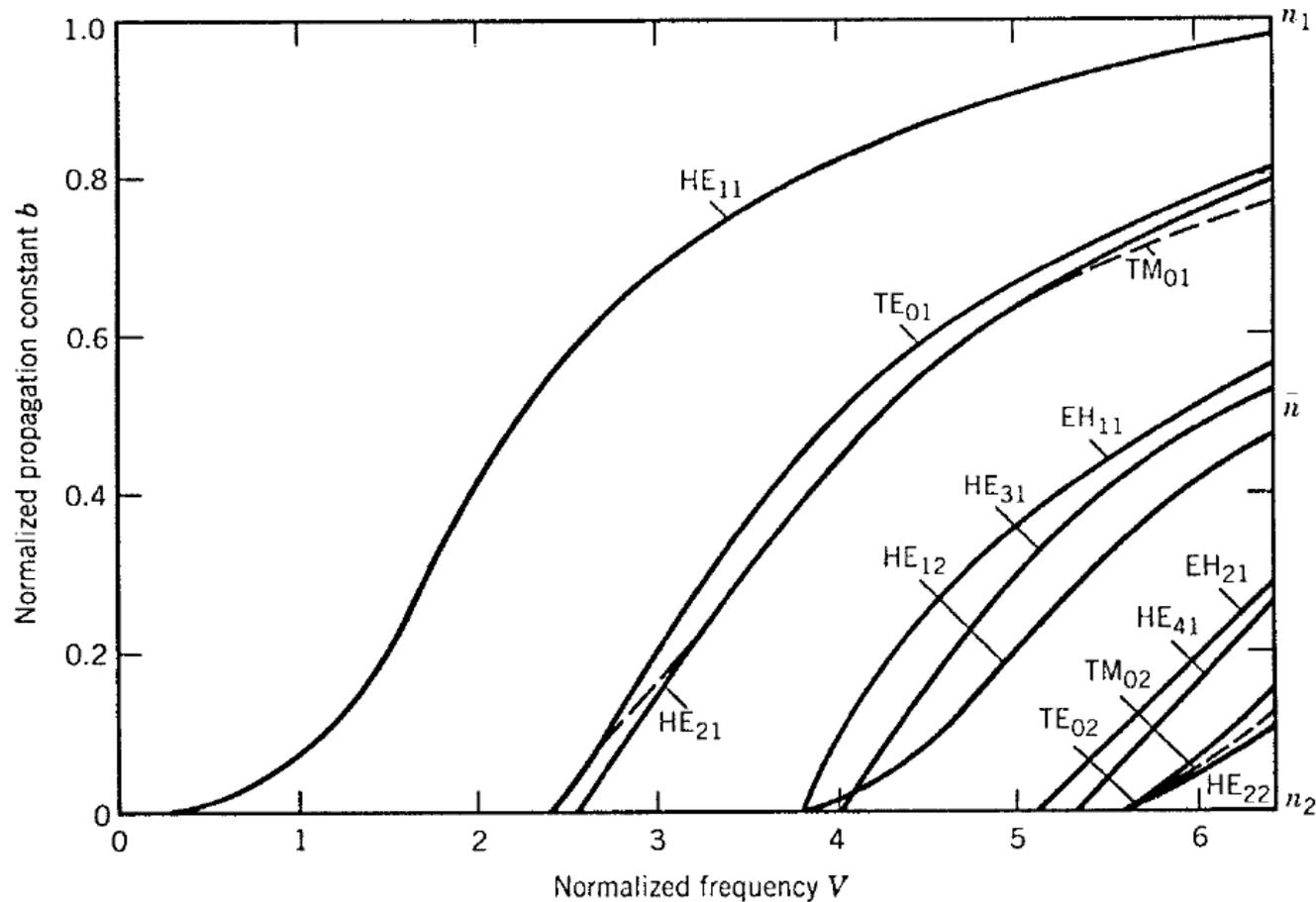
**Constante de propagação normalizada**

$$b = \frac{\beta/k_0 - n_2}{n_1 - n_2} = \frac{\bar{n} - n_2}{n_1 - n_2}$$

# Fibras Ópticas

## Modelos ondulatórios

- Fibra cilíndrica de índice de refração com perfil em degrau



Curva da constante de propagação normalizada “ $b$ ” em função da frequência normalizada “ $V$ ”

# Fibras Ópticas

## Modelos ondulatórios

- Fibra cilíndrica de índice de refração com perfil em degrau

A fibra óptica mono modo suporta somente o modo  $HE_{11}$  : modo fundamental

Regra de projeto para uma fibra mono -modo

Modos  $TE_{0,1}$  e  $TM_{0,1}$   
na condição de corte

$m = 0$



$$\left[ \begin{array}{l} pJ_0(pa)K_0'(qa) + qJ_0'(pa)K_0(qa) = 0, \\ pn_2^2 J_0(pa)K_0'(qa) + qn_1^2 J_0'(pa)K_0(qa) = 0. \\ q = 0 \\ pa = V \end{array} \right.$$



Fibras para telecomunicação  
 $\lambda = 1,55 \mu\text{m}$ ,  $a = 4 \mu\text{m}$



$$V = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) an_1 \sqrt{2\Delta} < 2,405$$

# Representação da propagação da luz através de fibras multimodo e monomodo

