Nota de Aula: Uma Primeira Forma para se Desenvolver o Teste de F para Hipóteses sobre Combinações Linear dos Coeficientes da Regressão

Nós já vimos as propriedades de MQO sob as hipótese do BLUE e, quando adicionamos a hipótese 6 de erros independentes, igualmente distribuídos vimos que podemos estabelecer testes de hipóteses sobre os parâmetros e que, também, estes testes de t e F têm distribuiçãp exata até para pequenas amostras.
Vamos ver agora uma forma mais geral para estes testes usando o estimador MQO e mostrando que ele engloba várias hipóteses usualmente utilizadas nos trabalhos econométricos. Antes, vamos ver um conjunto de hipóteses que engloba mais de 90% das hipóteses *nor malmente* utilizadas nos trabalhos empíricos.

i. H_0: $\beta_j = 0$, j=0,....,K. Esta hipótese define que x_j não tem nenhuma relação causal sobre y.

ii. H_0: $\beta_j = \gamma$, hipótese também bastante comum. O pesquisador pode querer testar se uma elasticidade representada pelo β_j é igual a um determinado valor.

iii. H_0: $\beta_1 + \beta_2 = 0$. Outra hipótese, também frequente nos trabalhos empíricos.

iv. H_0: $\beta_1 = \beta_2$ ou $\beta_1 - \beta_2 = 0$ sob esta hipótese o impacto causal de x_1 e x_2 sobre y é o mesmo.

v. H_0:

$$\begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}$$

Esta hipótese testa a existência de regressão, ou seja, procura saber se as variáveis explicativas de x_1 a x_k explicam as variações de y entorno de sua média. Ela testa o impacto de todas as varáveis explicativas sobre a variável dependente y. O intercepto não entra no vetor de coeficientes estimados, pois o que se deseja saber ‘se as variáveis explicativas incluídas na regressão explicam a variável dependente y.

vi. H_0: $\beta_{K-k_1+1} = 0$, ..., β_K : = 0, com $k_1 < K$; $q=[K- k1]$ e $j=0,..,K$, os q últimos coeficientes, por exemplo poderiam ser nulos ou qualquer conjunto de q coeficientes com q < K poderiam ser definidos como nulos o que significa que as q variáveis x_1 a x_q não teriam nenhuma influência para explicar as variações de y entorno de sua média. Essa situação seria como se o vetor $\boldsymbol{\beta}$ (k + 1) x 1, fosse parcionado em dois:

$$\begin{bmatrix} \beta_{k_1} \\ \beta_{K-k_1} \end{bmatrix}$$

e vetor (2.1) corresponde à H_0 especificada em *vi*.

Os seis exemplos acima podem ser resumidos em linguagem matricial bem mais concisa numa abordagem linear geral:

$$R\beta = r$$

onde R é uma matriz $q\ x\ k+1$,onde q é o número de restrições impostas sobre os k+1 coeficientes q é um número conhecido.

i)

$$\boldsymbol{R} = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \qquad \boldsymbol{r} = 0 \qquad \boldsymbol{q} = 1$$

ii)

$$R = \begin{bmatrix}0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\end{bmatrix} \qquad \mathrm{r} = \gamma_k \qquad q = 1$$

iii)

$$\boldsymbol{R} = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \qquad \boldsymbol{r} = 1 \qquad \boldsymbol{q} = 1$$

iv)

$$\boldsymbol{R} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \qquad \boldsymbol{r} = 0 \qquad \boldsymbol{q} = 1$$

i, ii, iii, e iv são todas hipóteses onde o teste de t pode ser usado, como casos particulares do teste de F.

v)

$\boldsymbol{R} = [\ \boldsymbol{0}\ \boldsymbol{I_k}\ ]$**,** onde $\boldsymbol{0}$ é um vetor de k zeros e I_k é uma matriz identidade k x k.

$$\boldsymbol{R} = [\boldsymbol{0}_{q\ x\ k_1}\ \boldsymbol{I}_q\ ] \qquad \mathbf{r = 0} \qquad \mathbf{q = K - k_1}$$

As hipóteses v e vi são combinações lineares ou sela mais de uma combinação linear e xisgem o uso do teste de F geral. Este pode então ser especializado paea lidar com inúmeras aplicações especificas. Dado o estimador MQO. um passo imediato é o computo do vetor $\left(\boldsymbol{R\hat{\beta}-r}\right)$. Esse vetor mede quanto a restrição sobre os βs distanciam valores especificados. Se a distância for "grande" de acordo com alguma métrica dúvida existe com relação a hipótese nula. Em econometria esta métrica que define grande ou pequeno está relacionada com os valores assumidos pela distribuição amostral sob Ho, neste caso a distribuição amostral de $\boldsymbol{R\hat{\beta}}$ quando $\boldsymbol{R\beta = r}$.
Primeiramente, vamos verificar o que ocorre com os dois primeiros momentos da distribuição amostral de $\boldsymbol{R\hat{\beta}}$.

Média:

$\boldsymbol{E(R\hat{\beta}) = R\beta}$

Variância:

VAR$\left(\boldsymbol{R\hat{\beta}}\right) = \boldsymbol{E}\left[\boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{\hat{\beta}} - \beta\right)\left(\boldsymbol{\hat{\beta}} - \beta\right)'\boldsymbol{R}'\right] = \boldsymbol{R}[\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{\hat{\beta}} - \beta\right)\left(\boldsymbol{\hat{\beta}} - \beta\right)']\boldsymbol{R}'$

Mas, sabemos que $E\left(\boldsymbol{\hat{\beta}} - \beta\right)\left(\boldsymbol{\hat{\beta}} - \beta\right)' = \boldsymbol{\sigma^2(X'X)^{-1}}$. Logo

VAR$\left(\boldsymbol{R\hat{\beta}}\right) = \boldsymbol{R[\sigma^2(X'X)^{-1}]R'}$. Sabemos também que $\boldsymbol{\hat{\beta} \sim N[\beta, \sigma^2(X'X)^{-1}]}$, portanto $\boldsymbol{R\hat{\beta}}$, como uma combinação linear de variáveis aleatórias normais, também se distribui normalmente,

$\boldsymbol{R\hat{\beta} \sim N[R\beta, \sigma^2 R[(X'X)^{-1}]R']}$. **Donde podemos concluir que**

$\boldsymbol{(R\hat{\beta} - r)'[\sigma^2 R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta} - r)/q \sim \chi^2_{(q)}}$,

Consequentemente

, s, $\dfrac{\boldsymbol{(R\hat{\beta}-r)'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta}-r)/q}}{\frac{\boldsymbol{\hat{\sigma}^2}}{\boldsymbol{n-k-1}}} \boldsymbol{\sim F(q, n-k-1)}$ ob : $Ho\colon (R\beta - r) = 0$

Observe que neste caso *v)* q = k, ou seja na hipótese nula nenhuma das k variáveis explicativas explicam y.

\

vi) Neste caso um conjunto de q<k variáveis não afetam y. A hipótese nula definida é para $Ho\colon \beta_1 = 0, \beta_2 = 0$, teremos:

$$\begin{bmatrix} 0\ 1\ 0 \ldots 0 \\ 0\ 0\ 1 \ldots\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ . \\ . \\ . \\ \beta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Oteste é o mesmo da hipótese anterior só que agora q = 2.

, $\dfrac{\boldsymbol{(R\hat{\beta}-r)'[R(X'X)^{-1}R']^{-1}(R\hat{\beta}-r)/2}}{\frac{\boldsymbol{\hat{\sigma}^2}}{\boldsymbol{n-k-1}}} \boldsymbol{\sim F(2, n-k-1)}$ ob : $Ho\colon (R\beta - r) = 0$.

vii)