

Capítulo 3

Movimento em duas ou três dimensões

Vetores de posição, velocidade e aceleração: o vetor posição $\vec{r}$ é um vetor que vai da origem do sistema de coordenadas a um ponto P do espaço, cujas coordenadas cartesianas são x , y e z .

O vetor velocidade média $\vec{v}_m$ durante um intervalo de tempo Δt é o deslocamento $\Delta \vec{r}$ (a variação do vetor posição $\vec{r}$) dividido por Δt . O vetor velocidade instantânea $\vec{v}$ é a derivada do tempo de $\vec{r}$, e seus componentes são as derivadas de tempo x , y e z . A velocidade escalar instantânea é o módulo de $\vec{v}$. A velocidade $\vec{v}$ de uma partícula é sempre tangente à trajetória da partícula.

O vetor aceleração média $\vec{a}_m$ durante um intervalo de tempo Δt é a variação da velocidade $\Delta \vec{v}$ dividido por Δt . O vetor aceleração instantânea $\vec{a}$ é a derivada de tempo de $\vec{v}$, e seus componentes são *as derivadas de tempo de v_x , v_y e v_z* (Exemplo 3.2).

O componente de aceleração paralelo à direção da velocidade instantânea afeta a velocidade, enquanto o componente de $\vec{a}$ perpendicular a $\vec{v}$ afeta a direção do movimento.

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \quad (3.1)$$

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad (3.2)$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (3.3)$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (3.4)$$

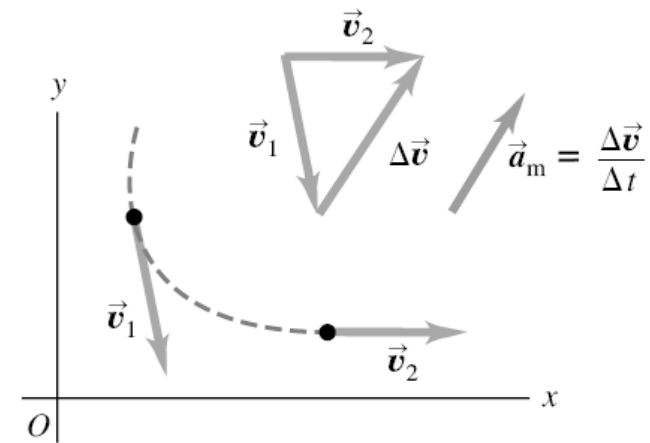
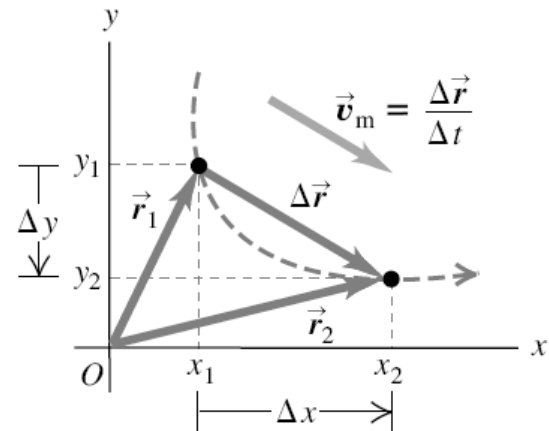
$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \quad (3.8)$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (3.9)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad (3.10)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt}$$



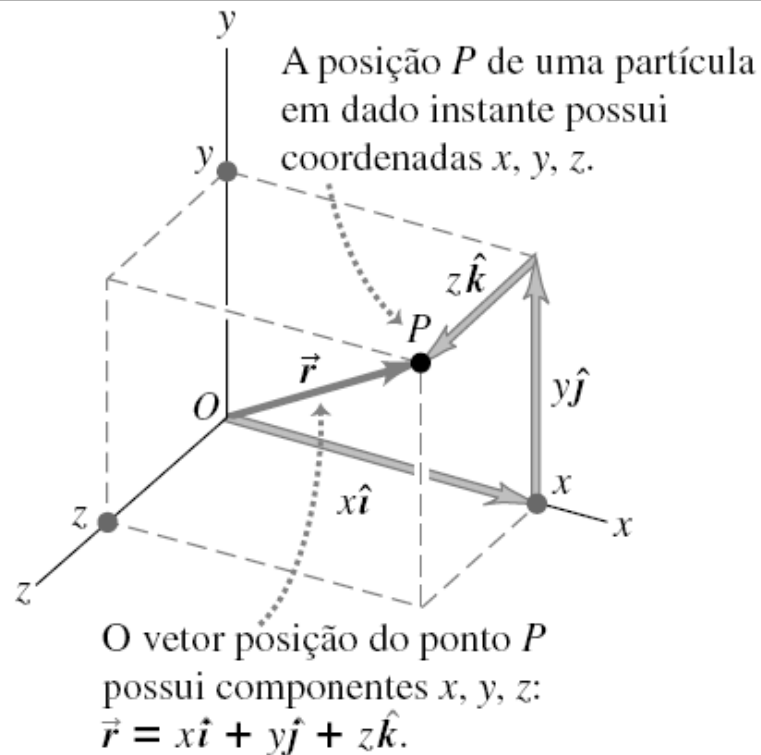


Figura 3.1 O vetor posição $\vec{r}$ da origem até o ponto P possui componentes x, y e z . A trajetória que a partícula segue através do espaço é, em geral, uma curva (Figura 3.2).

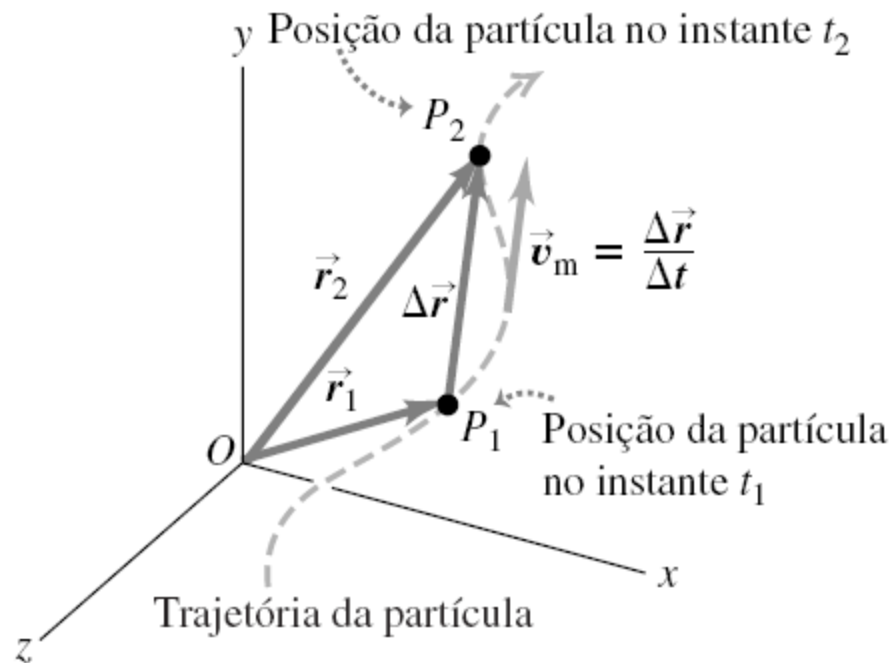


Figura 3.2 A velocidade média $\vec{v}_m$ entre os pontos P_1 e P_2 possui a mesma direção e o mesmo sentido do vetor deslocamento $\Delta \vec{r}$.

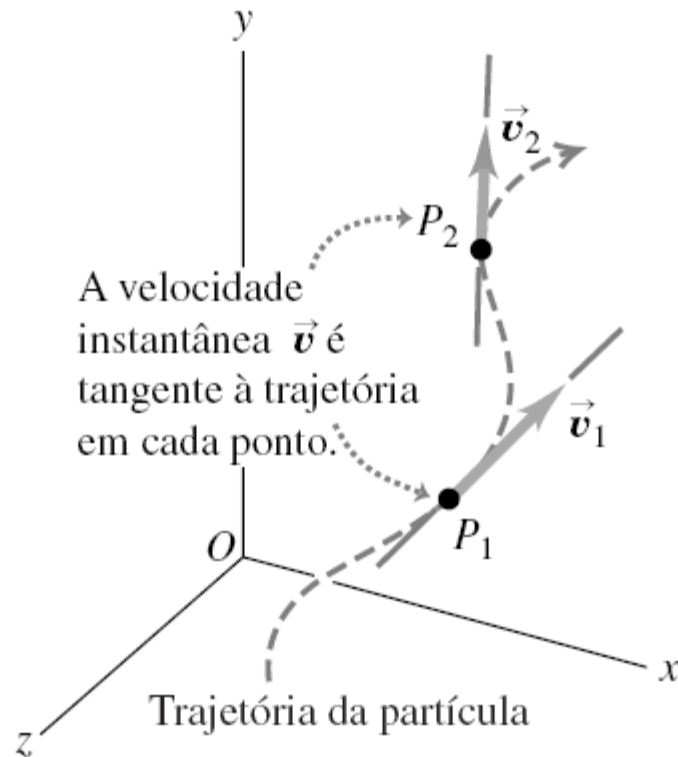


Figura 3.3 Os vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são velocidades instantâneas nos pontos P_1 e P_2 mostrados na Figura 3.2.

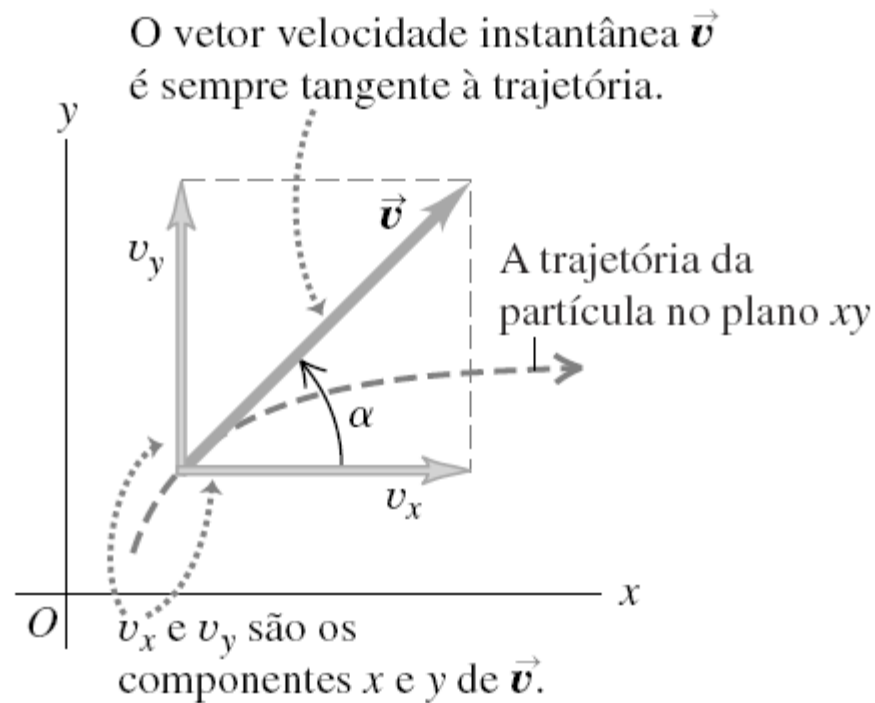


Figura 3.4 Os dois componentes da velocidade para um movimento no plano xy .

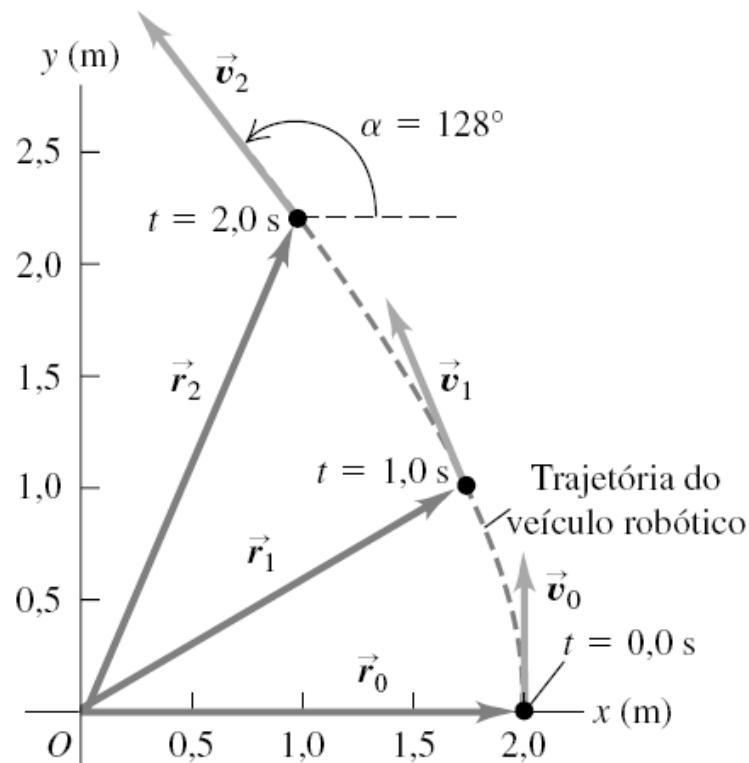


Figura 3.5 Para $t = 0$, o vetor posição do veículo robótico é $\vec{r}_0$ e o vetor velocidade instantânea é $\vec{v}_0$. Analogamente, $\vec{r}_1$ e $\vec{v}_1$ são os vetores para $t = 1,0$ s; $\vec{r}_2$ e $\vec{v}_2$ são os vetores para $t = 2,0$ s.

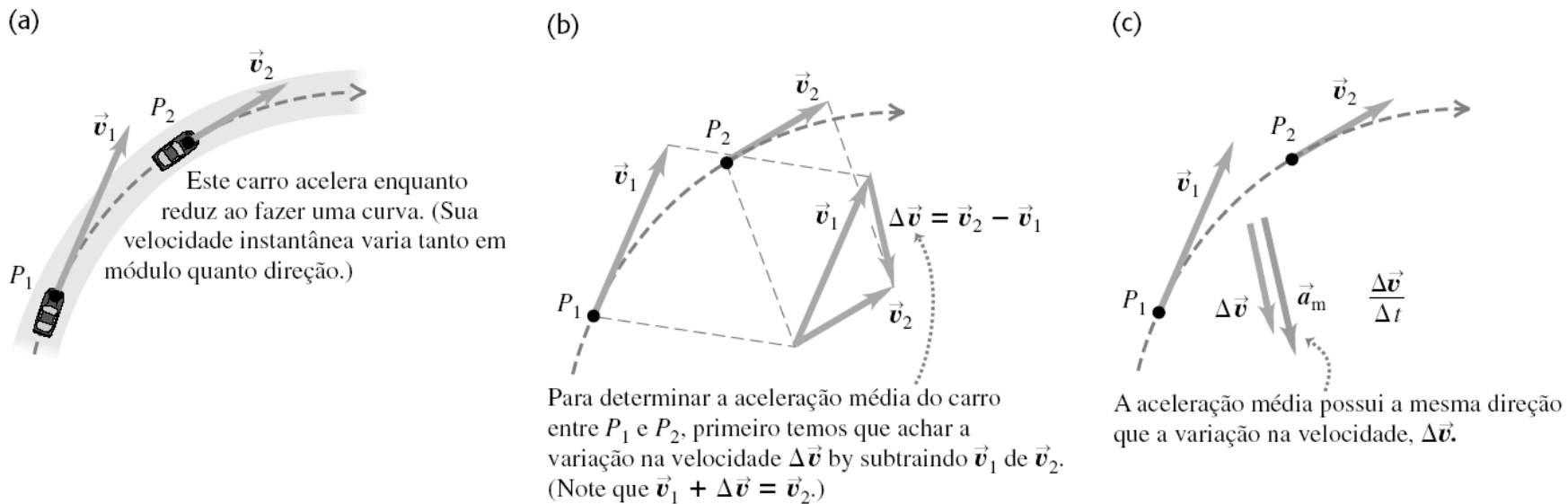
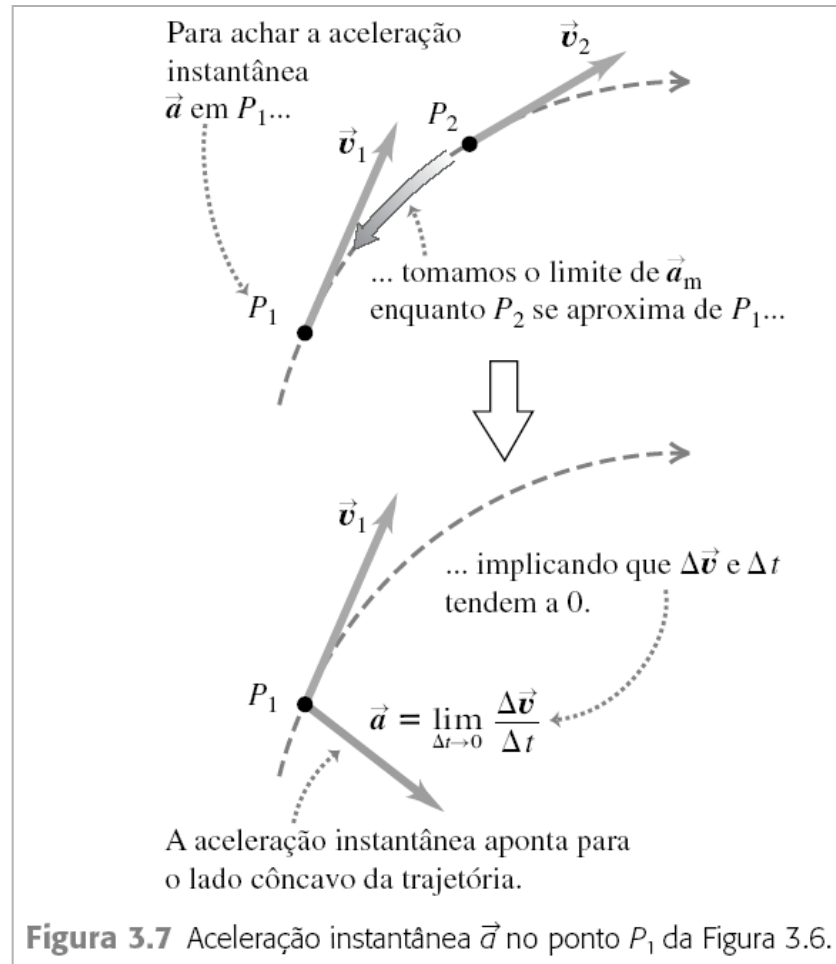


Figura 3.6 (a) Um carro se move ao longo de uma estrada em curva entre os pontos P_1 e P_2 . (b) Obtemos $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ por subtração de vetores. (c) O vetor $\vec{a}_m = \Delta \vec{v} / \Delta t$ representa a aceleração média entre P_1 e P_2 .



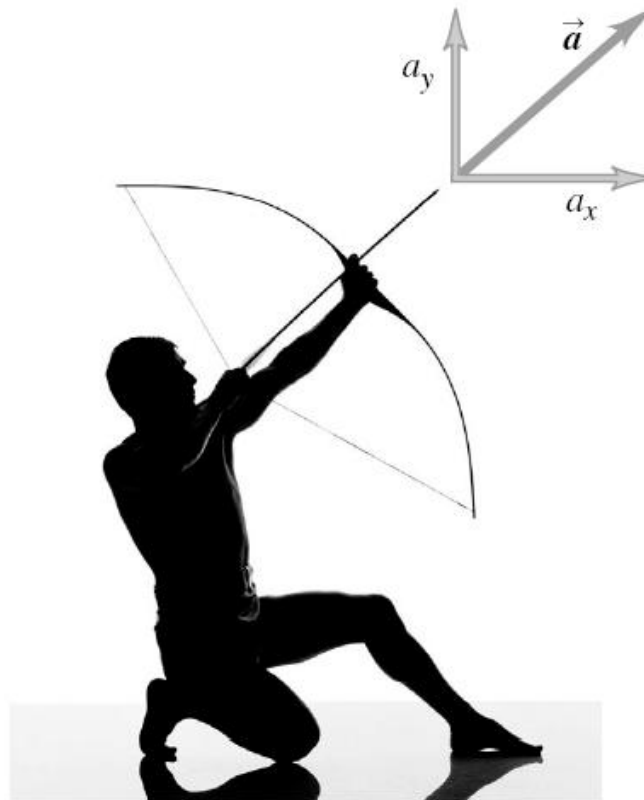


Figura 3.8 Quando o arqueiro dispara a flecha, ela acelera tanto para a frente quanto para trás. Logo, o seu vetor aceleração possui tanto um componente horizontal (a_x) quanto um componente vertical (a_y).

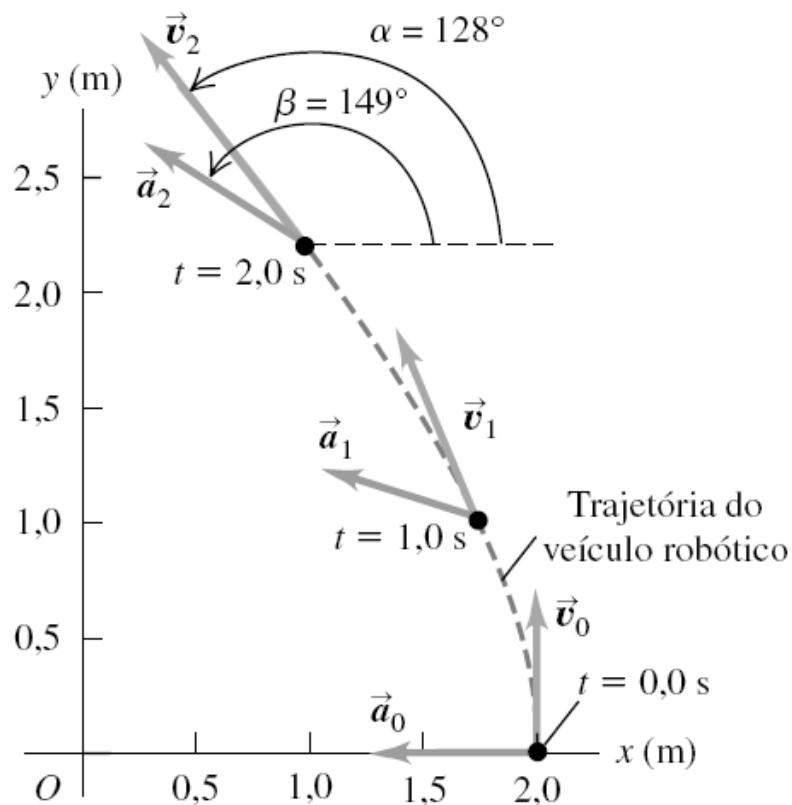


Figura 3.9 Trajetória do veículo robótico mostrando a velocidade e a aceleração para $t = 0,0 \text{ s}$ ($\vec{v}_0$ e $\vec{a}_0$), $t = 1,0 \text{ s}$ ($\vec{v}_1$ e $\vec{a}_1$) e $t = 2,0 \text{ s}$ ($\vec{v}_2$ e $\vec{a}_2$).

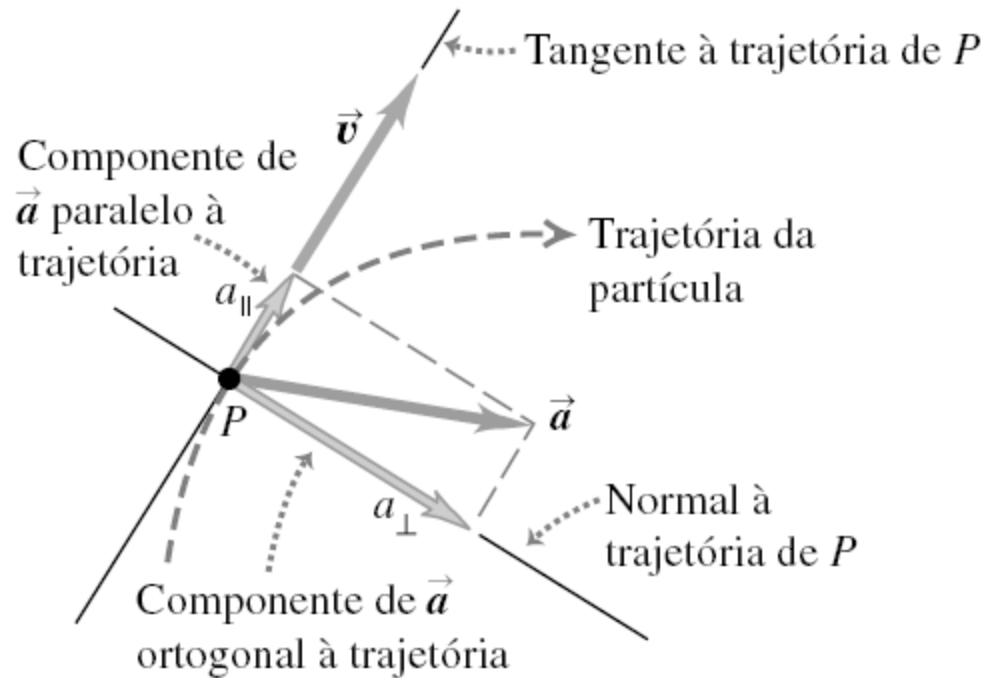
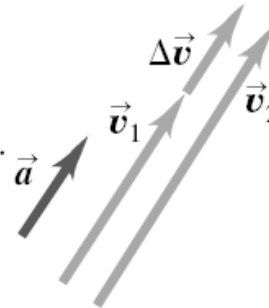


Figura 3.10 A aceleração pode ser decomposta no componente $a_{\parallel}$ paralelo à trajetória (e à velocidade) e no componente $a_{\perp}$ ortogonal à trajetória (ou seja, ao longo da normal à trajetória).

(a)

Aceleração paralela à velocidade da partícula:

- Há variação no *módulo*, mas não na *direção* da velocidade.
- A partícula se move em linha reta com velocidade escalar variável.



(b)

Aceleração ortogonal à velocidade da partícula:

- Há variação na *direção*, mas não no *módulo* da velocidade.
- A partícula se move em uma trajetória curva com velocidade escalar constante.

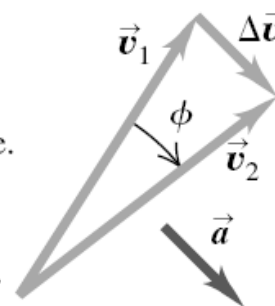
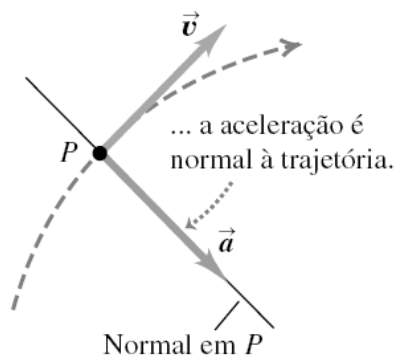
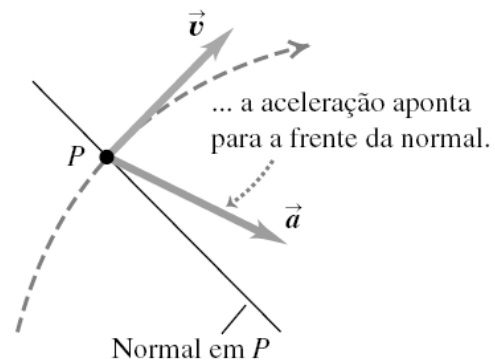


Figura 3.11 O efeito da aceleração direcionada (a) em paralelo e (b) ortogonal à velocidade de uma partícula.

(a) Quando a velocidade escalar é constante ao longo de uma trajetória curva...



(b) Quando a velocidade escalar é crescente ao longo de uma trajetória curva...



(c) Quando a velocidade escalar é decrescente ao longo de uma trajetória curva...

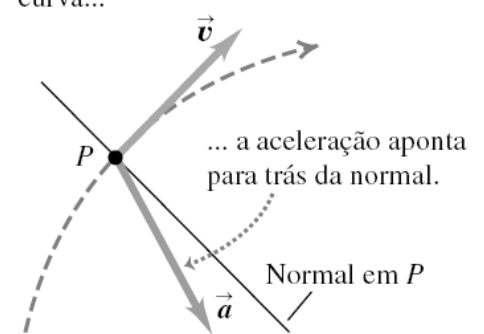


Figura 3.12 Vetores da velocidade e aceleração para uma partícula que atravessa um ponto P em uma trajetória curva com (a) velocidade escalar constante, (b) velocidade escalar crescente e (c) velocidade escalar decrescente.

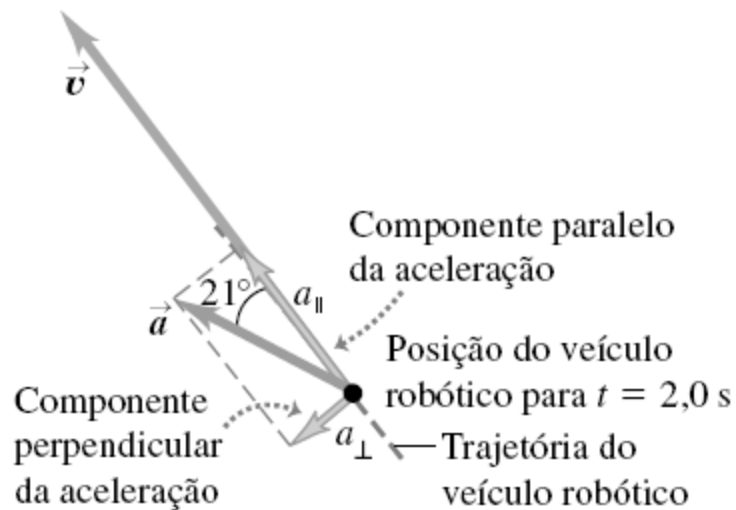
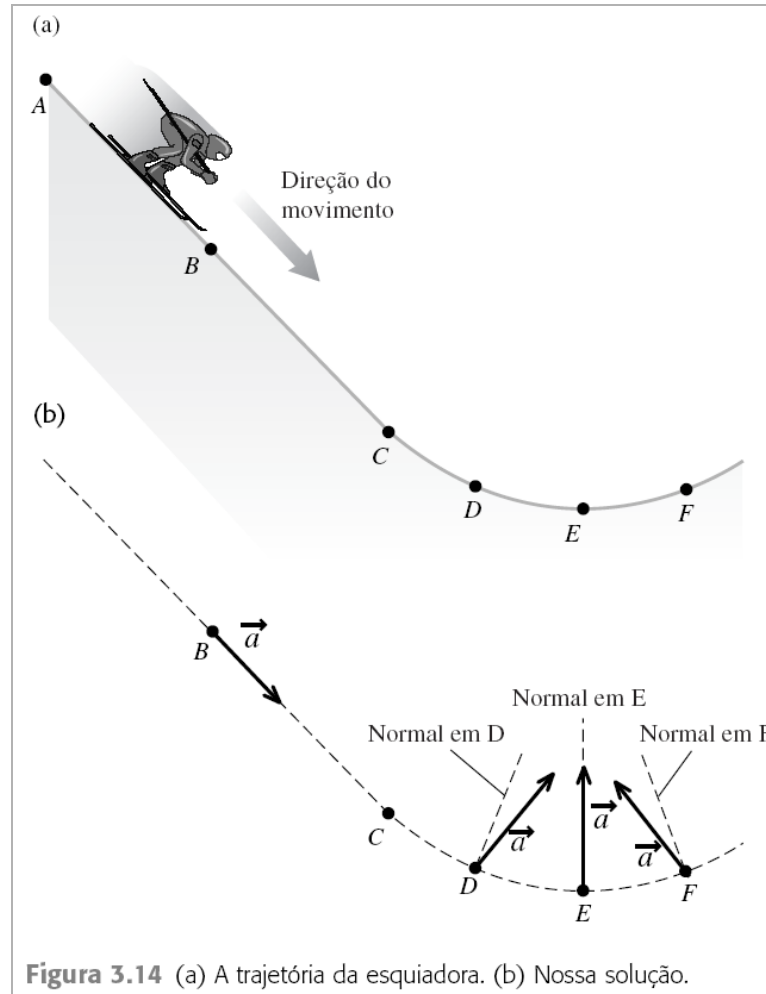


Figura 3.13 Os componentes paralelo e perpendicular da aceleração do veículo robótico em $t = 2,0$ s.



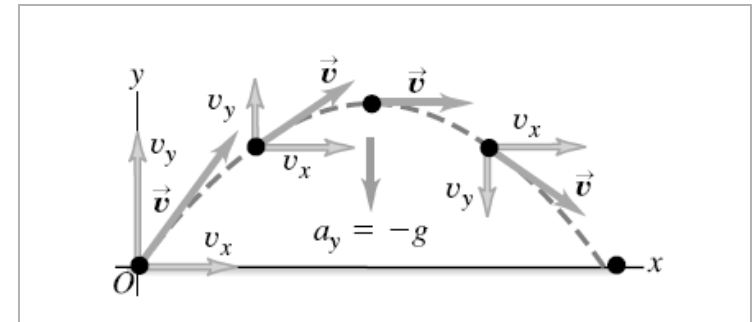
Movimento de um projétil: no movimento de um projétil, desprezada a resistência do ar, $a_x = 0$ e $a_y = -g$. As coordenadas e os componentes da velocidade em função do tempo são simples funções de tempo, e o formato da trajetória é sempre uma parábola. Geralmente definimos a origem na posição inicial do projétil.

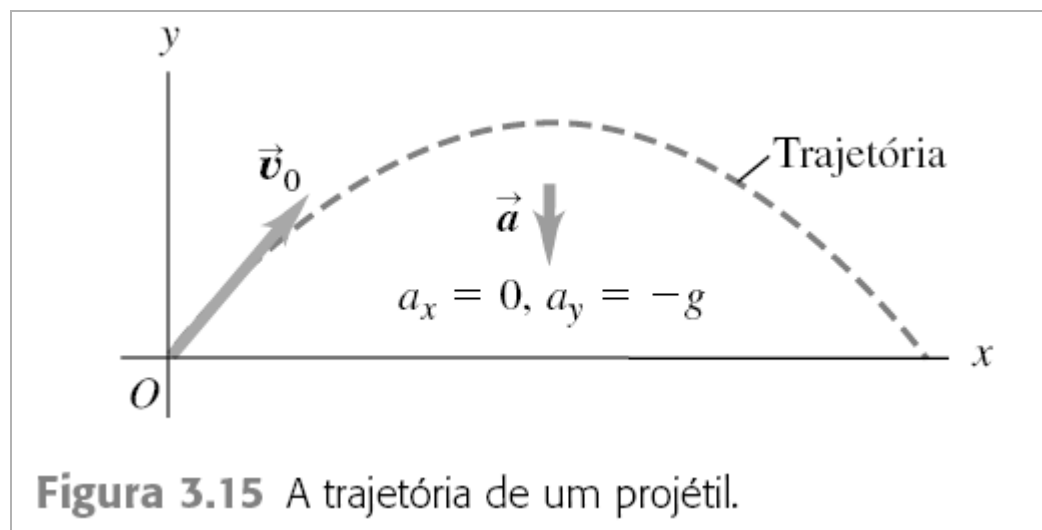
$$x = (v_0 \cos \alpha_0)t \quad (3.20)$$

$$y = (v_0 \sin \alpha_0)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (3.21)$$

$$v_x = v_0 \cos \alpha_0 \quad (3.22)$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha_0 - gt \quad (3.23)$$





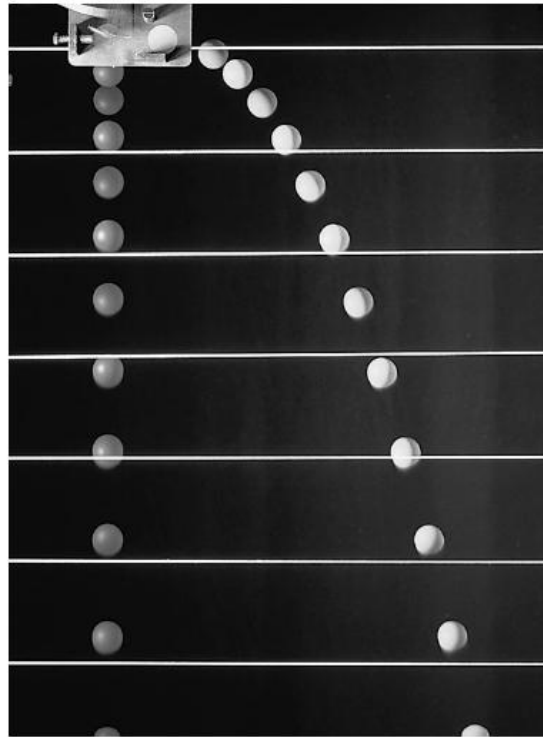


Figura 3.16 A bola da esquerda é largada verticalmente sem velocidade inicial. Simultaneamente, a bola da direita é lançada horizontalmente do mesmo ponto; imagens sucessivas desta fotografia estroboscópica são registradas em intervalos de tempo iguais. Para cada intervalo de tempo, as duas bolas possuem os mesmos componentes y da posição, da velocidade e da aceleração, embora os componentes x da posição e da velocidade sejam diferentes.

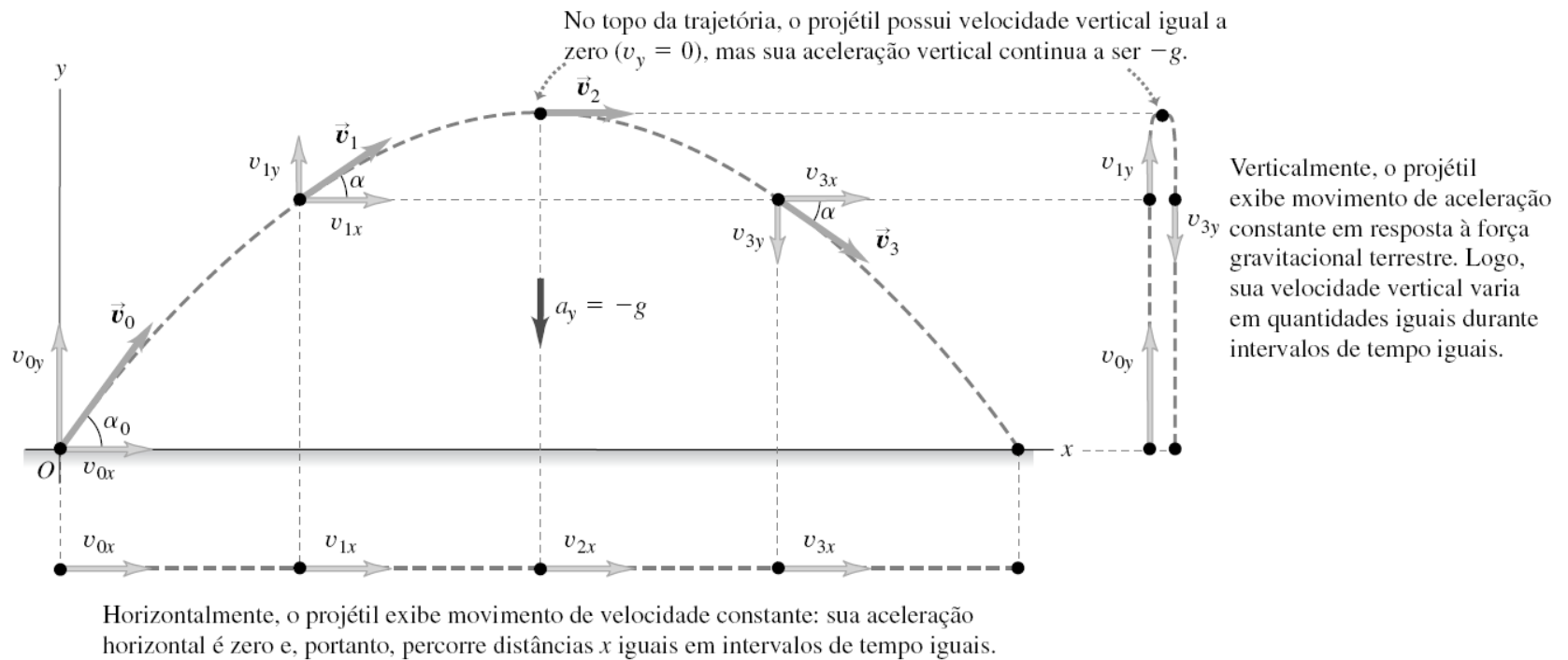


Figura 3.17 Se desprezarmos a resistência do ar, a trajetória de um projétil é uma combinação do movimento horizontal com a velocidade constante e do movimento vertical com a aceleração constante.

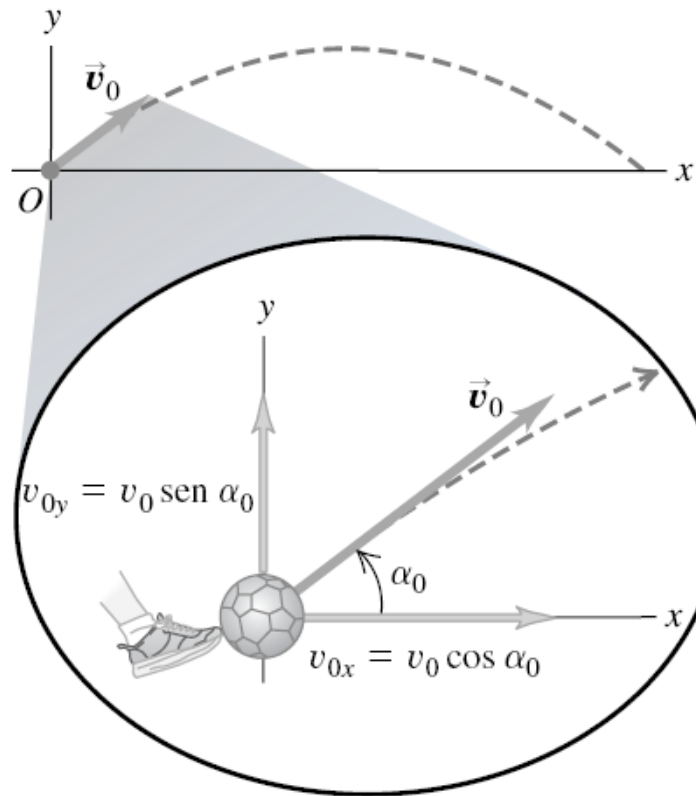
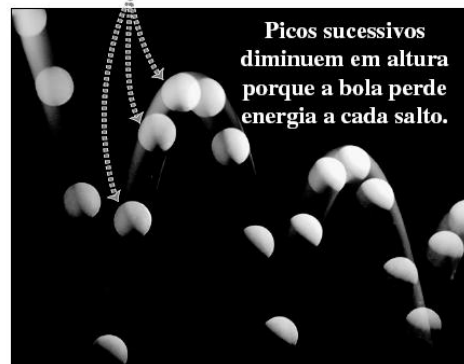


Figura 3.18 Os componentes de velocidade inicial v_{0x} e v_{0y} de um projétil (tal como um bola de futebol chutada) se relacionam com a velocidade escalar inicial v_0 e o ângulo inicial α_0 .

(a) Imagens sucessivas da bola são separadas por intervalos de tempo iguais.



(b)

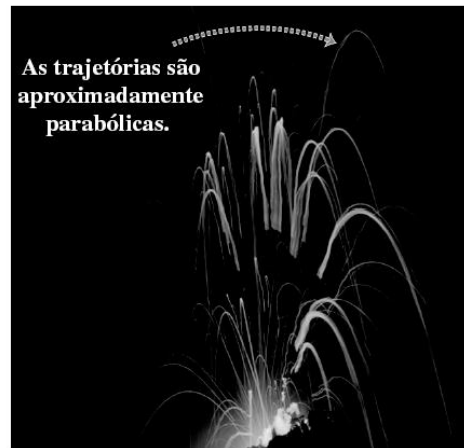


Figura 3.19 As trajetórias aproximadamente parabólicas de a) uma bola que quica e b) bolhas de rocha derretida que são ejetadas por um vulcão.

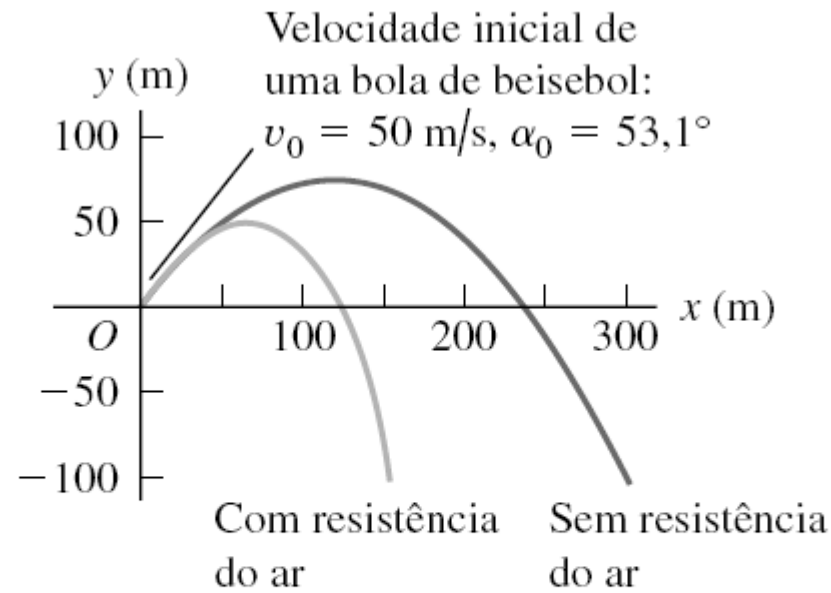


Figura 3.20 A resistência do ar tem um efeito amplo no movimento de uma bola de beisebol. Nesta simulação deixamos uma bola de beisebol cair de um ponto bastante alto e outra foi arremessada (por exemplo, a bola de beisebol poderia ter sido arremessada de um penhasco.)

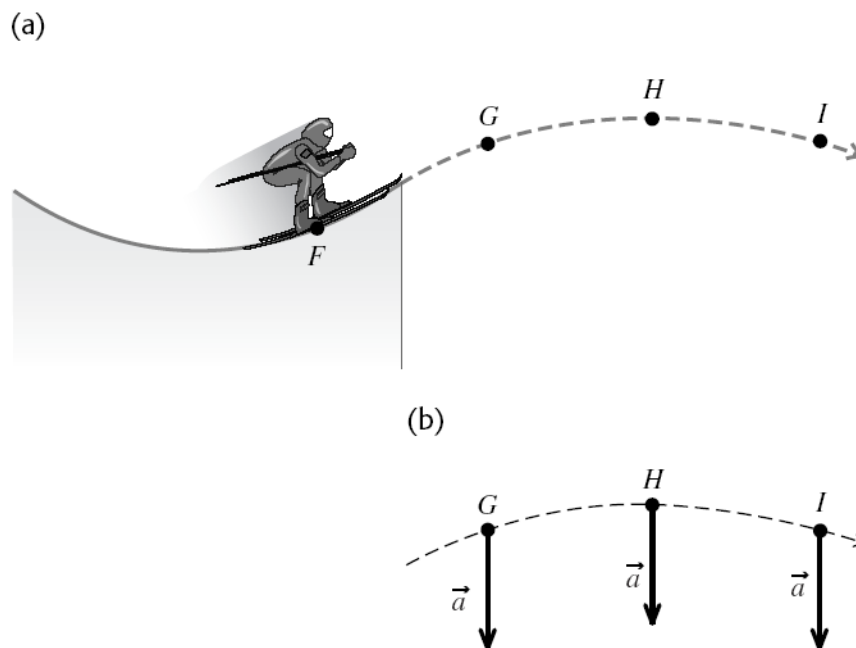
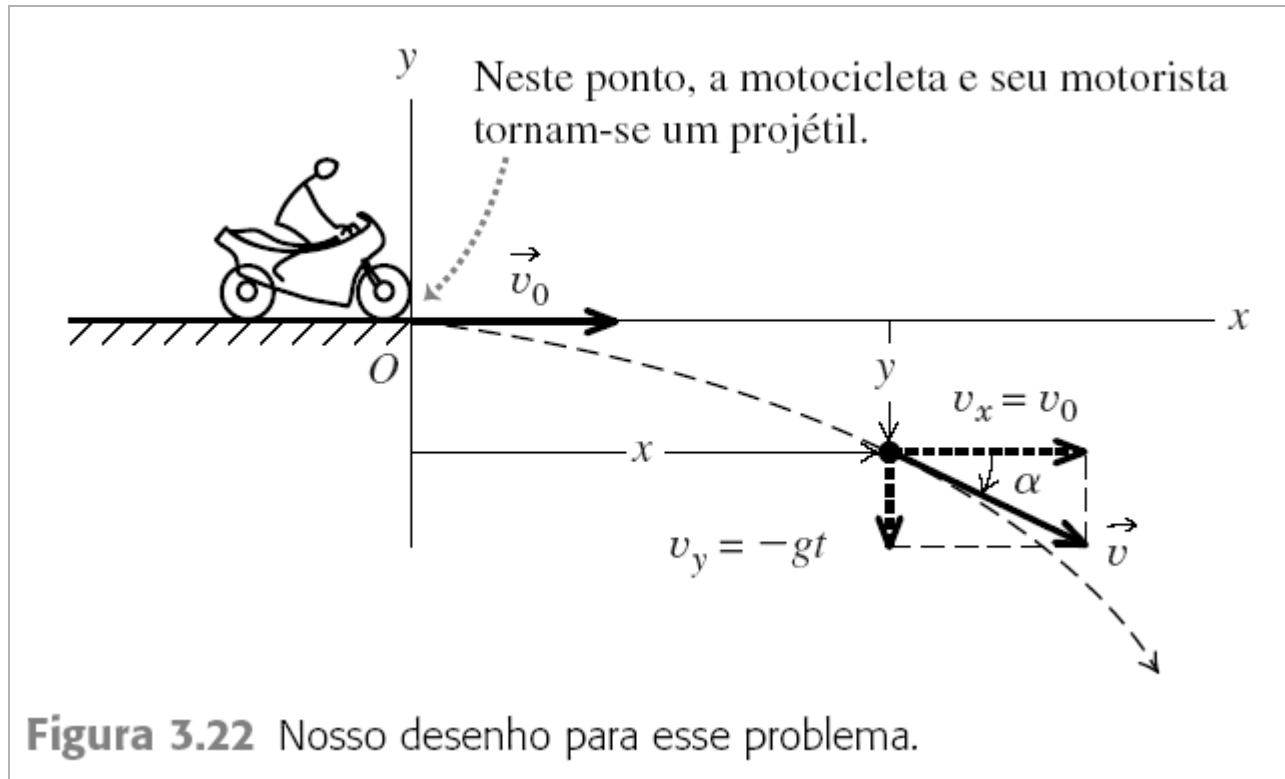


Figura 3.21 (a) A trajetória da esquiadora durante o salto. (b) Nossa solução.



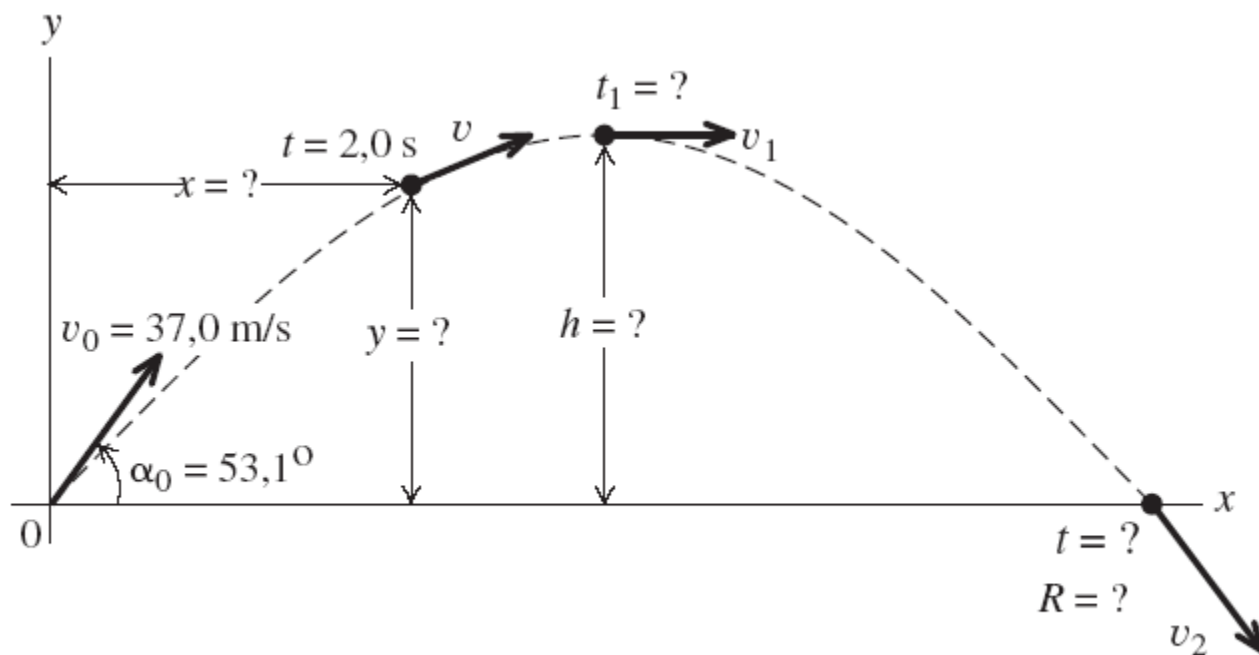


Figura 3.23 Nossa visualização deste problema.

Um lançamento de 45° dá o maior alcance;
outros ângulos são mais curtos.

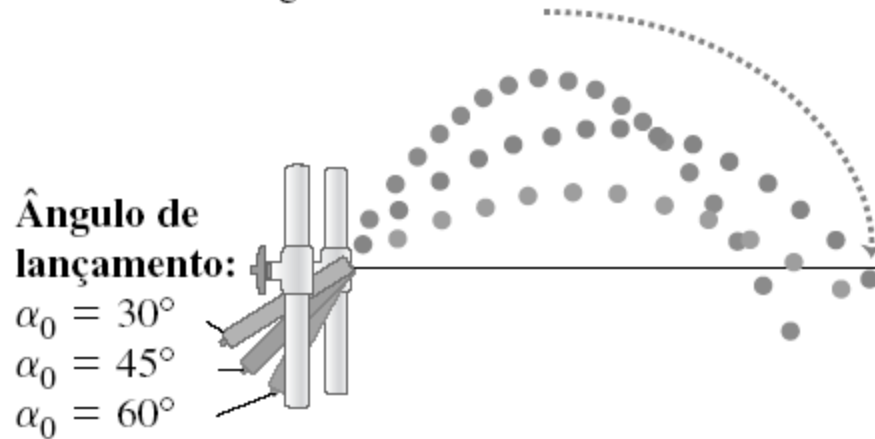


Figura 3.24 Um ângulo de lançamento de 45° fornece o alcance horizontal máximo. O alcance é mais curto com ângulos de lançamento de 30° e 60° .

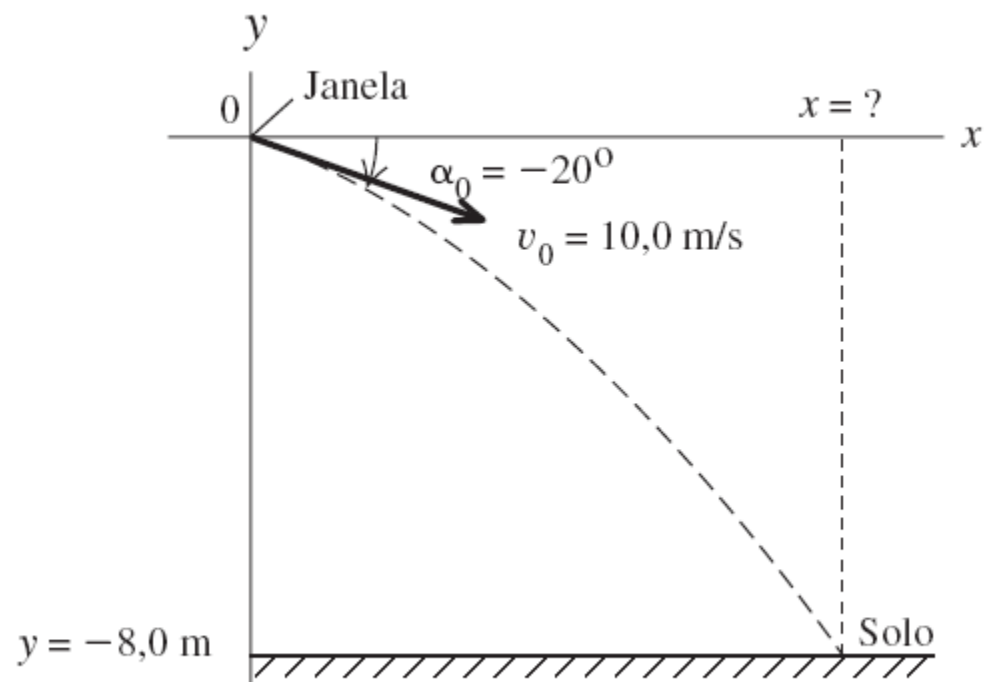


Figura 3.25 Nossa representação gráfica desse problema.

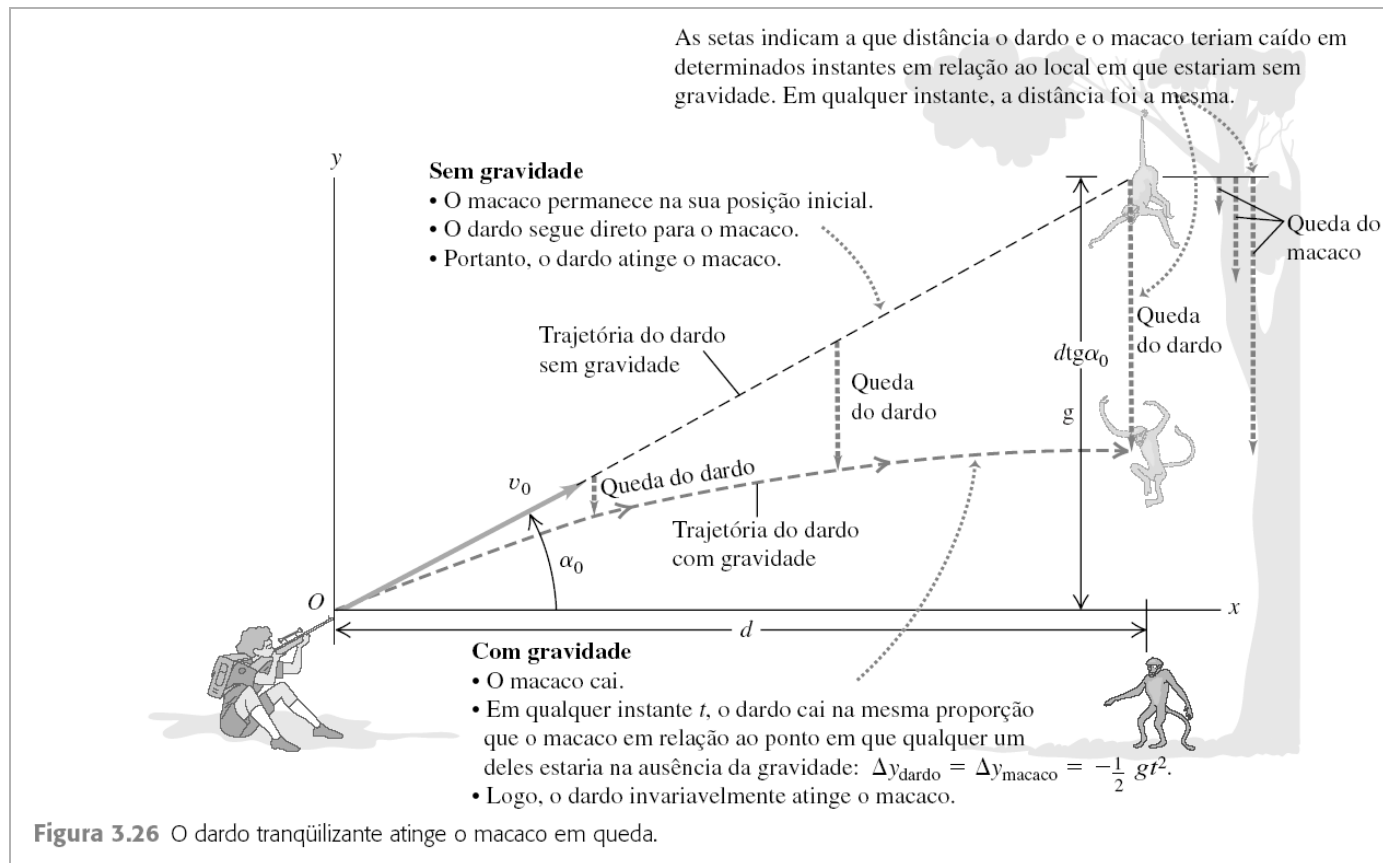
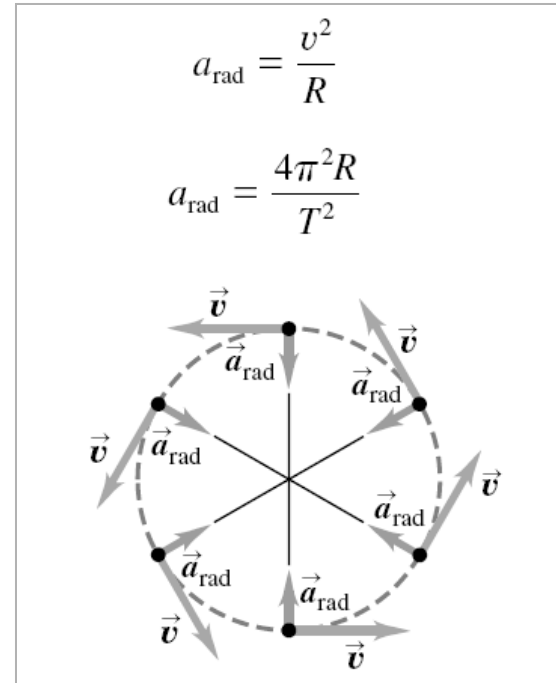


Figura 3.26 O dardo tranqüilizante atinge o macaco em queda.

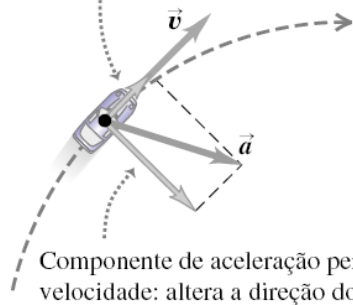
Movimento circular uniforme e não uniforme: quando uma partícula se move ao longo de um círculo de raio R com velocidade escalar v constante (movimento circular uniforme), ela possui aceleração dirigida $\vec{a}$ para o centro do círculo e perpendicular ao vetor $\vec{v}$. O módulo a_{rad} da aceleração pode ser expressa em termos de v e R ou em termos de R e o período T (o tempo de uma revolução), onde $v = 2\pi R/T$.

Quando a velocidade escalar não for constante (movimento circular não uniforme), ainda existirá um componente radial de $\vec{a}$ dado pela Equação (3.28) ou (3.30), mas existirá também um componente paralelo (tangencial) à trajetória. Esse componente é igual à taxa de variação da velocidade escalar, dv/dt .



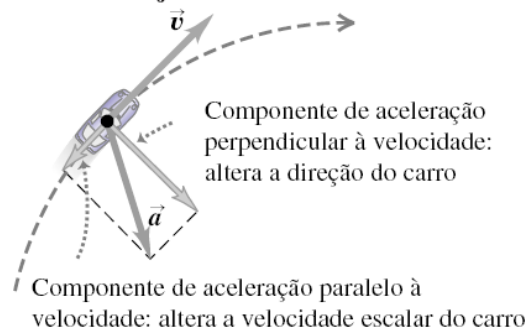
Um carro aumenta a velocidade ao longo de uma trajetória circular

Componente de aceleração paralelo à velocidade: altera a velocidade escalar do carro



Componente de aceleração perpendicular à velocidade: altera a direção do carro

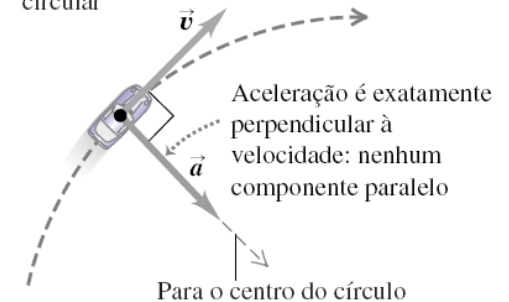
Um carro reduz a velocidade ao longo de uma trajetória circular



Componente de aceleração perpendicular à velocidade: altera a direção do carro

Componente de aceleração paralelo à velocidade: altera a velocidade escalar do carro

Movimento circular uniforme: velocidade escalar constante ao longo de uma trajetória circular

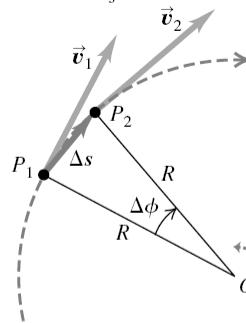


Aceleração é exatamente perpendicular à velocidade: nenhum componente paralelo

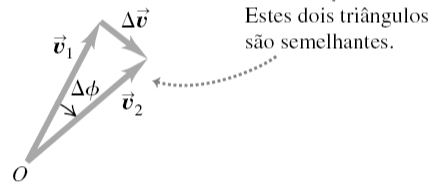
Para o centro do círculo

Figura 3.27 Um carro em movimento circular uniforme. A velocidade escalar é constante e a aceleração é orientada para o centro da trajetória circular.

(a) Um ponto percorre uma distância Δs a uma velocidade escalar constante ao longo de uma trajetória circular.



(b) A variação correspondente em velocidade e aceleração média.



(c) A aceleração instantânea.

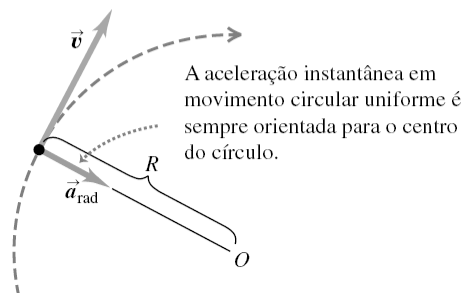
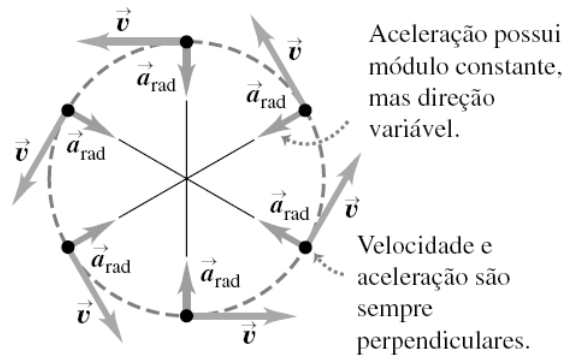


Figura 3.28 Ache a variação da velocidade $\Delta \vec{v}$, a aceleração média $\vec{a}_m$ e a aceleração instantânea $\vec{a}_{rad}$ para uma partícula que se move em círculo a uma velocidade constante.

(a) Movimento circular uniforme.



(b) Movimento de um projétil.

Velocidade e aceleração são perpendiculares somente no pico da trajetória.

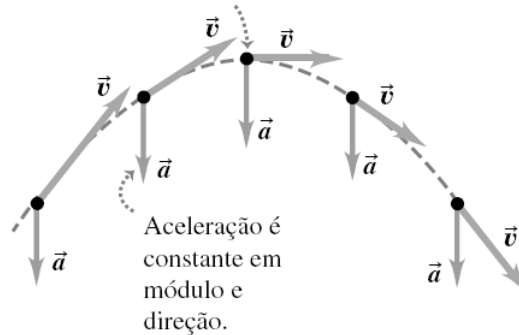
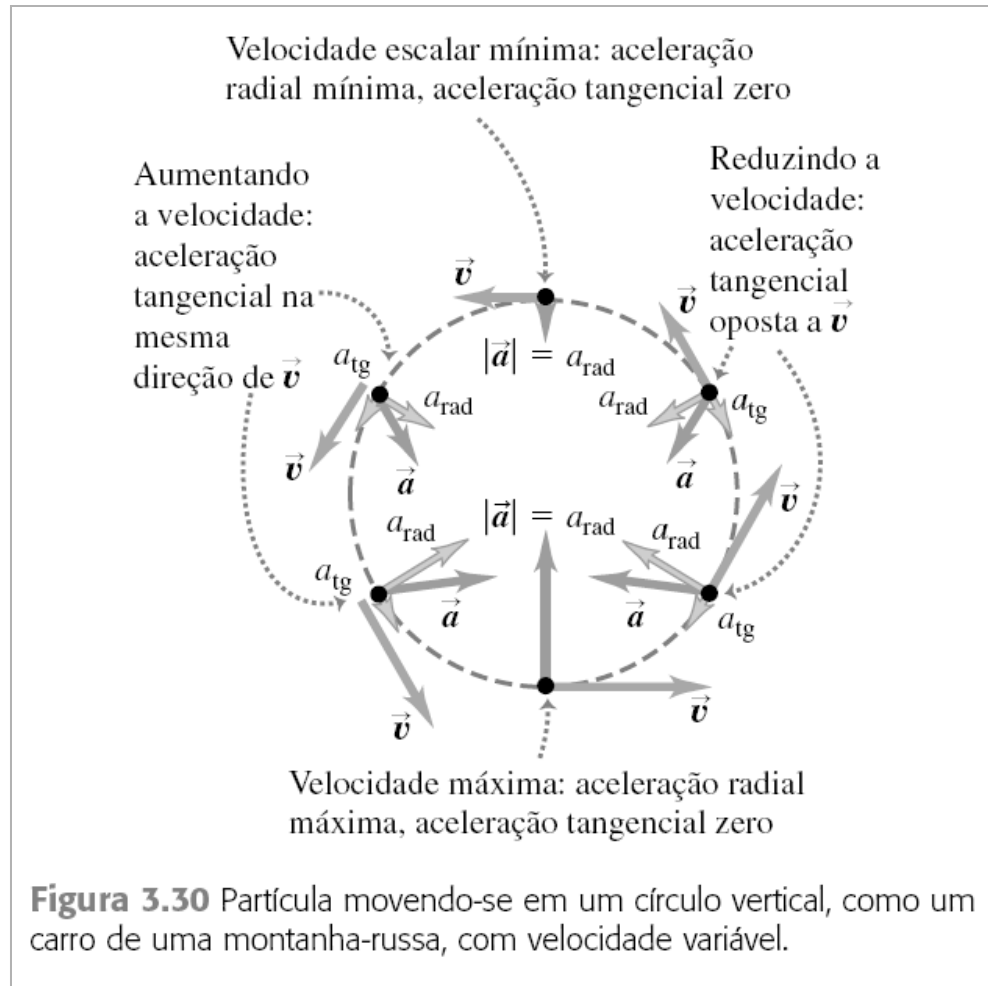


Figura 3.29 Aceleração e velocidade (a) para uma partícula em movimento circular uniforme e (b) para um projétil sem nenhuma resistência do ar.



Velocidade relativa: quando um corpo P se move em relação a outro corpo (ou sistema de referência) B , e B se move em relação à A , designamos a velocidade de P relativa a B por $\vec{v}_{P/B}$, a velocidade de P relativa à A por $\vec{v}_{P/A}$ e a velocidade de B relativa a A por $\vec{v}_{B/A}$. Quando essas velocidades estão ao longo da mesma linha, seus componentes ao longo dessa linha estão relacionados pela Equação (3.33). Genericamente, essas velocidades estão relacionadas pela Equação (3.36).

$$v_{P/Ax} = v_{P/Bx} + v_{B/Ax} \quad (3.33)$$

(velocidade relativa ao longo da linha)

$$\vec{v}_{P/A} = \vec{v}_{P/B} + \vec{v}_{B/A} \quad (3.36)$$

(velocidade relativa no espaço)

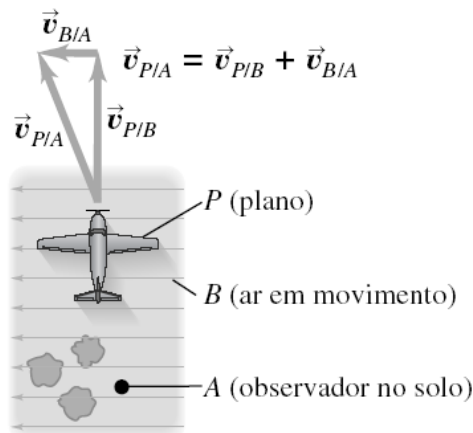
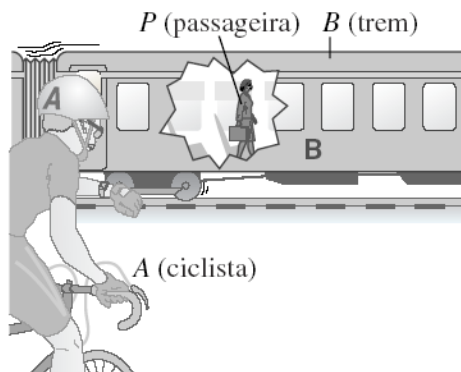




Figura 3.31 Os pilotos de uma exibição aérea enfrentam um problema complicado de movimento relativo. Eles devem considerar a velocidade relativa do ar sobre as asas (para que a força de sustentação atinja valores apropriados), a velocidade relativa entre os aviões (para evitar colisões) e a velocidade relativa em relação ao público (para que eles possam ser vistos).

(a)



(b)

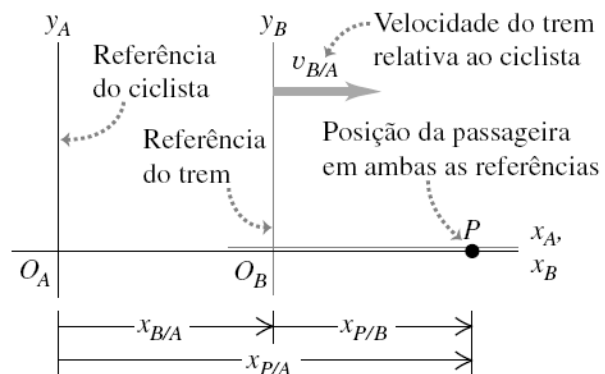


Figura 3.32 (a) A mulher caminhando no interior do trem. (b) A posição da mulher relativa ao sistema de referência do ciclista e ao sistema de referência do trem.

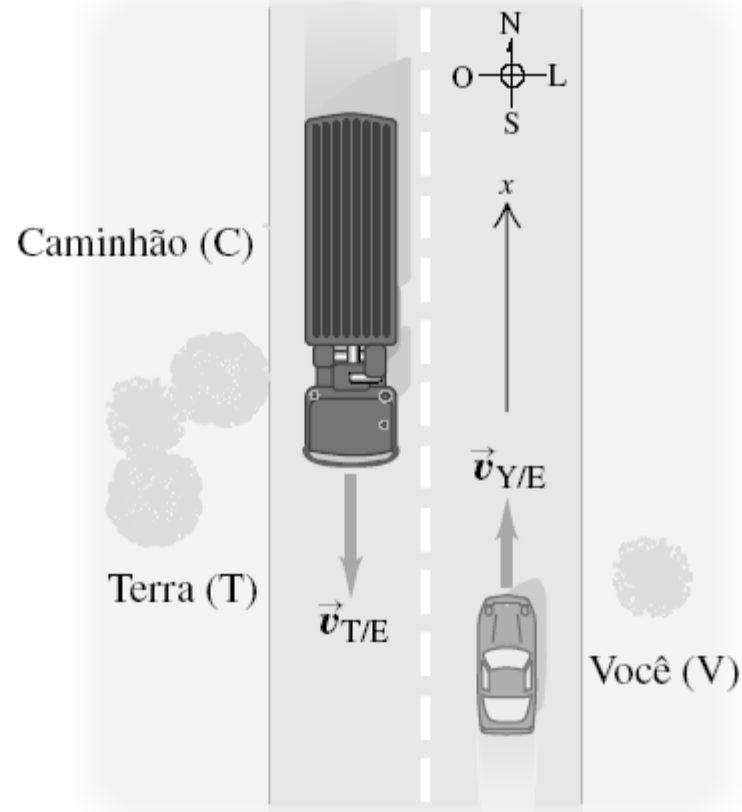
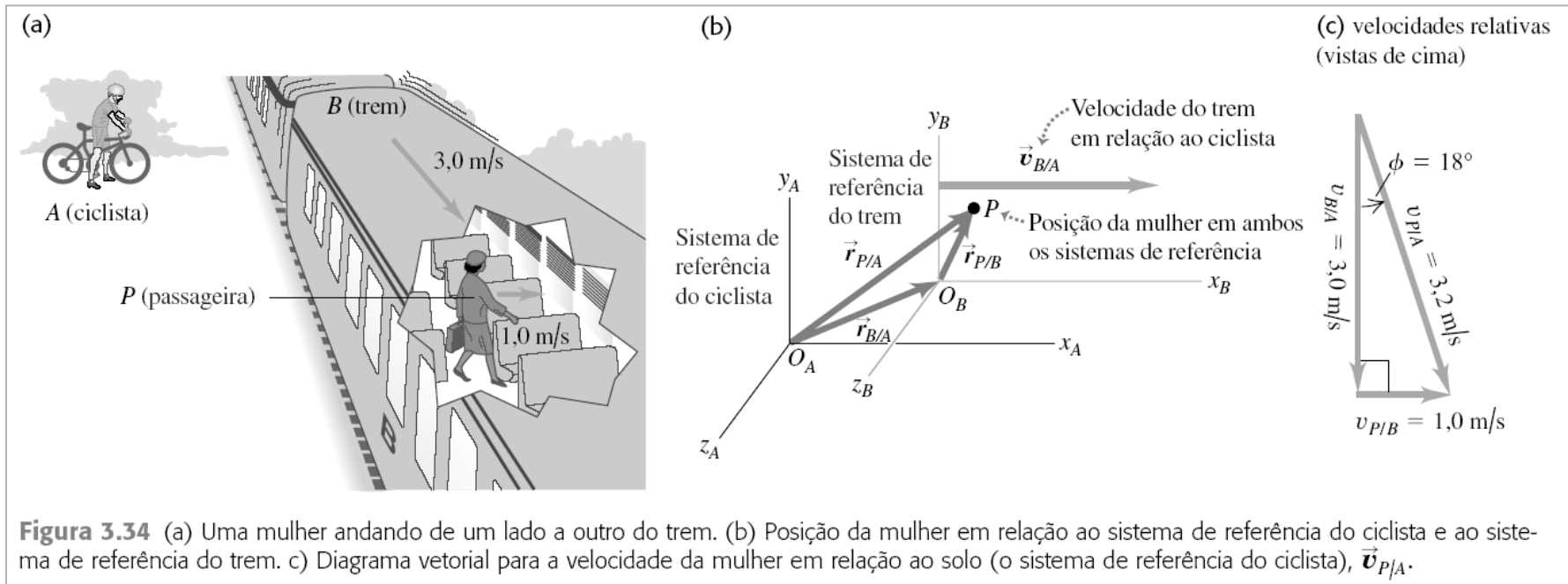


Figura 3.33 Sistemas de referência para você e para o caminhão.



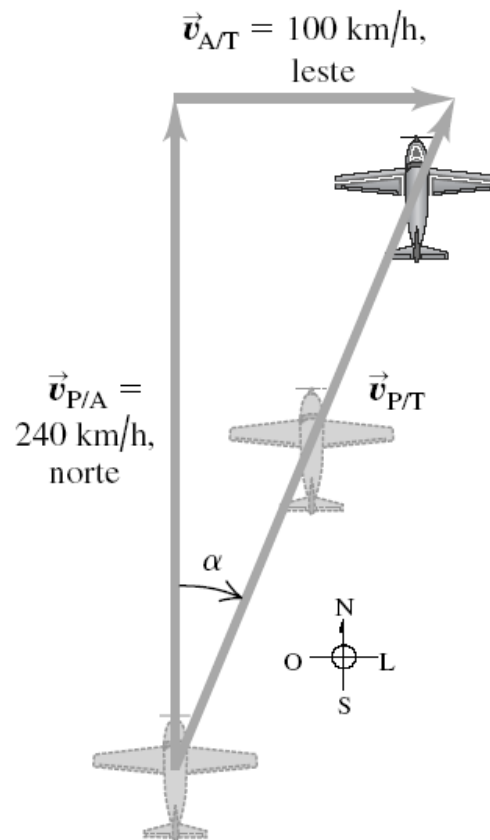


Figura 3.35 O avião vai do sul para o norte, mas o vento sopra de oeste para leste, produzindo a velocidade relativa resultante $\vec{v}_{P/T}$ do avião em relação à Terra.

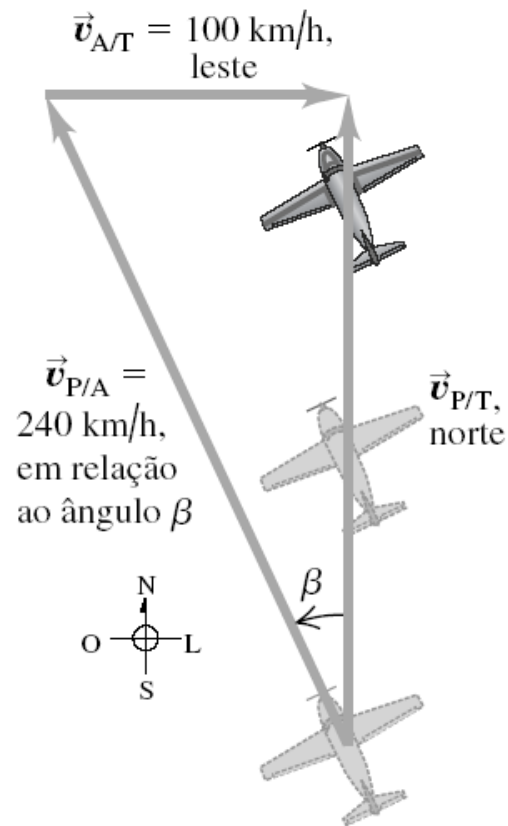


Figura 3.36 O piloto deve inclinar o avião na direção do vetor $\vec{v}_{P/A}$ para que ele siga do sul para o norte em relação à Terra.