Mecânica dos Fluidos II (PME 2330)
Gabarito Segunda Prova - 2015

1. (5 pontos) Considere o escoamento permanente, incompressível e laminar em uma placa plana, como mostrado na figura. Na entrada ($x=0$) a velocidade é U_0 uniforme. Ao longo do escoamento vai crescendo uma camada limite de espessura δ. Utilizando um método integral, determine o crescimento da camada limite sabendo que o gradiente de pressão é negativo e constante, isto é $-\frac{dp}{dx}=A=cte>0$. Para isto, utilize um perfil de velocidade da forma:

$$\frac{u}{U}=\begin{cases} f(\eta) & \text{para} \quad 0\le y\le\delta \\ 1 & \text{para} \quad y>\delta \end{cases}$$

onde $\eta=\frac{y}{\delta}$ e $U=U(x)$ é a velocidade na corrente livre. Observe que $f(\eta)$ é um perfil "razoável", que satisfaz a condição de não escorregamento e fornece um valor finito de derivada na parede, além de ser contínuo na borda da camada limite.

a) Demonstre que a velocidade na corrente livre resulta:

$$\frac{U}{U_0}=(1+\tilde{x})^{1/2}, \text{ onde } \tilde{x}=\frac{x}{x_A} \text{ e } x_A=\frac{\rho U_0^2}{2A}.$$

b) Demonstre que a espessura da camada limite adimensional satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$\frac{C_\tau}{Re_A}=\left(C_\theta+\frac{1}{2}C_d\right)(1+\tilde{x})^{-1/2}\,\tilde{\delta}^2+\frac{1}{2}C_\theta\,(1+\tilde{x})^{1/2}\frac{d}{d\tilde{x}}\left(\tilde{\delta}^2\right)$$

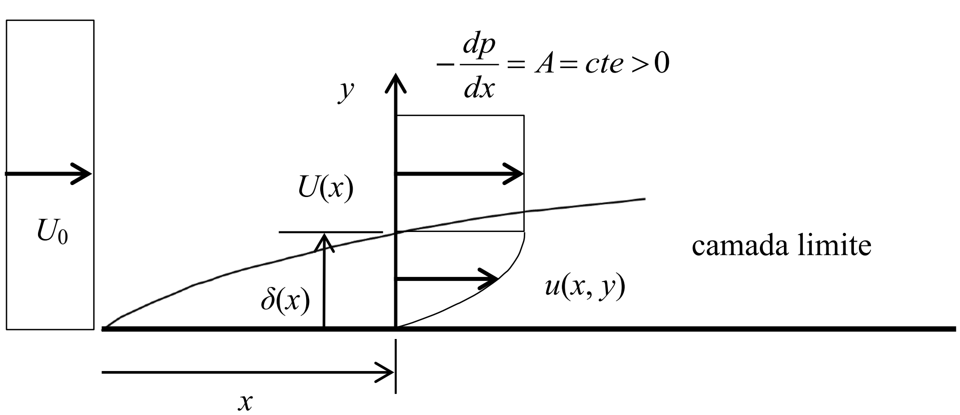
onde $\tilde{\delta}=\frac{\delta}{x_A}$, $Re_A=\frac{U_0\,x_A}{\nu}$, $C_\tau=f'(0)$, $C_\theta=\int_0^1 f(\eta)[1-f(\eta)]d\eta$ e $C_d=\int_0^1[1-f(\eta)]d\eta$.

c) Como cresce a camada limite (mais rapidamente ou mais lentamente) em comparação com a do problema de Blasius ($\frac{dp}{dx}=0, U_0=cte$)? Por que?

Fórmulas: tensão de cisalhamento na parede, Bernoulli, equação integral de von Karman, espessura de deslocamento, espessura de momento:

$$\tau_p=\mu\frac{\partial u}{\partial y}(y=0) \quad ; \quad p+\frac{1}{2}\rho U^2=cte \quad ; \quad \frac{\tau_p}{\rho}=\frac{d}{dx}\left(U^2\theta\right)+U\,\delta^*\frac{dU}{dx} \quad ; \quad \delta^*=\int_0^\delta\left(1-\frac{u}{U}\right)dy$$

$$\theta=\int_0^\delta\frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy$$



Solução:

a) Aplicando Bernoulli na corrente livre, obtemos:

$$p+\frac{1}{2}\rho U^2 = cte \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dx} = -\rho\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}U^2\right)$$

Integrando na posição, com o gradiente de pressão constante, resulta:

$$\frac{d}{dx}\left(U^2\right)=\frac{2}{\rho}\left(-\frac{dp}{dx}\right)=\frac{2A}{\rho} \quad \Rightarrow \quad U^2=\frac{2A}{\rho}x+C\,.$$

Como $U(0)=U_0 \quad \Rightarrow \quad U^2=\frac{2A}{\rho}x+U_0^2$.

Finalmente, adimensionalizando resulta: $\frac{U}{U_0}=\left(1+\tilde{x}\right)^{1/2}$.

b) Calculamos os termos da equação integral de von Karman.
Da tensão de cisalhamento na parede, resulta:

$$\tau_p=\mu\frac{\partial u}{\partial y}(y=0)=\frac{\mu U}{\delta}f'(0)=\frac{\mu U}{x_A\tilde{\delta}}C_\tau$$

Das espessuras:

$$\delta^*=\int_0^\delta\left(1-\frac{u}{U}\right)dy=\delta\int_0^1\left[1-f(\eta)\right]d\eta=C_d\,x_A\,\tilde{\delta}$$

$$\theta=\int_0^\delta\frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy=\delta\int_0^1 f(\eta)\left[1-f(\eta)\right]d\eta=C_\theta\,x_A\,\tilde{\delta}$$

A equação de von Karman pode ser escrita como:

$$\frac{\tau_p}{\rho}=\theta\frac{d}{dx}\left(U^2\right)+U^2\frac{d\theta}{dx}+\frac{1}{2}\delta^*\frac{d}{dx}\left(U^2\right)=\left(\theta+\frac{1}{2}\delta^*\right)\frac{d}{dx}\left(U^2\right)+U^2\frac{d\theta}{dx}$$

Subsituindo as expressões calculadas anteriormente e dividindo por U_0^2, obtemos:

$$\frac{\mu C_\tau}{\rho U_0 x_A\tilde{\delta}}\left(\frac{U}{U_0}\right)=\left(C_\theta+\frac{1}{2}C_d\right)\tilde{\delta}\frac{d}{d\tilde{x}}\left[\left(\frac{U}{U_0}\right)^2\right]+\left(\frac{U}{U_0}\right)^2 C_\theta\frac{d\tilde{\delta}}{d\tilde{x}}=\left(C_\theta+\frac{1}{2}C_d\right)\tilde{\delta}+\left(\frac{U}{U_0}\right)^2 C_\theta\frac{d\tilde{\delta}}{d\tilde{x}}$$

$$\frac{C_\tau}{Re_A}=\left(\frac{U}{U_0}\right)^{-1}\left(C_\theta+\frac{1}{2}C_d\right)\tilde{\delta}^2+\left(\frac{U}{U_0}\right)C_\theta\,\tilde{\delta}\frac{d\tilde{\delta}}{d\tilde{x}}=\left(C_\theta+\frac{1}{2}C_d\right)\left(1+\tilde{x}\right)^{-1/2}\tilde{\delta}^2+\frac{1}{2}C_\theta\left(1+\tilde{x}\right)^{1/2}\frac{d}{d\tilde{x}}\left(\tilde{\delta}^2\right)$$

A espessura da camada limite satisfaz:

$$\frac{C_\tau}{Re_A}=\left(C_\theta+\frac{1}{2}C_d\right)\left(1+\tilde{x}\right)^{-1/2}\tilde{\delta}^2+\frac{1}{2}C_\theta\left(1+\tilde{x}\right)^{1/2}\frac{d}{d\tilde{x}}\left(\tilde{\delta}^2\right)$$

com condição de contorno $\tilde{\delta}\left(\tilde{x}=0\right)=0$.

c) A variação da camada limite pode ser escrita como:

$$\frac{d}{d\tilde{x}}\left(\tilde{\delta}^2\right)=\frac{2C_\tau}{C_\theta Re_A}\left(1+\tilde{x}\right)^{-1/2}-2\left(1+\frac{1}{2}\frac{C_d}{C_\theta}\right)\left(1+\tilde{x}\right)^{-1}\tilde{\delta}^2$$

Para fazer uma comparação com a solução de Blasius, observamos que $x_A\to\infty$ e $\tilde{x}\to 0$ para $\frac{dp}{dx}\to 0$. A expresão anterior pode ser escrita, en forma dimensional, como:

$$\frac{d}{dx}\left(\delta^2\right)=\frac{2C_\tau\nu}{C_\theta U_0}\left(1+\tilde{x}\right)^{-1/2}-\frac{2}{x_A}\left(1+\frac{1}{2}\frac{C_d}{C_\theta}\right)\left(1+\tilde{x}\right)^{-1}\delta^2$$

Como a variação da camada limite na solução de Blasius é $\left[\frac{d}{dx}\left(\delta^2\right)\right]_B=\frac{2C_\tau\nu}{C_\theta U_0}$, resulta:

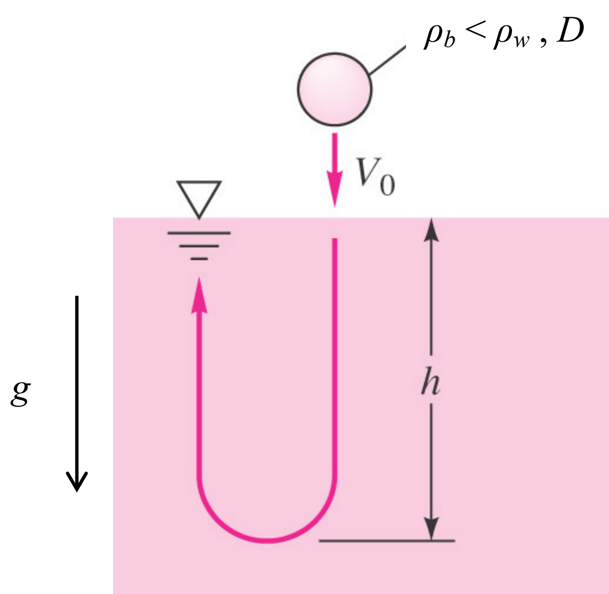
$\frac{d}{dx}(\delta^2) = \left[\frac{d}{dx}(\delta^2)\right]_B (1+\tilde{x})^{-1/2} - \frac{2}{x_A}\left(1+\frac{1}{2}\frac{C_d}{C_\theta}\right)(1+\tilde{x})^{-1}\delta^2 < \left[\frac{d}{dx}(\delta^2)\right]_B$, isto é, a camada limite crescerá mais lentamente que na solução de Blasius.

Alternativamente, observamos que para a solução de Blasius, $\frac{\delta}{x} \cong \frac{5}{Re_x^{1/2}}$, onde $Re_x = \frac{U_0\,x}{\nu}$. O crescimento da camada limite é, portanto: $\delta(x) \cong 5\left(\frac{\nu}{U_0}\right)^{1/2} x^{1/2}$. Como localmente a velocidade da corrente livre é $U > U_0$, a camada limite crescerá mais lentamente que no problema de Blasius.

2. (3 pontos) Uma bola flutuante de massa específica ρ_b e diâmetro D que caiu na água (de massa específica $\rho_w > \rho_b$) à velocidade de entrada V_0 penetrará uma distância h e depois se moverá novamente para cima (fora) como mostra a figura. Faça uma análise dinâmica desse problema admitindo um coeficiente de arrasto válido para escoamento de inércia desprezível $C_D = \frac{24}{Re_D}$ e deduza uma expressão para h e o correspondente tempo de penetração T em função das propriedades do sistema. (Extraído de White, F.M., "*Fluid Mechanics*", 4th edition, McGraw-Hill).

Fórmulas: volume da esfera: $\frac{1}{6}\pi D^3$, área do círculo: $\frac{1}{4}\pi D^2$.

Ajudas para o cálculo: $\int \frac{dx}{a\,x+b} = \frac{1}{a}\ln(a\,x+b) + cte$, $\int \frac{x\,dx}{a\,x+b} = \frac{1}{a^2}\left[a\,x - b\ln(a\,x+b)\right] + cte$



Solução:

Considerando o eixo z na direção vertical descendente e com origem na superfície de líquido, a equação de Newton para a bola, considerando forças de peso, empuxo e arrasto, fornece:

$$-(\rho_w - \rho_b)\,g\,\upsilon_b - C_D\,\frac{1}{2}\rho_w V^2 A_f = \rho_b\,\upsilon_b\,\frac{dV}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{dt} = -\left(\frac{\rho_w}{\rho_b} - 1\right)g - \frac{1}{2}C_D\,\frac{\rho_w}{\rho_b}\frac{A_f}{\upsilon_b}V^2$$

$$\frac{A_f}{\upsilon_b}=\frac{\frac{1}{4}\pi D^2}{\frac{1}{6}\pi D^3}=\frac{3}{2D} \quad ; \quad C_D=\frac{24}{Re_D}=\frac{24\,\mu}{\rho_w V D}$$

Substituindo, obtemos $\dfrac{dV}{dt}=-\left(\dfrac{\rho_w}{\rho_b}-1\right)g-\dfrac{1}{2}\dfrac{24\mu}{\rho_w V D}\dfrac{\rho_w}{\rho_b}\dfrac{3}{2D}V^2=-\dfrac{18\mu}{\rho_b D^2}V-\left(\dfrac{\rho_w}{\rho_b}-1\right)g$

Separando variáveis e integrando, e fazendo $a=\dfrac{18\mu}{\rho_b D^2}$ e $b=\left(\dfrac{\rho_w}{\rho_b}-1\right)g$ resulta: $-\displaystyle\int\frac{dV}{aV+b}=t+C$

$-\dfrac{1}{a}\ln\left(aV+b\right)=t+C$; para $t=0$, $V(t=0)=V_0 \;\Rightarrow\; C=-\dfrac{1}{a}\ln\left(aV_0+b\right)$

A velocidade resulta, então: $-\dfrac{1}{a}\ln\left(\dfrac{aV+b}{aV_0+b}\right)=t \;\Rightarrow\; V(t)=-\dfrac{b}{a}+\dfrac{b}{a}\left(1+\dfrac{a}{b}V_0\right)\exp\left(-at\right)$

O tempo de penetração resulta da condição $V(t=T)=0$, da onde $T=\dfrac{1}{a}\ln\left(1+\dfrac{a}{b}V_0\right)$

Para calcular a profundidade, observamos que $\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{dV}{dz}\dfrac{dz}{dt}=V\dfrac{dV}{dz}$

$V\dfrac{dV}{dz}=-\dfrac{18\mu}{\rho_b D^2}V-\left(\dfrac{\rho_w}{\rho_b}-1\right)g=-(aV+b)$; separando variáveis e integrando, resulta: $-\displaystyle\int\frac{V\,dV}{aV+b}=z+C$

$-\dfrac{1}{a^2}\left[aV-b\ln\left(aV+b\right)\right]=z+C$; para $z=0$, $V(z=0)=V_0 \;\Rightarrow\; C=-\dfrac{1}{a^2}\left[aV_0-b\ln\left(aV_0+b\right)\right]$

A posição em função da velocidade resulta, então: $z(V)=\dfrac{1}{a^2}\left[a\left(V_0-V\right)+b\ln\left(\dfrac{aV+b}{aV_0+b}\right)\right]$

A profundidade resulta da condição $z(V=0)=h$, da onde $h=\dfrac{V_0}{a}-\dfrac{b}{a^2}\ln\left(1+\dfrac{a}{b}V_0\right)$.

Alternativamente, a profundidade de penetração pode ser calculada integrando a velocidade no tempo:

$$z(t)=\int V(t)dt \;\Rightarrow\; z(t)=\int\left[-\frac{b}{a}+\frac{b}{a}\left(1+\frac{a}{b}V_0\right)\exp\left(-at\right)\right]dt=-\frac{b}{a}t-\frac{b}{a^2}\left(1+\frac{a}{b}V_0\right)\exp\left(-at\right)+C$$

Da condição inicial $z(t=0)=0$ resulta $C=\dfrac{b}{a^2}\left(1+\dfrac{a}{b}V_0\right)$, da onde obtemos:

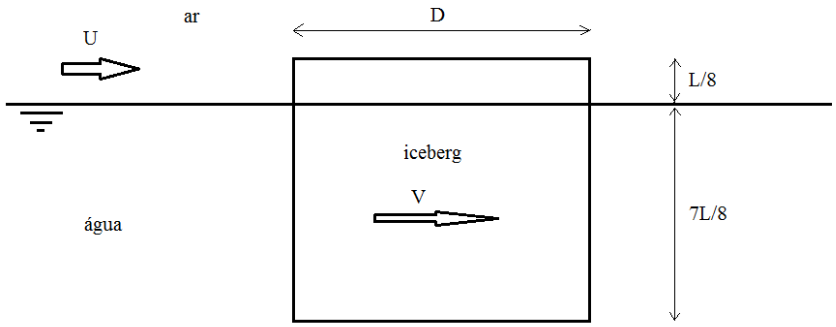
$$z(t)=-\frac{b}{a}t+\frac{b}{a^2}\left(1+\frac{a}{b}V_0\right)\left[1-\exp\left(-at\right)\right]$$

A profundidade resulta da condição $z(t=T)=h$, da onde $h=-\dfrac{b}{a}T+\dfrac{b}{a^2}\left(1+\dfrac{a}{b}V_0\right)\left[1-\exp\left(-aT\right)\right]$.

Substituindo o tempo de penetração, obtemos o mesmo resultado para a profundidade de penetração:

$$h=-\frac{b}{a}\left[\frac{1}{a}\ln\left(1+\frac{a}{b}V_0\right)\right]+\frac{b}{a^2}\left(1+\frac{a}{b}V_0\right)\left[1-\left(1+\frac{a}{b}V_0\right)^{-1}\right]=\frac{V_0}{a}-\frac{b}{a^2}\ln\left(1+\frac{a}{b}V_0\right)$$

3. (2 pontos) Um iceberg pode ser aproximado como um cilindro de comprimento L e diâmetro D, com $D>>L$. A parte submersa do iceberg corresponde a $\dfrac{7}{8}L$. Imagine que o iceberg se move com velocidade constante V na água em repouso, impulsionado pelo vento de velocidade U. Se o coeficiente de arrasto da parte submersa do iceberg em água é C_{Dw} e o coeficiente de arrasto da parte acima da superfície sujeita ao vento é C_{Da}, e se são conhecidas as massas específicas do ar ρ_a e da água ρ_w, obtenha um expressão para a velocidade V do iceberg. (Extraído de White, F.M., "*Fluid Mechanics*", 4th edition, McGraw-Hill).



Solução:

O arrasto do ar tem que ser equilibrado pelo arrasto da água. Assim:

$$\frac{1}{2}\rho_a (U-V)^2 \frac{L}{8} D\, C_{Da} = \frac{1}{2}\rho_w V^2 \frac{7L}{8} D\, C_{Dw}$$

Isso resulta: $(U-V)^2 = \dfrac{7\,\rho_w\, C_{Dw}}{\rho_a\, C_{Da}} V^2$

Chamando $\dfrac{7\,\rho_w\, C_{Dw}}{\rho_a\, C_{Da}} = k$:

$$U - V = \sqrt{k}\, V$$

que resulta $V = \dfrac{1}{1+\sqrt{k}} U$