Mecânica dos Fluidos II (PME 2330)
Gabarito Segunda prova Prova - 2014

**1.** (5 pontos) Considere o escoamento permanente, incompressível e laminar na entrada de um tubo circular de raio $R$, como mostrado na figura. Na entrada ($x = 0$) a velocidade é $U_0$ uniforme. Ao longo do escoamento vai crescendo uma camada limite de espessura $\delta(x)$, que delimita a região onde os efeitos viscosos são importantes. Utilizando um método integral, queremos determinar o comprimento de entrada hidrodinâmico, isto é, a distância $L$ a partir da qual o perfil de velocidade não varia com a posição. Para isto, utilizaremos um perfil de velocidade da forma:

$$\frac{u}{U} = \begin{cases} f(\eta) & \text{para} \quad 0 \le y \le \delta \\ 1 & \text{para} \quad \delta \le y \le R \end{cases}$$

onde $\eta = \dfrac{y}{\delta} = \dfrac{R-r}{\delta}$ e $U = U(x)$ é a velocidade na corrente livre (região não viscosa); observar que $f(\eta)$ é um perfil "razoável", que satisfaz a condição de não escorregamento e fornece um valor finito de derivada na parede, além de ser contínuo na borda da camada limite até a condição completamente desenvolvida.

a) Descrever fisicamente o processo, indicando o que acontece qualitativamente com a velocidade na corrente livre, o gradiente de pressão e a tensão de cisalhamento na parede. (0,5 pontos)

b) Da equação de continuidade, demonstrar que a velocidade na corrente livre resulta:

$U = \dfrac{U_0}{\left(1-\tilde{\delta}\right)^2 + 2\tilde{\delta}\, I_1\left(\tilde{\delta}\right)}$, onde $I_1\left(\tilde{\delta}\right) = \int_0^1 f(\eta)\left(1-\eta\,\tilde{\delta}\right)d\eta$ e $\tilde{\delta} = \dfrac{\delta}{R}$. (1 ponto)

c) Da equação de conservação do momento, demonstrar que:

$-\dfrac{dp}{dx} - \dfrac{2\tau_w}{R} = \rho \dfrac{d}{dx}\left\{U^2\left[\left(1-\tilde{\delta}\right)^2 + 2\tilde{\delta}\, I_2\left(\tilde{\delta}\right)\right]\right\}$, onde $p(x)$ e $\tau_w(x)$ são a pressão e tensão de cisalhamento na parede, respectivamente, e $I_2\left(\tilde{\delta}\right) = \int_0^1 f^2(\eta)\left(1-\eta\,\tilde{\delta}\right)d\eta$. (1 ponto)

d) Expressando as variáveis em função do perfil de velocidade, demonstrar que a espessura da camada limite satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$\frac{1}{Re_D} = -\frac{\tilde{\delta}}{4\,f'(0)}\left[\left(1-\tilde{\delta}\right)^2 + 2\,I_1\left(\tilde{\delta}\right)\right]\frac{d}{d\tilde{x}}\left\{\frac{\left(1-\tilde{\delta}\right)^2 - \frac{1}{2} + 2\tilde{\delta}\, I_2\left(\tilde{\delta}\right)}{\left[\left(1-\tilde{\delta}\right)^2 + 2\,I_1\left(\tilde{\delta}\right)\right]^2}\right\}$$

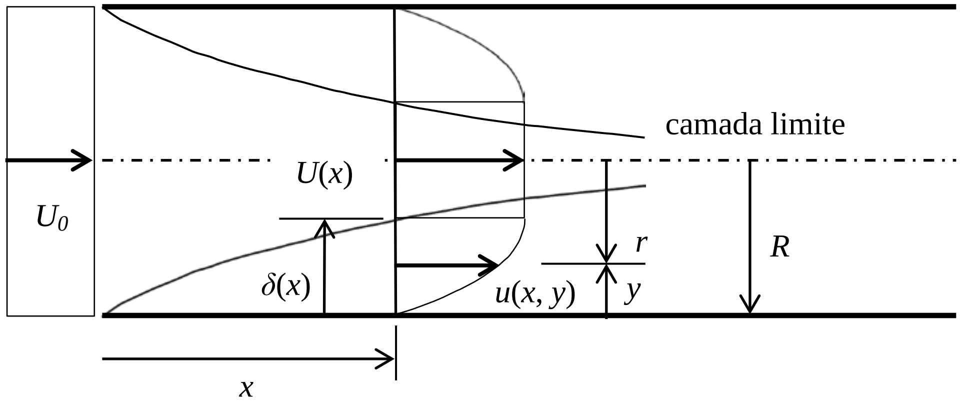
, onde $Re_D = \dfrac{U_0\, 2R}{\nu} = \dfrac{U_0\, D}{\nu}$ é o número de Reynolds baseado no diâmetro $D$, $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$ é a viscosidade cinemática e $\tilde{x} = \dfrac{x}{R}$. (2 pontos)

e) Utilizando o resultado do item anterior, demonstrar que o comprimento de entrada adimensional resulta $\dfrac{L}{D} = C\, Re_D$ . Determinar $C$. (0,5 pontos)

Nota: o resultado "exato" do problema de comprimento de entrada laminar para um tubo circular é $\dfrac{L}{D} = 0{,}05\, Re_D$ (para os detalhes da resolução, ver Kays, W. M.; Crawford, M. E. & Weigand, B., *Convective Heat and Mass Transfer*, 4ª Ed., Nova Iorque, McGraw-Hill, 2004).

Fórmulas: Equação de continuidade, conservação de momento na direção axial, tensão de cisalhamento na parede, Bernoulli:

$$\frac{d}{dx}\int_A u\, dA = 0 \quad ; \quad \frac{dF_x}{dx} = \rho\frac{d}{dx}\int_A u^2\, dA \quad ; \quad \tau_w = \mu\frac{\partial u}{\partial y}(y=0) \quad ; \quad p + \frac{1}{2}\rho U^2 = cte$$




Solução:

a) A camada limite que cresce na parede freia o escoamento e acelera a velocidade na corrente livre até o valor constante na condição completamente desenvolvida. A tensão de cisalhamento a muito grande (infinita) na entrada e diminui até o valor constante na condição completamente desenvolvida. O gradiente de pressão é negativo (a pressão diminui) com um valor absoluto maior até um valor constante na região completamente desenvolvida.

b) Da equação de continuidade:

$$U_0 \pi R^2 = \int_0^R u\, 2\pi r\, dr = 2\pi \int_0^R u\, r\, dr = 2\pi R^2 U \int_0^1 \frac{u}{U} \tilde{r}\, d\tilde{r} \quad \Rightarrow \quad U_0 = 2U \int_0^1 \frac{u}{U} \tilde{r}\, d\tilde{r}$$

A integral pode ser calculada como:

$$\int_0^1 \frac{u}{U} \tilde{r}\, d\tilde{r} = \int_0^{1-\tilde{\delta}} \frac{u}{U} \tilde{r}\, d\tilde{r} + \int_{1-\tilde{\delta}}^1 \frac{u}{U} \tilde{r}\, d\tilde{r} = \int_0^{1-\tilde{\delta}} \tilde{r}\, d\tilde{r} + \int_{1-\tilde{\delta}}^1 f\left(\frac{1-\tilde{r}}{\tilde{\delta}}\right) \tilde{r}\, d\tilde{r}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\tilde{\delta}\right)^2 + \int_{1-\tilde{\delta}}^1 f\left(\frac{1-\tilde{r}}{\tilde{\delta}}\right) \tilde{r}\, d\tilde{r}$$

Fazendo a substituição $\frac{1-\tilde{r}}{\tilde{\delta}} = \eta$, resulta $\tilde{r} = 1-\tilde{\delta}\,\eta$ e $d\tilde{r} = \tilde{\delta}\, d\eta$. Para $\tilde{r} = 1-\tilde{\delta}$ resulta $\eta = 1$, enquanto para $\tilde{r} = 1$ resulta $\eta = 0$; daqui:

$$\int_{1-\tilde{\delta}}^1 f\left(\frac{1-\tilde{r}}{\tilde{\delta}}\right) \tilde{r}\, d\tilde{r} = \int_1^0 f(\eta)\left(1-\tilde{\delta}\,\eta\right)\left(-\tilde{\delta} d\eta\right) = \tilde{\delta} \int_0^1 f(\eta)\left(1-\tilde{\delta}\,\eta\right) d\eta$$

Substituindo, resulta:

$$U_0 = 2U\left[\frac{1}{2}\left(1-\tilde{\delta}\right)^2 + \tilde{\delta}\int_0^1 f(\eta)\left(1-\tilde{\delta}\,\eta\right)d\eta\right] = U\left[\left(1-\tilde{\delta}\right)^2 + 2\tilde{\delta}\int_0^1 f(\eta)\left(1-\tilde{\delta}\,\eta\right)d\eta\right]$$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{U_0}{\left(1-\tilde{\delta}\right)^2 + 2\tilde{\delta}\, I_1\left(\tilde{\delta}\right)}$$

onde $I_1\left(\tilde{\delta}\right) = \int_0^1 f(\eta)\left(1-\eta\,\tilde{\delta}\right)d\eta$.

c) O diferencial de força na direção de escoamento é devida à pressão é o atrito:

$$dF_x = -dp\,\pi R^2 - \tau_w\, 2\pi R\, dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dF_x}{dx} = -\frac{dp}{dx}\pi R^2 - \tau_w\, 2\pi R = \pi R^2\left(-\frac{dp}{dx} - \frac{2\tau_w}{R}\right)$$

Substituindo na equação de conservação do momento:

$$\left(-\frac{dp}{dx} - \frac{2\tau_w}{R}\right)\pi R^2 = \rho\frac{d}{dx}\left[\int_0^R u^2\, 2\pi r\, dr\right] = 2\pi R^2 \frac{d}{dx}\left[U^2 \int_0^1 \left(\frac{u}{U}\right)^2 \tilde{r}\, d\tilde{r}\right]$$

Analogamente à integral da Eq. de continuidade, a integral anterior resulta:

$$\int_0^1 \left(\frac{u}{U}\right)^2 \tilde{r}\, d\tilde{r} = \left(1-\tilde{\delta}\right)^2 + 2\tilde{\delta}\int_0^1 f^2(\eta)\left(1-\tilde{\delta}\,\eta\right)d\eta = \left(1-\tilde{\delta}\right)^2 + 2\tilde{\delta}\, I_2\left(\tilde{\delta}\right)$$

onde $I_1(\tilde{\delta})=\int_0^1 f^2(\eta)(1-\eta\tilde{\delta})d\eta$. Substituindo, resulta:

$$-\frac{dp}{dx}-\frac{2\tau_w}{R}=\rho\frac{d}{dx}\left\{U^2\left[(1-\tilde{\delta})^2+2\tilde{\delta}\,I_2(\tilde{\delta})\right]\right\}$$

d) Aplicando Bernoulli na corrente livre, obtemos:

$$p+\frac{1}{2}\rho U^2=cte \quad\Rightarrow\quad \frac{dp}{dx}=-\rho\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}U^2\right)$$

Da definição da tensão de cisalhamento na parede, resulta:

$$\tau_w=\mu\frac{\partial u}{\partial y}(y=0)=\frac{\mu U}{\delta}f'(0)=\frac{\mu U}{R\tilde{\delta}}f'(0)$$

Substituindo, o termo de Bernoulli pode ser introduzido no lado direito e obtemos:

$$-\frac{2\mu U}{R^2\tilde{\delta}}f'(0)=\rho\frac{d}{dx}\left\{U^2\left[(1-\tilde{\delta})^2-\frac{1}{2}+2\tilde{\delta}\,I_2(\tilde{\delta})\right]\right\}$$

Definindo $Re_D=\frac{U_0\,2R}{\nu}$ e $\tilde{x}=\frac{x}{R}$ e substituindo $U$ podemos escrever a relação anterior como:

$$\frac{1}{Re_D}=-\frac{\tilde{\delta}}{4f'(0)}\left[(1-\tilde{\delta})^2+2I_1(\tilde{\delta})\right]\frac{d}{d\tilde{x}}\left\{\frac{(1-\tilde{\delta})^2-\frac{1}{2}+2\tilde{\delta}\,I_2(\tilde{\delta})}{\left[(1-\tilde{\delta})^2+2I_1(\tilde{\delta})\right]^2}\right\}$$

e) Chamando $\varphi(\tilde{\delta})=\frac{(1-\tilde{\delta})^2-\frac{1}{2}+2\tilde{\delta}\,I_2(\tilde{\delta})}{\left[(1-\tilde{\delta})^2+2I_1(\tilde{\delta})\right]^2}$, podemos escrever $\frac{d\varphi}{d\tilde{x}}=\frac{d\varphi}{d\tilde{\delta}}\frac{d\tilde{\delta}}{d\tilde{x}}$, resultando a relação anterior como:

$$\frac{1}{Re_D}=-\frac{\tilde{\delta}}{4f'(0)}\left[(1-\tilde{\delta})^2+2I_1(\tilde{\delta})\right]\frac{d\varphi}{d\tilde{\delta}}\frac{d\tilde{\delta}}{d\tilde{x}}$$

Integrando, com a condição de contorno $\tilde{\delta}(0)=0$, obtemos:

$$\frac{\tilde{x}}{Re_D}=-\frac{1}{4f'(0)}\int_0^{\tilde{\delta}}\tilde{\delta}\left[(1-\tilde{\delta})^2+2I_1(\tilde{\delta})\right]\frac{d\varphi}{d\tilde{\delta}}d\tilde{\delta}$$

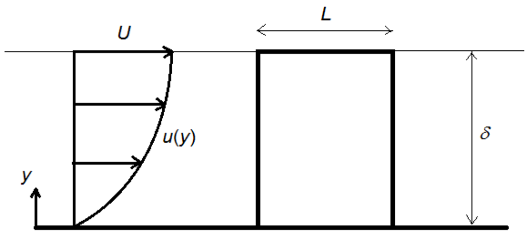
O comprimento de entrada acontece quando $\tilde{\delta}(\tilde{L})=1$; daqui resulta:

$$\frac{\tilde{L}}{Re_D}=\frac{L}{R\,Re_D}=\frac{2L}{D\,Re_D}=-\frac{1}{4f'(0)}\int_0^1\tilde{\delta}\left[(1-\tilde{\delta})^2+2I_1(\tilde{\delta})\right]\frac{d\varphi}{d\tilde{\delta}}d\tilde{\delta}$$

Daqui, obtemos finalmente:

$$\frac{L}{D}=C\,Re_D \quad\text{, onde } C=-\frac{1}{8f'(0)}\int_0^1\tilde{\delta}\left[(1-\tilde{\delta})^2+2I_1(\tilde{\delta})\right]\frac{d\varphi}{d\tilde{\delta}}d\tilde{\delta}$$

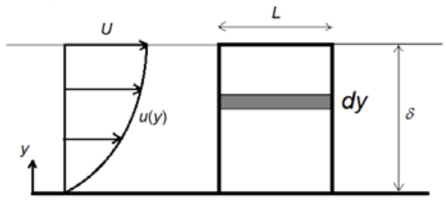
**2** (3 pontos) Uma placa plana de comprimento $L$ e altura $\delta$ é soldada numa parede paralelamente a uma camada limite que se aproxima, com um fluido de propriedades $\rho$ e $\nu$. Admita que o escoamento sobre a placa é totalmente turbulento e que o escoamento de aproximação segue a lei de potência $u(y)/U=(y/\delta)^{1/7}$. Deduza uma fórmula para o força de arrasto dessa placa como função de $U$, $L$, $\delta$, $\rho$ e $\nu$. Lembre-se que a placa tem os dois lados sujeitos ao arrasto.
Dados: coeficiente de arrasto da camada limite turbulenta para um lado de uma placa plana paralela à corrente: $C_D=\frac{0{,}031}{\mathrm{Re}_L^{1/7}}$.




(Extraído de Frank M. White, "Mecânica dos Fluidos", 4ª edição)

Solução:
Uma fatia *dy* sobre a placa vai sofrer um arrasto dado por:

$$dF = \frac{0{,}031\,\nu^{1/7}}{u^{1/7}L^{1/7}}\rho u^2\,L\,dy = 0{,}31\,\rho\nu^{1/7}\,u^{13/7}\,L^{6/7}\,dy$$




Substituindo o perfil de velocidades:

$$dF = 0{,}031\,\rho\nu^{1/7}\,U^{13/7}\,L^{6/7}\,\frac{y^{13/49}}{\delta^{13/49}}\,dy$$

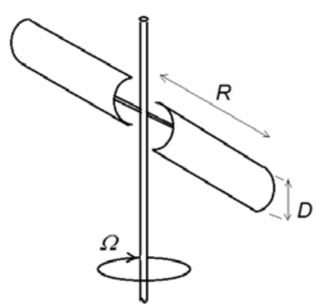
Integrando:

$$F = \int_0^{\delta} 0{,}031\,\rho\nu^{1/7}\,U^{13/7}\,L^{6/7}\,\frac{y^{13/49}}{\delta^{13/49}}\,dy$$

Que resulta:

$$F = \frac{49}{62}\times 0{,}031\,\rho\nu^{1/7}\,U^{13/7}L^{6/7}\delta = 0{,}0245\,\rho\nu^{1/7}\,U^{13/7}L^{6/7}\delta$$

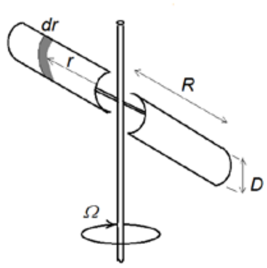
**3** (2 pontos) Um misturador rotativo consiste em dois semitubos de comprimento $R$ girando em torno de um braço central. Se o coeficiente de arrasto da parte côncava de um semitubo é dado por $C_D$, e o diâmetro é $D$, obtenha uma expressão para a potência $\dot{W}$ necessária para girar o misturador com velocidade angular $\Omega$ em fluido de massa específica $\rho$.




(Extraído de Frank M. White, "Mecânica dos Fluidos", 4ª edição)

Solução:
Um elemento *dr* em um raio *r* ao longo de um dos braços sofre um arrasto:

$$dF = C_D\,\frac{1}{2}\rho(\Omega r)^2\,D\,dr$$




Para os dois braços, esse arrasto gera um torque:

$$T=\int_0^R C_D\,\rho\Omega^2\,D r^3\,dr=C_D\,\rho\Omega^2\,D\frac{R^4}{4}$$

e a potência será:

$$\dot{W}=T\times\Omega=C_D\,\rho\Omega^3\,D\frac{R^4}{4}$$