15/05/17

1) Some em uma única expressão as diferenças entre os lados esquerdo e direito das 4 equações ao quadrado e chame isso de $Q(a,b)$.

2) Ache o(s) ponto(s) crítico(s) de $Q(a,b)$ resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

2 eq. 2 incógnitas!

p/ achar os pontos críticos, supondo que eles são pontos mínimos

obs: Esse par (a,b) encontrado é o que "mais bem" se aproxima de ser uma solução p/ o sistema (é o mínimo de $Q(a,b)$).

18/05/17 Cálculo Numérico - Quinta-feira

Na aula passada...

$$\begin{cases} 2a + 4b = 3 \\ 12a - 4b = 3 \\ 4a + b = 3 \\ 2a - 6b = -3 \end{cases}$$

mais equações do que incógnitas. Em geral não tem solução.

O que foi introduzido na aula passada foi o conceito de Resíduo Quadrático

$\underbrace{Q(a,b)}_{\text{função}}$ = Soma dos quadrados das diferenças entre o lado esquerdo e o lado direito das equações.

mede em "conjunto" o quanto "acertamos" com o par (a,b)

* Suponha que $(\bar{a},\bar{b})$ é solução. $\underbrace{Q(\bar{a},\bar{b})}_{}=0$

achar o menor par possível

* Quando não tem solução vamos nos conformar em achar $(\bar{a},\bar{b})$ que minimize o resíduo quadrático.

15/05/17

1) Some em uma única expressão as diferenças entre os lados esquerdo e direito das 4 equações ao quadrado e chame isso de $Q(a,b)$.

2) Ache o(s) ponto(s) crítico(s) de $Q(a,b)$ resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

2 eq. 2 incógnitas!

p/ achar os pontos críticos, supondo que eles são pontos mínimos

obs: Esse par (a,b) encontrado é o que "mais bem" se aproxima de ser uma solução p/ o sistema (é o mínimo de $Q(a,b)$).

18/05/17 Cálculo Numérico - Quinta-feira

Na aula passada...

$$\begin{cases} 2a + 4b = 3 \\ 12a - 4b = 3 \\ 4a + b = 3 \\ 2a - 6b = -3 \end{cases}$$

mais equações do que incógnitas. Em geral não tem solução.

O que foi introduzido na aula passada foi o conceito de Resíduo Quadrático

$\underbrace{Q(a,b)}_{\text{função}}$ = Soma dos quadrados das diferenças entre o lado esquerdo e o lado direito das equações.

→ mede em "conjunto" o quanto "acertamos" com o par (a,b)

* Suponha que $(\bar{a},\bar{b})$ é solução. $\underbrace{Q(\bar{a},\bar{b})}_{}=0$

achar o menor par possível

* Quando não tem solução vamos nos conformar em achar $(\bar{a},\bar{b})$ que minimize o resíduo quadrático.

18/05/14

Jeito de fazer: procurar ponto(s) crítico(s) neste problemas em geral é único e é mínimo.

Ponto Crítico:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial a} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial Q}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

É sistema linear nas incógnitas a e b com menos equações. Em geral tem solução e é única.

* Vamos refazer o sistema usando símbolos. (Por enquanto 2 incógnitas e 4 equações generalizaremos depois).

$$\begin{cases} f_1 a + g_1 b = h_1 \\ f_2 a + g_2 b = h_2 \\ f_3 a + g_3 b = h_3 \\ f_4 a + g_4 b = h_4 \end{cases}$$

Resíduo quadrático:

$$Q(a,b) = \sum_{i=1}^{4} (f_i a + g_i b - h_i)^2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial}{\partial a} (f_i a + g_i b - h_i)^2 = \sum_{i=1}^{4} 2 f_i (f_i a + g_i b - h_i)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b} = \sum_{i=1}^{4} 2 g (f_i a + g_i b - h_i)$$

18/05/17

* Montar o sistema:

$$\begin{cases} \sum_i f_i (f_i a + g_i b - h_i) = 0 \\ \sum_i g_i (f_i a + g_i b - h_i) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\sum_i f_i f_i\right) a + \left(\sum_i f_i g_i\right) b = \sum_i f_i h_i \\ \left(\sum_i g_i f_i\right) a + \left(\sum_i g_i g_i\right) b = \sum g_i h_i \end{cases}$$

De outro modo:

$\sum f_i f_i = \langle f, f \rangle$ ou $(f \cdot f)$

$\sum f_i g_i = \langle f, g \rangle$

$\langle f, f \rangle a + \langle f, g \rangle b = \langle f, h \rangle$

$\langle g, f \rangle a + \langle g, g \rangle b = \langle g, h \rangle$

É o produto interno: as colunas de coeficientes como vetores

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix}$$

* E se são N equações em vez de 4?

$$\sum_{i=1}^{4} \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{N}$$

* E se são mais incógnitas? Vejamos 3.

PanAmericana

18/05/17

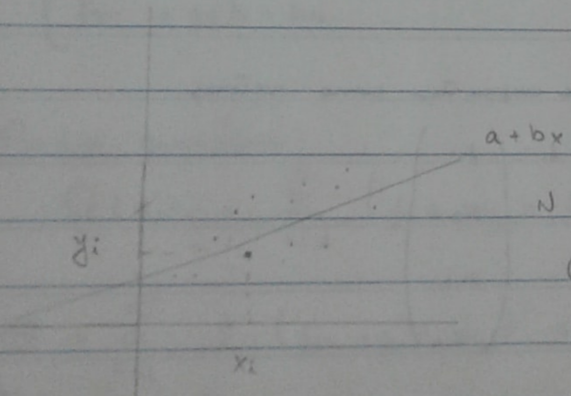
$$\left\{\begin{pmatrix} \vdots \\ f_i \\ \vdots \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} \vdots \\ g_i \\ \vdots \end{pmatrix} b + \begin{pmatrix} \vdots \\ \varphi_i \\ \vdots \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} \vdots \\ h_i \\ \vdots \end{pmatrix}\right.$$

$$\quad f \qquad\qquad g \qquad\qquad \varphi \qquad\qquad h$$

Vai resultar no sistema:

$Q(a, b, c)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial a} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial Q}{\partial b} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial Q}{\partial c} = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \langle f, f\rangle a + \langle f, g\rangle b + \langle f, \varphi\rangle c = \langle f, h\rangle \\[2ex] \langle g, f\rangle a + \langle g, g\rangle b + \langle g, \varphi\rangle c = \langle g, h\rangle \\[2ex] \langle \varphi, f\rangle a + \langle \varphi, g\rangle b + \langle \varphi, \varphi\rangle c = \langle \varphi, h\rangle \end{cases}$$



N pontos

Gostaríamos que para cada i, valesse

$a + bx_i = y_i$

Reescrevendo:

$$\begin{cases} 1a + x_1 b = y_1 \\ 1a + x_2 b = y_2 \\ \vdots \\ 1a + x_n b = y_n \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ f & g & h \\ (1) & (x) & (y) \end{array}$$

18/05/17

$$\begin{cases} \langle 1,1\rangle a + \langle 1,x\rangle b = \langle 1,y\rangle \longrightarrow \sum y \\ \langle x,1\rangle a + \langle x,x\rangle b = \langle x,y\rangle \longrightarrow \sum x_i y_i \end{cases} \neq (\sum x_i)(\sum y_i)$$

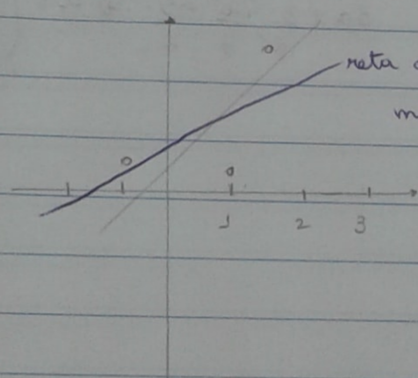
$$\langle 1,1\rangle = \sum_{i=1}^{N} 1.1 = N$$

$$\langle x,1\rangle = \langle 1,x\rangle = \sum_{i=1}^{N} 1.x_i = \sum_{i=1}^{N} x_i$$

$$\langle x,x\rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i x_i = \sum_{i=1}^{N} x_i^2$$

não é a mesma coisa $(\sum x_i)^2$!!!

Exemplo:



reta que sai por mínimos quadrados

$a \approx 0$?

$b \approx 1/2$?

x_i	y_i
-1	0,5
1	0,5
1,5	1,5

$N=3$

$\langle 1,1\rangle = 3$

$\langle 1,x\rangle = \langle x,1\rangle = -1+1+1,5 = 1,5$

$\langle x,x\rangle = (-1)^2+(1)^2+(1,5)^2 = 4,25$

$\langle 1,y\rangle = 0,5+0,5+1,5 = 2,5$

$\langle x,y\rangle = -1.0,5+1.0,5+1,5.1,5 = 2,25$

PanAmericana

18/05/17

$$\begin{cases} 3a + 1{,}5b = 2{,}5 \\ 1{,}5a + 4{,}25b = 2{,}25 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1{,}5 & 2{,}5 \\ 1{,}5 & 4{,}25 & 2{,}25 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 3 & 1{,}5 & 2{,}5 \\ 3 & 8{,}5 & 4{,}5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 3 & 1{,}5 & 2{,}5 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ l_2 - l_1 \end{array} \end{array}$$

$$b = \frac{2}{7} \quad e \quad 3a + \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{7} = \frac{5}{2} \Rightarrow a = \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{7}\right)\frac{1}{3} = \frac{5}{6} - \frac{1}{7} = 0{,}69$$