

Capítulo 9

Rotação de Corpos Rígidos

Cinemática rotacional: quando um corpo rígido gira em torno de um eixo fixo (geralmente designado como eixo z), sua posição é descrita por uma coordenada angular θ . A velocidade angular ω_z é definida como a derivada da coordenada θ em relação ao tempo, e a aceleração angular α_z é definida como a derivada da velocidade angular ω_z ou a derivada de segunda ordem da coordenada angular θ (exemplos 9.1 e 9.2). Quando um corpo rígido gira em torno de um eixo fixo com aceleração angular constante, θ , ω_z e α_z são relacionadas por equações cinemáticas simples análogas àsquelas para o movimento em linha reta com aceleração linear constante (Exemplo 9.3).

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (9.3)$$

$$\alpha_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega_z}{\Delta t} = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (9.5)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_{0z}t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2 \quad (9.11)$$

(somente α_z constante)

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_z + \omega_{0z})t \quad (9.10)$$

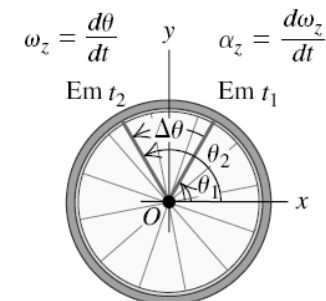
(somente α_z constante)

$$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t \quad (9.7)$$

(somente α_z constante)

$$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0) \quad (9.12)$$

(somente α_z constante)



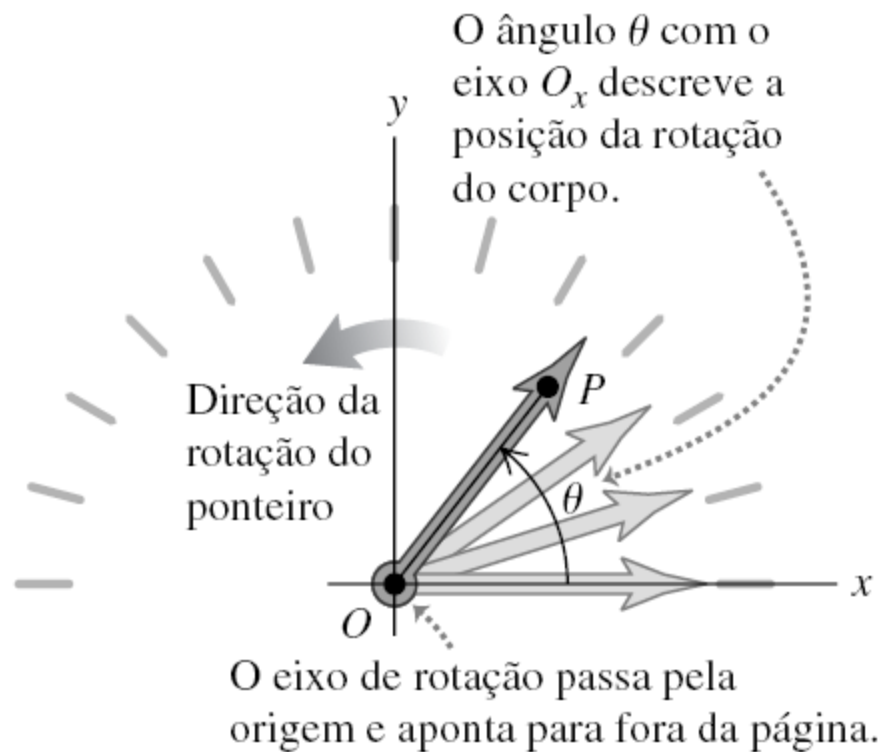
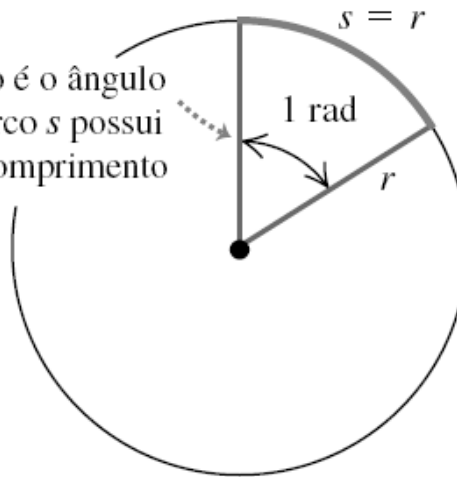


Figura 9.1 O ponteiro de um velocímetro (um exemplo de corpo rígido) girando em sentido anti-horário em torno de um eixo fixo.

(a)

Um radiano é o ângulo em que o arco s possui o mesmo comprimento do raio r .



(b)

Um ângulo θ em radianos é a razão entre o comprimento do arco s e do raio r .

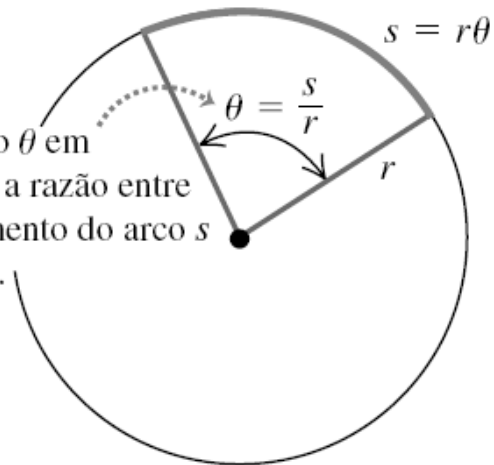
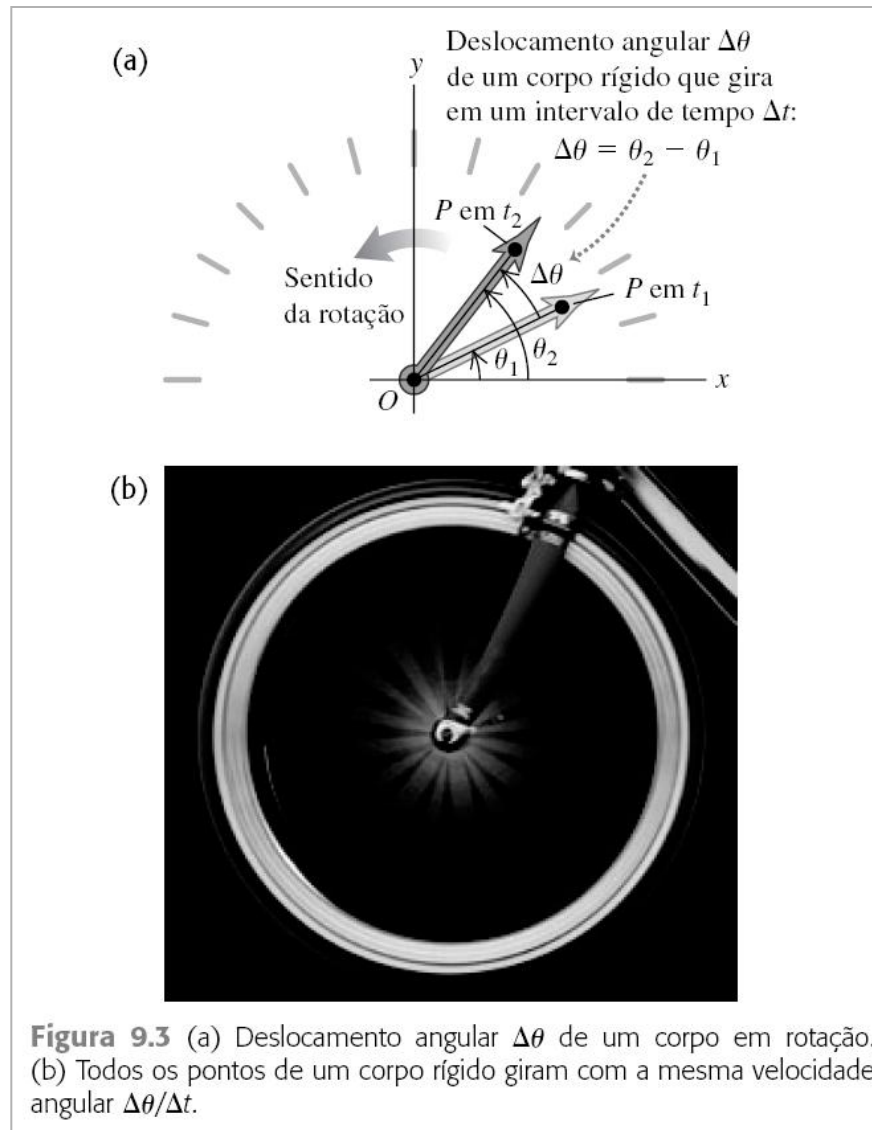


Figura 9.2 Medição de ângulos em radianos.

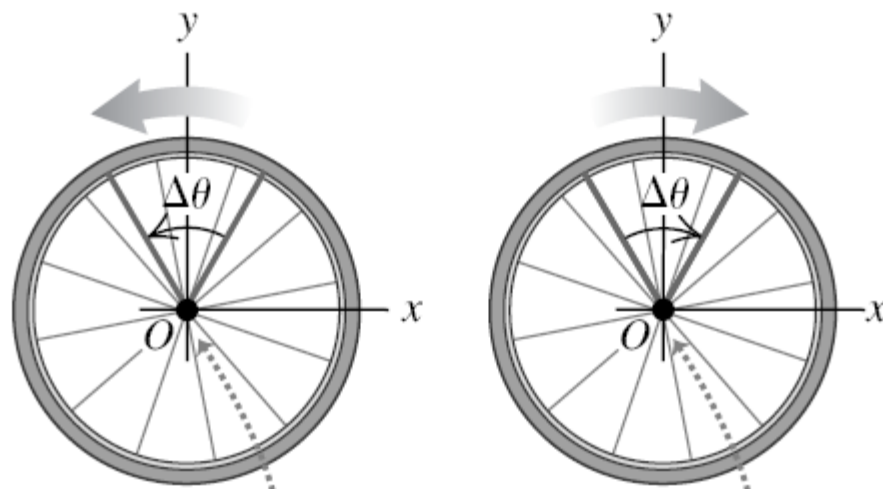


Rotação no sentido anti-horário positiva:

$$\Delta\theta > 0, \text{ logo} \\ \omega_{mz} = \Delta\theta/\Delta t > 0$$

Rotação no sentido horário negativa:

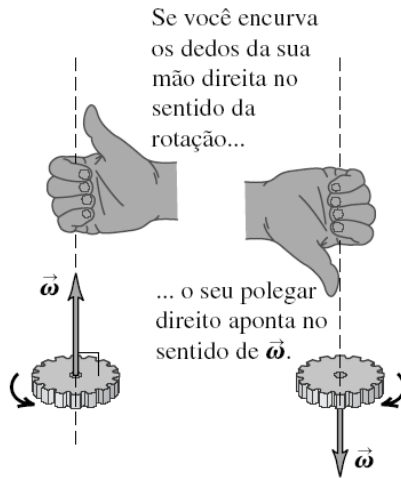
$$\Delta\theta < 0, \text{ logo} \\ \omega_{mz} = \Delta\theta/\Delta t < 0$$



Eixo de rotação (eixo z) passa pela origem e aponta para fora da página.

Figura 9.4 A velocidade angular média de um corpo rígido (aqui indicado) e a velocidade angular instantânea podem ser positivas ou negativas.

(a)



(b)

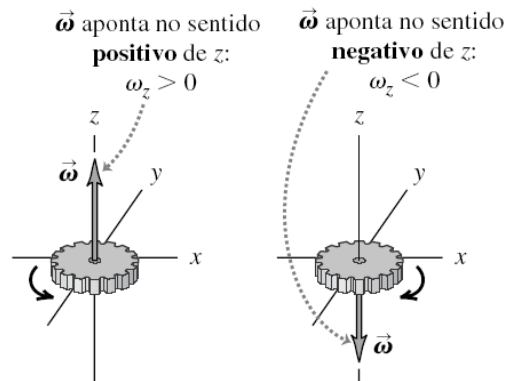
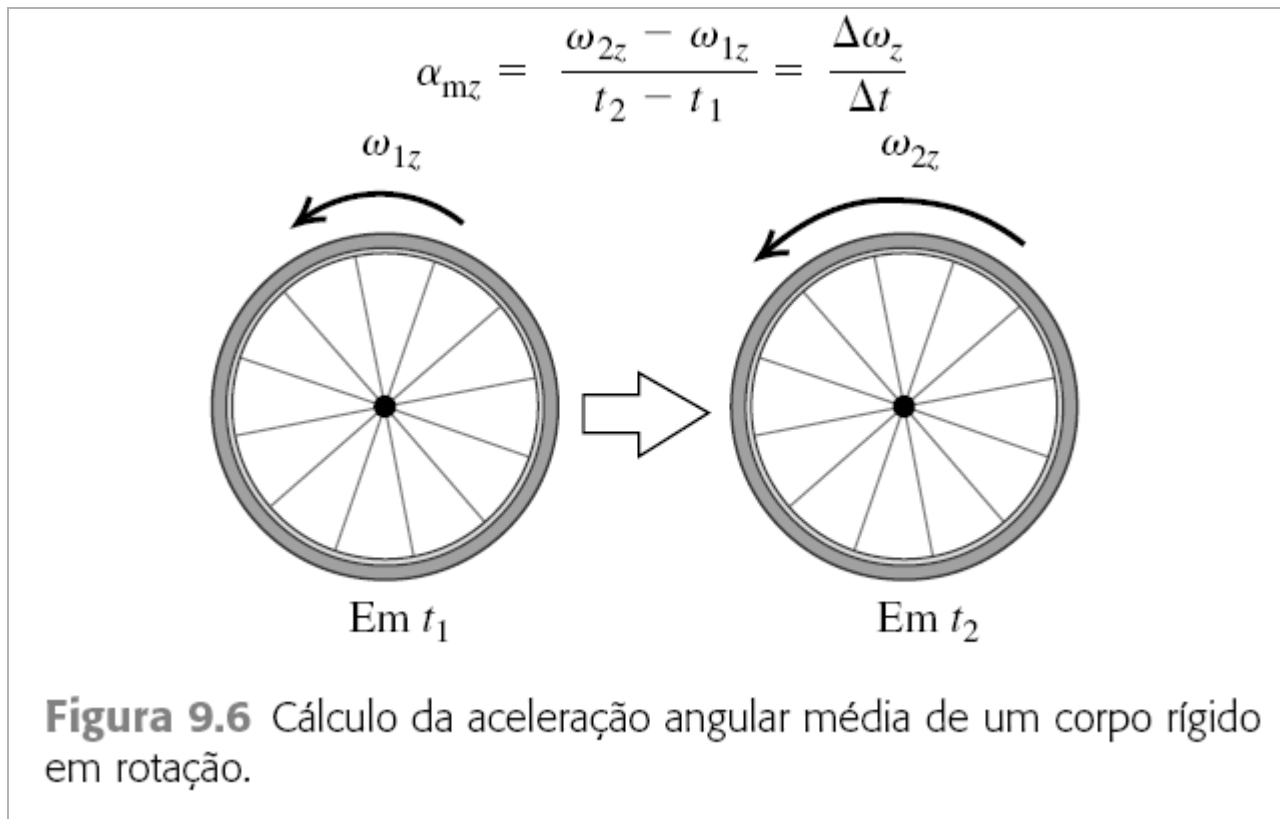
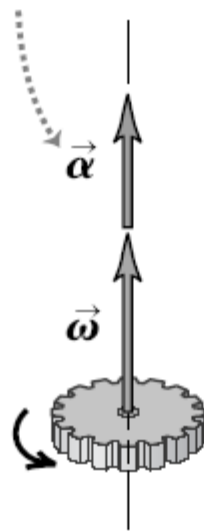


Figura 9.5 (a) A regra da mão direita para o sentido do vetor velocidade angular $\vec{\omega}$. A inversão do sentido de rotação inverte o sentido de $\vec{\omega}$. (b) O sinal de ω_z para a rotação ao longo do eixo z .



$\vec{\alpha}$ e $\vec{\omega}$ no **mesmo** sentido: rotação é acelerada.



$\vec{\alpha}$ e $\vec{\omega}$ em sentidos **opostos**: rotação é retardada.

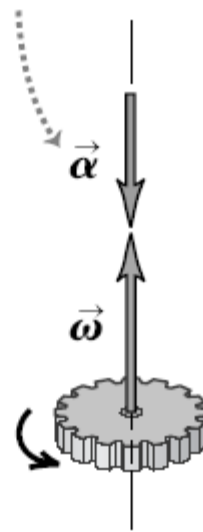


Figura 9.7 Quando o eixo de rotação é fixo, os vetores de aceleração angular e de velocidade angular estão ao longo do eixo.

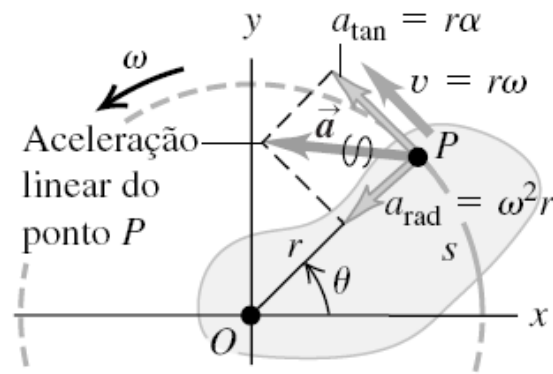


Relação entre cinemática linear e angular: a velocidade escalar angular ω de um corpo rígido é o módulo da sua velocidade angular. A taxa de variação de ω é $\alpha = d\omega/dt$. Para uma partícula do corpo que esteja a uma distância r do eixo de rotação, a velocidade escalar v e os componentes da aceleração \vec{a} estão relacionadas a ω e α .

$$v = r\omega$$

$$a_{\text{tg}} = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha$$

$$a_{\text{rad}} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$



A distância percorrida por um ponto P sobre o corpo que se move (ângulo θ medido em radianos)

A velocidade linear do ponto P (velocidade angular ω medida em rad/s)

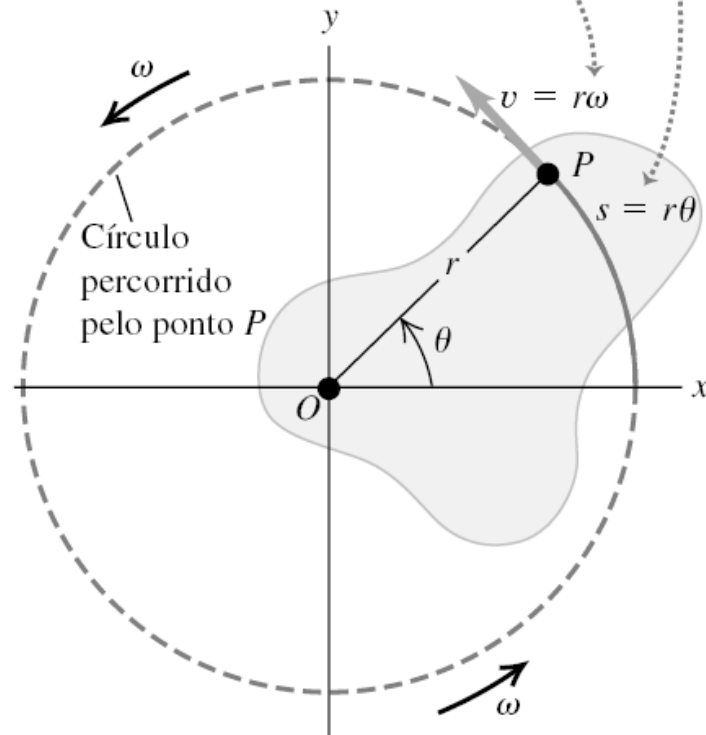


Figura 9.9 Um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo através do ponto O .

Componentes da aceleração radial e da aceleração tangencial:

- $a_{\text{rad}} = \omega^2 r$ é a aceleração centrípeta do ponto P .
- $a_{\text{tg}} = r\alpha$ é a rotação do ponto P que está acelerando (o corpo possui aceleração angular)

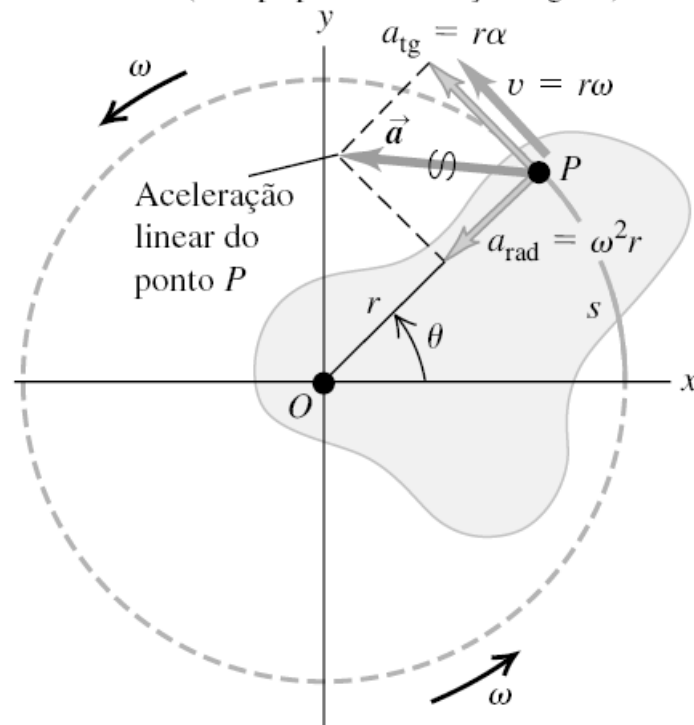
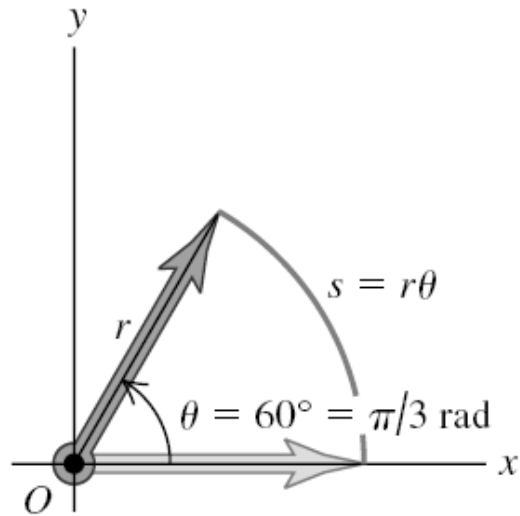


Figura 9.10 O corpo rígido indicado está sendo acelerado. A aceleração do ponto P possui um componente a_{rad} em direção ao eixo de rotação (perpendicular a \vec{v}) e um componente a_{tg} ao longo do círculo que o ponto P segue (paralelo a \vec{v}).



Em qualquer equação que relacione grandezas lineares com grandezas angulares, os ângulos DEVEM ser expressos em radianos...

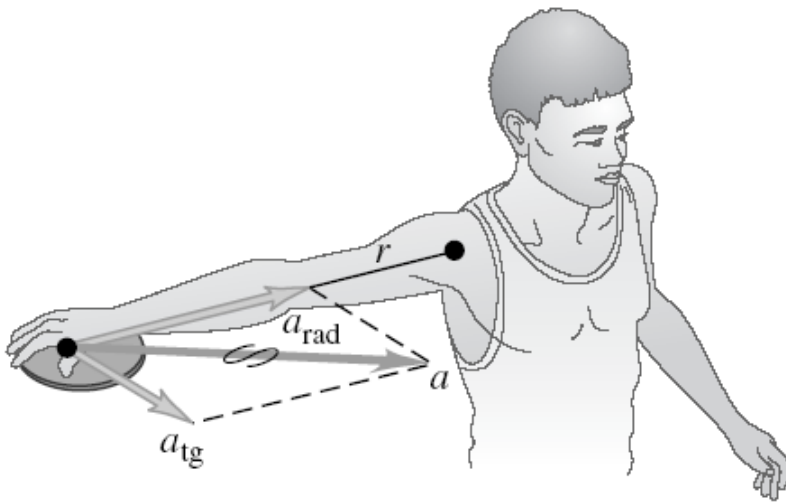
CERTO! $s = (\pi/3)r$

... nunca em graus ou revoluções.

ERRADO! $s = \cancel{60}r$

Figura 9.11 Sempre use radianos ao relacionar grandezas lineares com grandezas angulares.

(a)



(b)

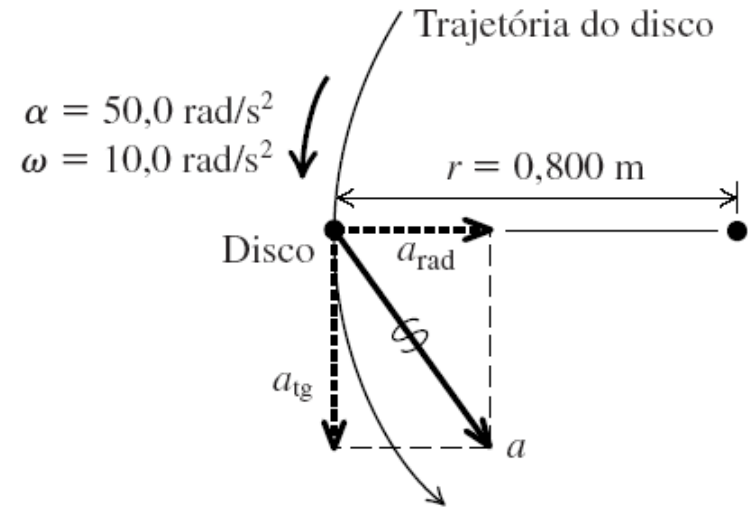
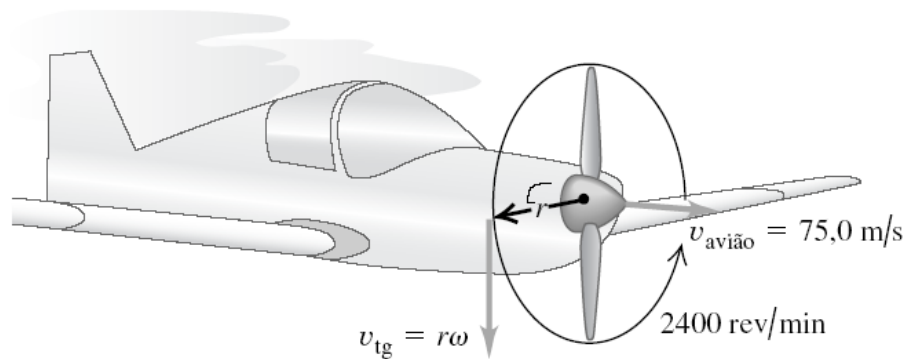


Figura 9.12 (a) Girando um disco em círculo. (b) O esquema indica os componentes da aceleração para o disco.

(a)



(b)

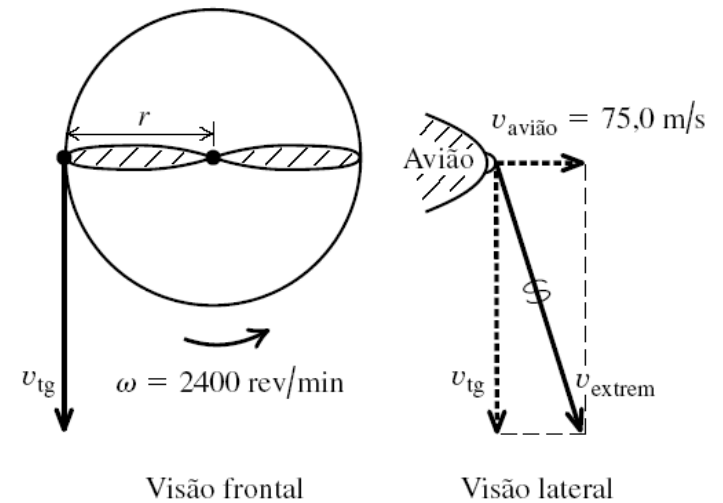
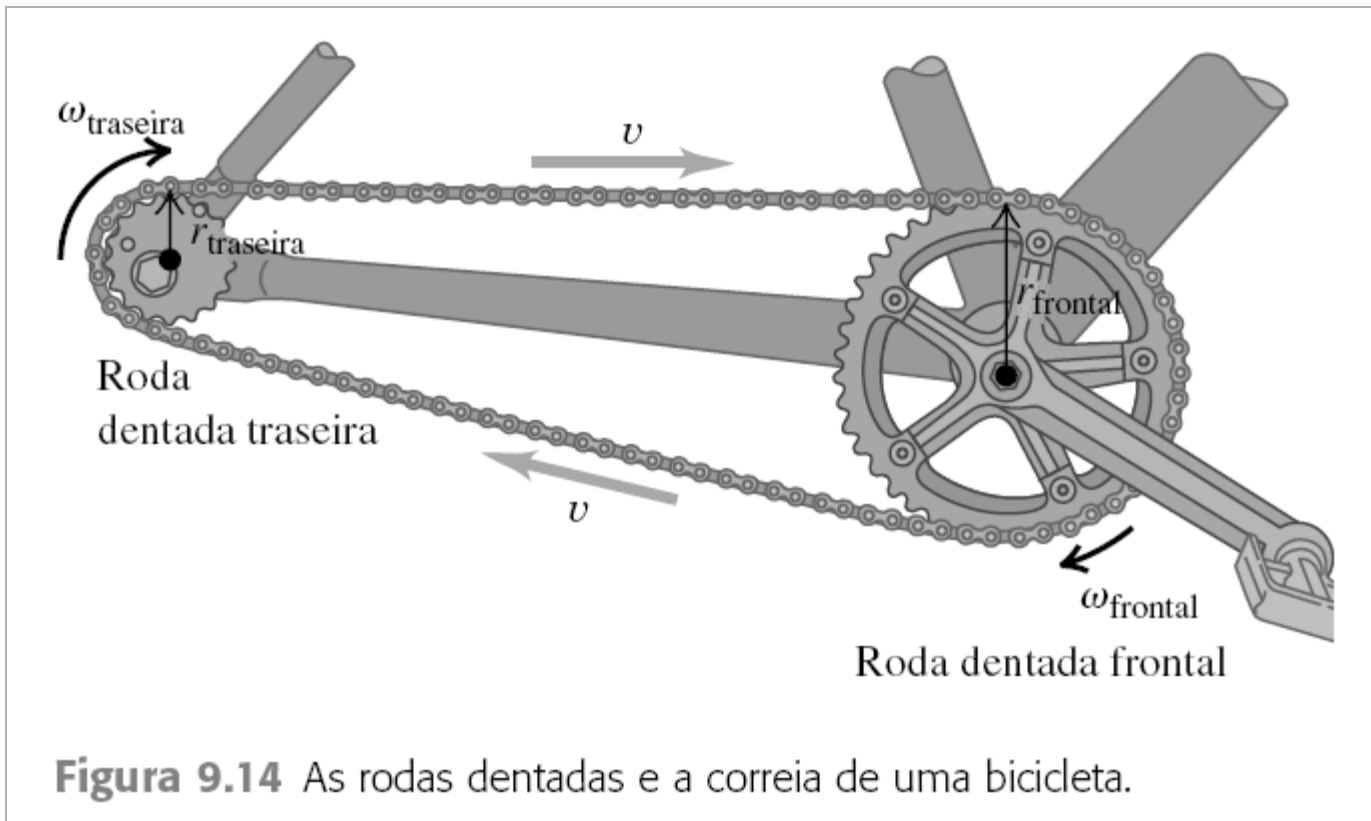


Figura 9.13 (a) Um avião movido a hélice em vôo. (b) O esquema indica os componentes de velocidade para a extremidade da hélice.

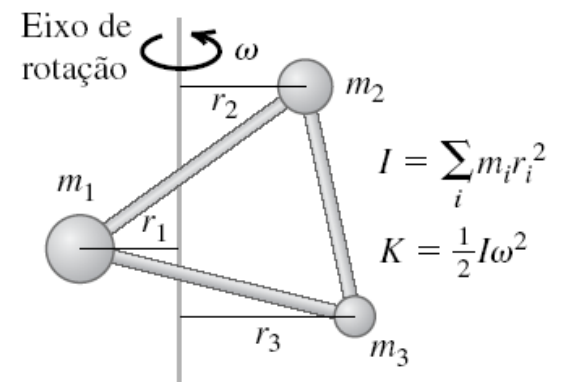


Momento de inércia e energia cinética da rotação: o momento de inércia I de um corpo girando em torno de um dado eixo é uma medida da sua inércia rotacional: quanto maior for o momento de inércia, mais difícil será alterar o estado de rotação do corpo. O momento de inércia pode ser expresso como uma soma das partículas m_i que compõem o corpo, cada qual na sua própria distância perpendicular r_i do eixo. A energia cinética rotacional de um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo depende da velocidade escalar angular ω e do momento de inércia I para esse eixo de rotação.

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots$$

$$= \sum_i m_i r_i^2$$

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$



- Massa próxima ao eixo
- Pequeno momento de inércia
- Fácil fazer o dispositivo começar a girar

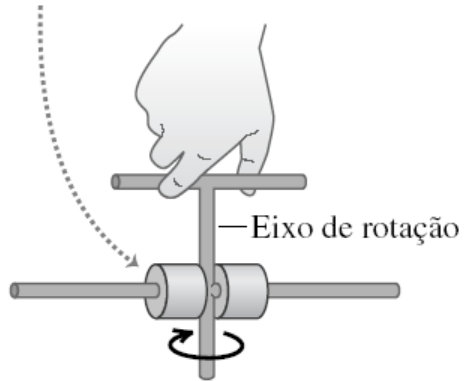
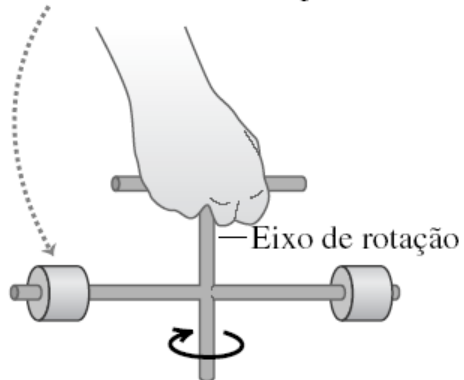
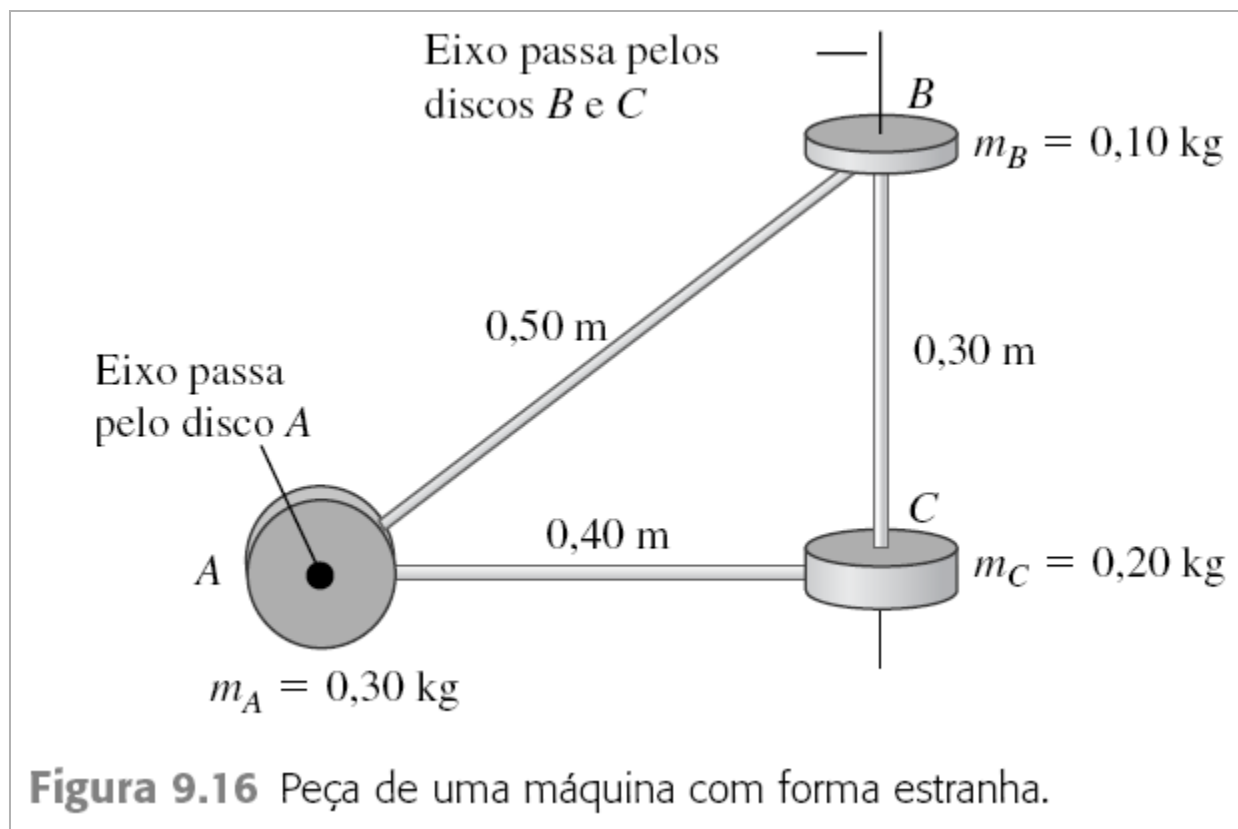


Figura 9.15 Um dispositivo que pode girar livremente em torno de um eixo vertical. Para que o momento de inércia varie, os dois cilindros de igual massa podem ser bloqueados em qualquer posição ao longo do eixo horizontal.

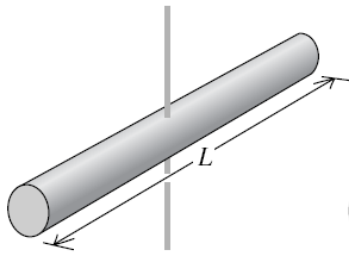
- Massa distante do eixo
- Maior momento de inércia
- Mais difícil fazer o dispositivo começar a girar





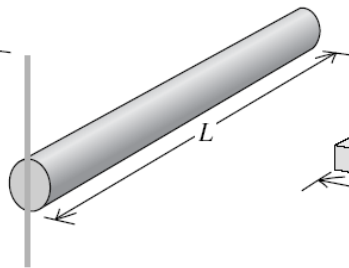
(a) Barra delgada, eixo passa pelo centro

$$I = \frac{1}{12} ML^2$$



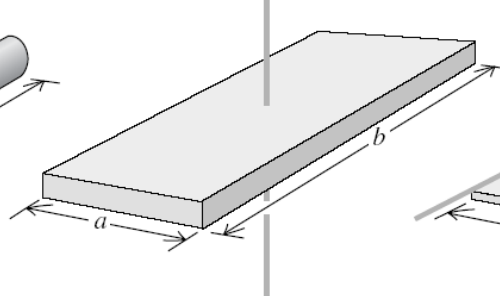
(b) Barra delgada, eixo passa por uma extremidade

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$



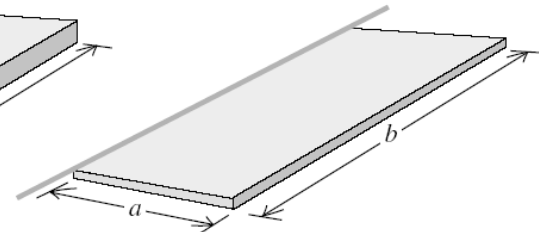
(c) Placa retangular, eixo passa pelo centro

$$I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$$



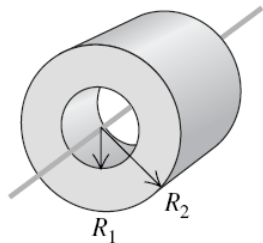
(d) Placa retangular fina, eixo passa ao longo da borda

$$I = \frac{1}{3} Ma^2$$



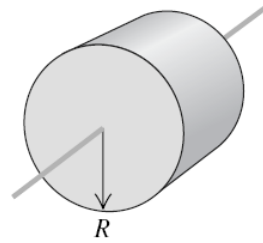
(e) Cilindro oco

$$I = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2)$$



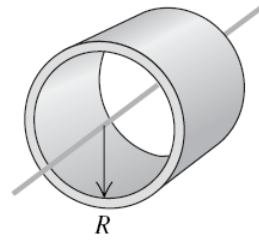
(f) Cilindro maciço

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$



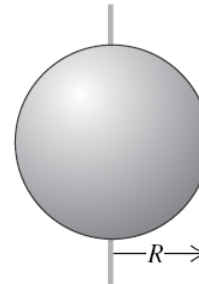
(g) Cilindro oco com paredes finas

$$I = MR^2$$



(h) Esfera maciça

$$I = \frac{2}{5} MR^2$$



(i) Esfera oca com paredes finas

$$I = \frac{2}{3} MR^2$$

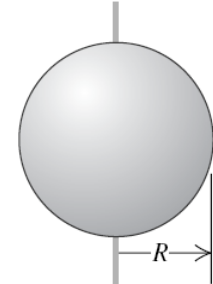


Tabela 9.2 Momentos de inércia de diversos corpos

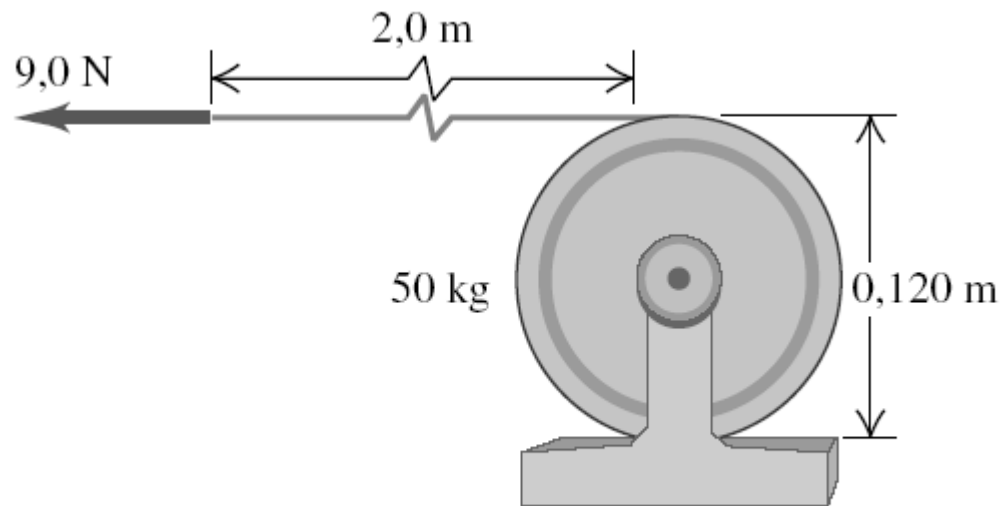


Figura 9.17 Um cabo é desenrolado de um cilindro (perspectiva lateral).

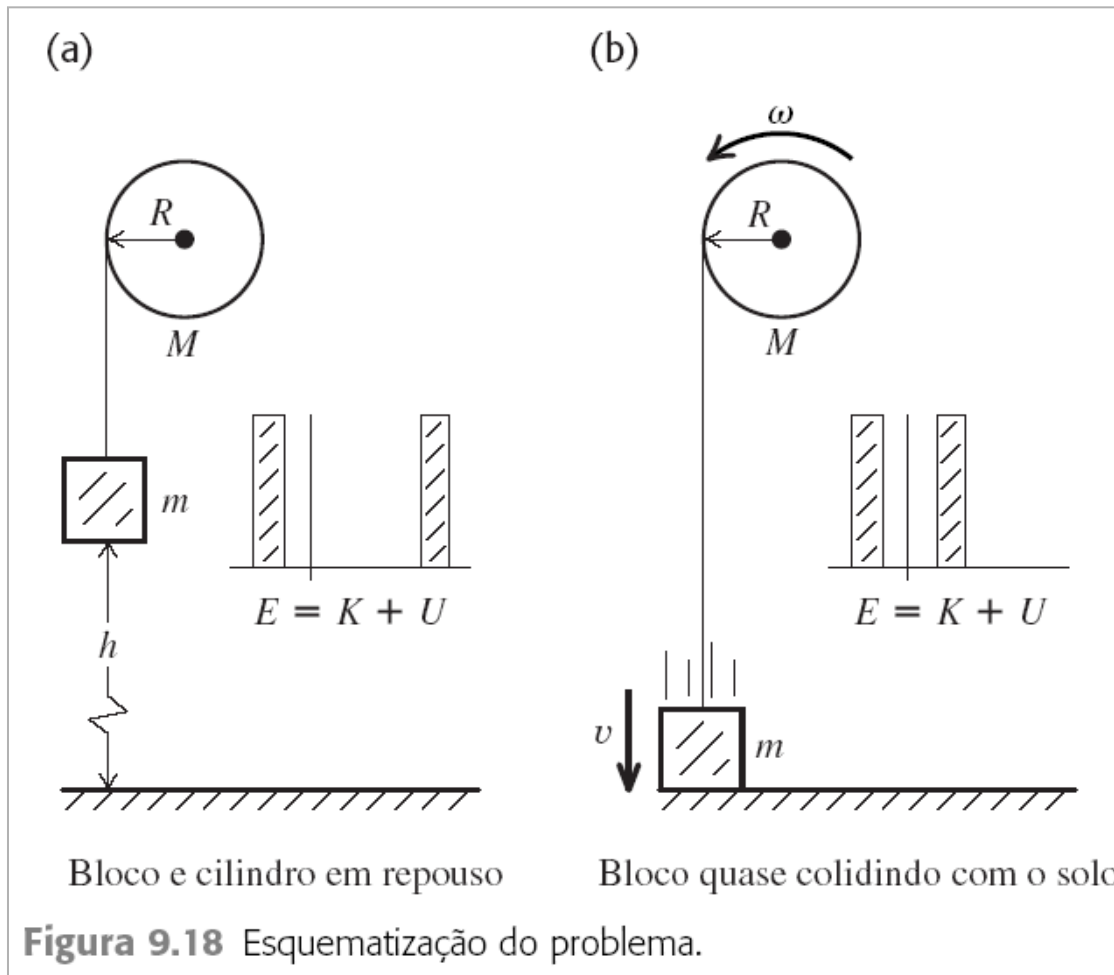




Figura 9.19 Em uma técnica denominada 'inversão de Fosbury', em homenagem ao seu criador, este atleta encurva seu corpo quando passa sobre a barra no salto em altura. Em consequência, seu centro de massa passa efetivamente *embaixo* da barra. Essa técnica necessita de um menor aumento da energia potencial gravitacional (Equação (9.18)) do que a técnica antiga, na qual o centro de massa passava em cima da barra.

Eixo de rotação que passa pelo cm e é perpendicular ao plano da figura.

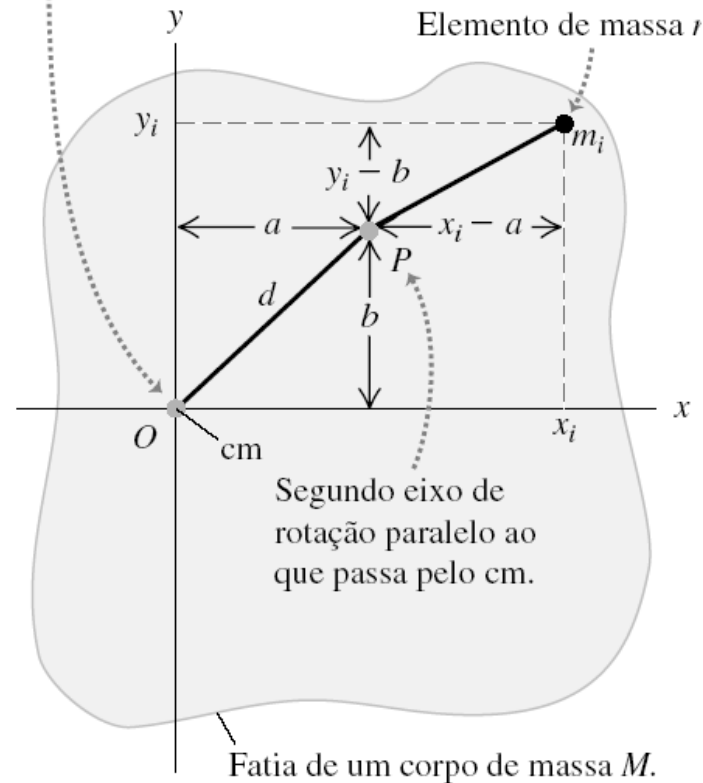
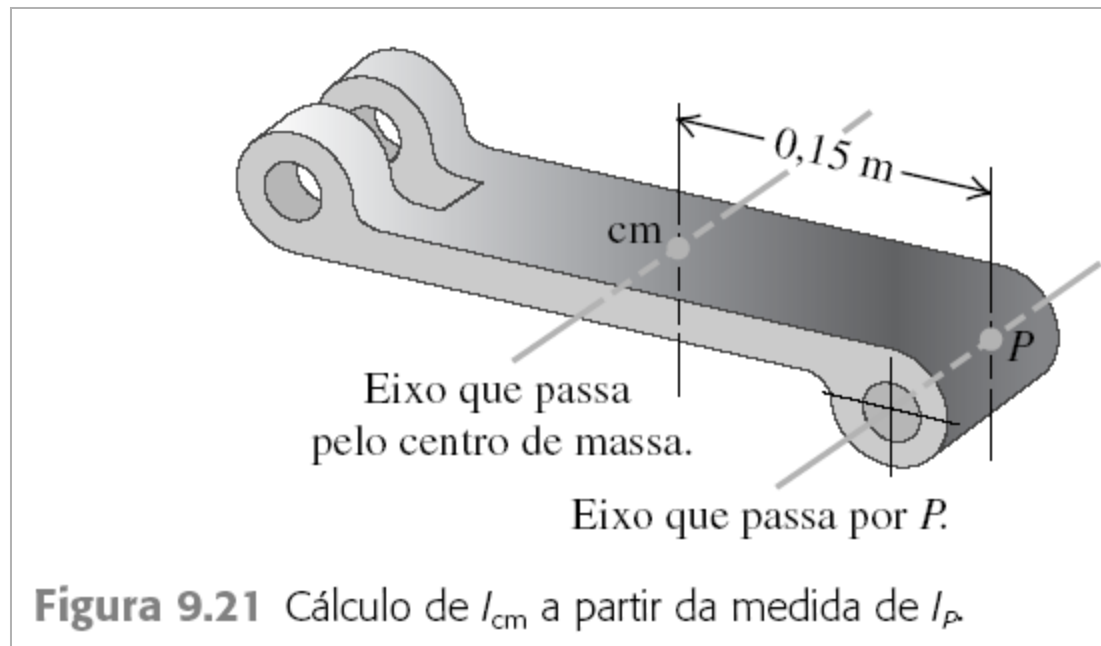
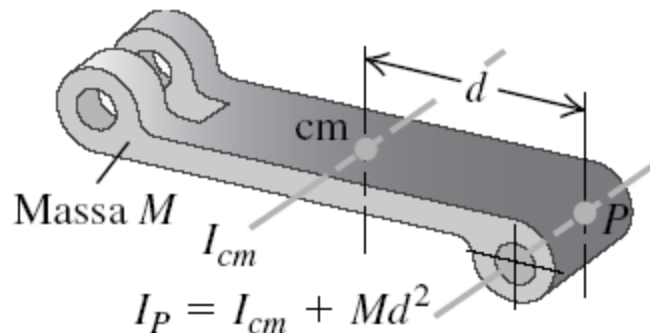


Figura 9.20 O elemento de massa m_i possui coordenadas (x_i, y_i) em relação ao eixo que passa no centro de massa (cm) e coordenadas $(x_i - a, y_i - b)$ em relação ao eixo paralelo que passa no ponto P .



Cálculo do momento de inércia: o teorema do eixo paralelo relaciona os momentos de inércia de um corpo rígido de massa M em torno de dois eixos paralelos: um eixo que passa através do seu centro de massa (momento de inércia I_{cm}) e um eixo paralelo situado a uma distância d do primeiro eixo (momento de inércia I_P) (Exemplo 9.10). Se o corpo possui uma distribuição de massa contínua, o momento de inércia pode ser calculado pela integração.

$$I_P = I_{cm} + Md^2 \quad (9.19)$$



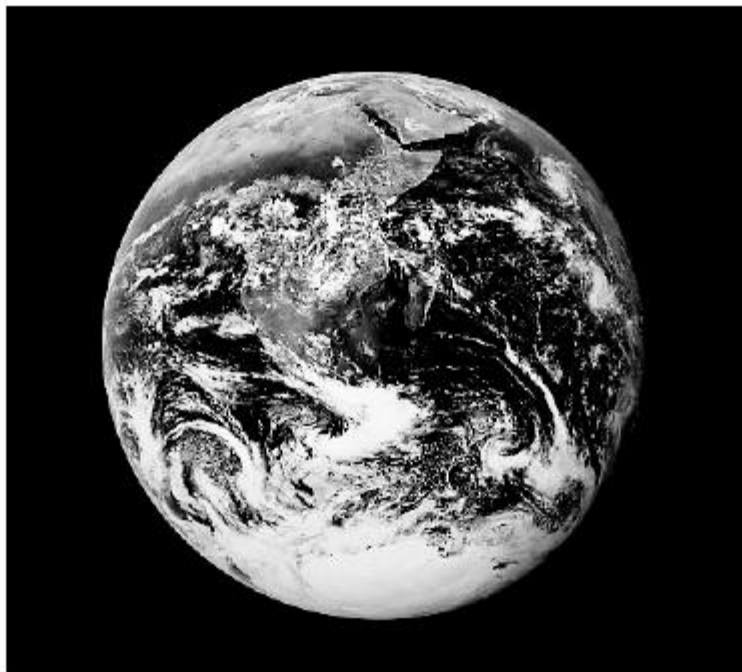


Figura 9.22 Medindo pequenas variações nas órbitas dos satélites, os geofísicos podem determinar o momento de inércia da Terra. Isso nos informa como a massa de nosso planeta está distribuída em seu interior. Os dados revelam que a Terra é muito mais densa no centro do que nas camadas externas.

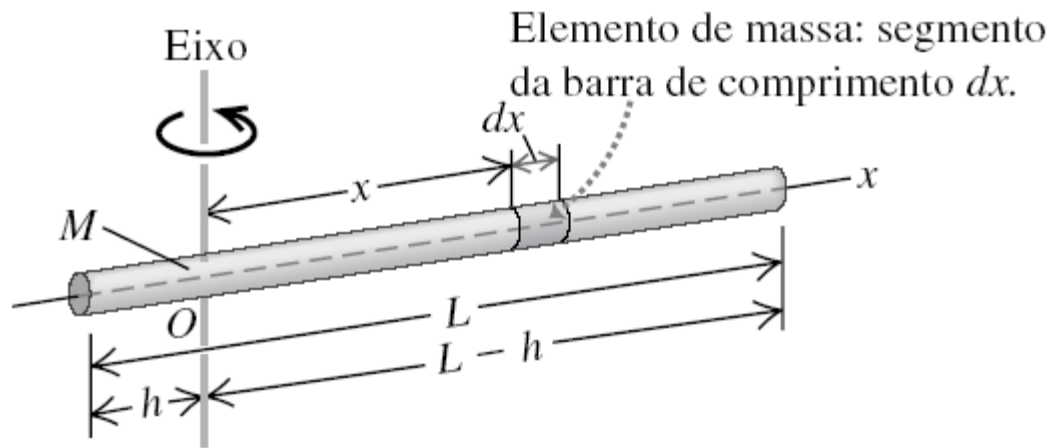


Figura 9.23 Determinação do momento de inércia de uma barra delgada em relação a um eixo passando pelo ponto O .

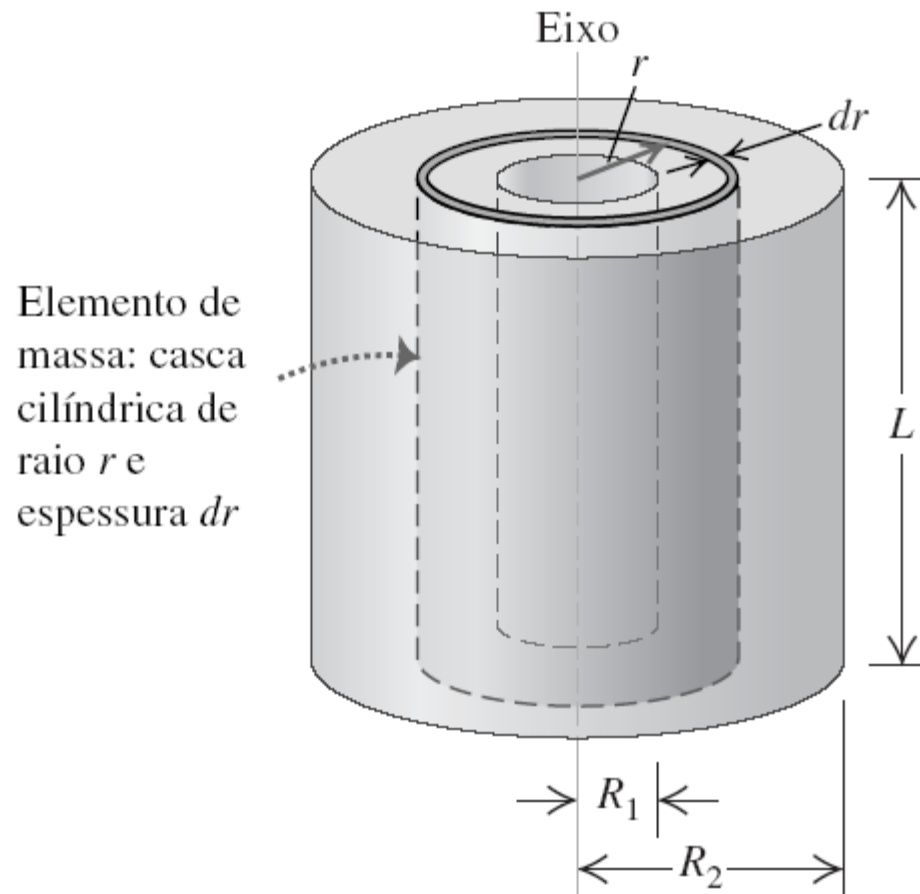


Figura 9.24 Determinação do momento de inércia de um cilindro oco em relação ao seu eixo de simetria.

