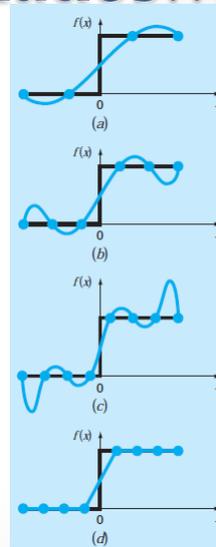


Modelagem em Engenharia C & A

Aula 10- Interpolações Avançadas

Melhorando os dados....

- Na aula 5 aprendemos a fazer uma interpolação linear - função `interp(x, y, xint)`
- Defeitos:
 - só funciona para uma função razoavelmente comportada - não há mudança de tendência
 - Descontinuidade entre os seguimentos
 - Interpolação linear é chamada de spline de 1o grau
- Uma primeira melhoria - garantir a continuidade da primeira diferencial



O ajuste Polinomial

- Emprega o método dos mínimos quadrados
- Não tem vinculação com o fenômeno físico

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + e$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2 \sum (y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2 \sum x_i (y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2)$$

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_2} = -2 \sum x_i^2 (y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2)$$

$$(n)a_0 + (\sum x_i) a_1 + (\sum x_i^2) a_2 = \sum y_i$$

$$(\sum x_i) a_0 + (\sum x_i^2) a_1 + (\sum x_i^3) a_2 = \sum x_i y_i$$

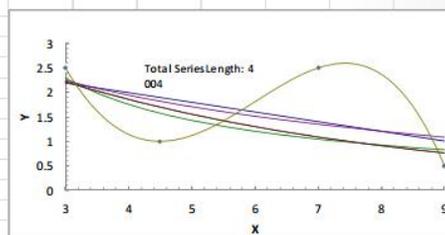
$$(\sum x_i^2) a_0 + (\sum x_i^3) a_1 + (\sum x_i^4) a_2 = \sum x_i^2 y_i$$

- Ajuste: monta-se uma matriz $(n+1) \times (n+1)$ para determinação das $n+1$ incógnitas a partir da derivada da função polinomial de grau n desejada, em relação à cada coeficiente a ser determinado.

A rotina Multfit

- Permite o ajuste de 5 principais funções (linearizáveis) – vista na aula 5!
- Permite o ajuste de polinômios de grau N definido pelo usuário
- Utiliza na solução da matriz o método da eliminação de Gauss (o excel tem um limite de aproximadamente 50 equações para solução de matrizes)
- A rotina plota as curvas ajustadas

Curva	A1	A2	r2				
1 Y=A1+A2	2.786136	-0.19764	0.259645				
2 Y=A1*X^n	6.341251	-0.92633	0.330612				
3 Y=A1*ex	3.781477	-0.17792	0.365478				
4 Y=A1*A2	3.781477	0.837013	0.365478				
5 Y=A1+A2	3.40912	-1.05791	0.248246				
Polinômio	19.21004	-9.4058	1.396977	-0.02681	-0.00422		1

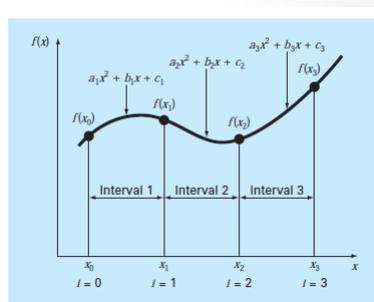


Spline de 2o grau

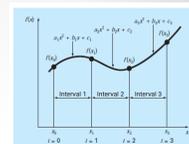
- Objetivo: ajustar um polinômio de grau 2 a cada intervalo dos dados de modo a garantir a continuidade entre os intervalos

$$f_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$$

- Critérios
 - O valor da função entre dois pontos adjacentes deve ser o mesmo
 - A primeira e a última função devem passar pelos pontos dados
 - A primeira derivada nos pontos interiores deve ser contínua
 - Admitir que a segunda derivada é zero nos pontos extremos



Critérios



- O valor da função entre dois pontos adjacentes deve ser o mesmo

$$a_{i-1}x_{i-1}^2 + b_{i-1}x_{i-1} + c_{i-1} = f(x_{i-1})$$

$$a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = f(x_{i-1})$$

- A primeira e a última função devem passar pelos pontos dados

$$a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1 = f(x_0)$$

$$a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n = f(x_n)$$

- A primeira derivada nos pontos interiores deve ser contínua

$$f'(x) = 2ax + b$$

- Admitir que a segunda derivada é zero no primeiro ponto

$$a_1 = 0$$

Exemplo

	x	f(x)
0	3	2.5
1	4.5	1
2	7	2.5
3	9	0.5

- $n = 3$
 - 3n incógnitas
 - Precisamos de 3n equações
- $$f_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$$
- Primeiro critério = 2n-2 equações
 - Segundo critério = duas equações
 - Terceiro critério = n-1 equações
 - Quarto critério = 1 equação
- Total 3 n equações

Exemplo de tabela

	x	f(x)
0	3	2.5
1	4.5	1
2	7	2.5
3	9	0.5

$$20,25 a_1 + 4,5 b_1 + c_1 = 1$$

$$20,25 a_2 + 4,5 b_2 + c_2 = 1$$

$$49 a_2 + 7 b_2 + c_2 = 2,5$$

$$49 a_3 + 7 b_3 + c_3 = 2,5$$

$$9 a_1 + 3 b_1 + c_1 = 2,5$$

$$81 a_3 + 9 b_3 + c_3 = 0,5$$

$$9 a_1 + b_1 - 9 a_2 - b_2 = 0$$

$$14 a_2 + b_2 - 14 a_3 + b_3 = 0$$

- $a_1 = 0$

$$a_{i-1} x_{i-1}^2 + b_{i-1} x_{i-1} + c_{i-1} = f(x_{i-1})$$

$$a_i x_{i-1}^2 + b_i x_{i-1} + c_i = f(x_{i-1})$$

$$a_1 x_0^2 + b_1 x_0 + c_1 = f(x_0)$$

$$a_n x_n^2 + b_n x_n + c_n = f(x_n)$$

$$f(x) = 2ax + b$$

Resolvendo a matriz no excel

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	20.25	4.5	1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	20.25	4.5	1	0	0	0
3	0	0	0	49	7	1	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	49	7	1
5	9	3	1	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	81	9	1
7	9	1	0	-9	-1	0	0	0	0
8	0	0	0	14	1	0	-14	-1	0
9	1	0	0	0	0	0	0	0	0

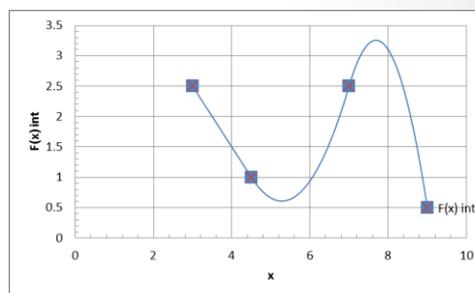
0.00
-1.00
5.50
0.64
-6.76
18.46
-1.60
24.60
-91.30

1.00
1.00
2.50
2.50
2.50
0.50
0.00
0.00
0.00

Verificando o resultado

x	f(x)
0	3
1	4.5
2	7
3	9

x	F(x) int
3	2.5
3.1	2.4
3.2	2.3
3.3	2.2
3.4	2.1
3.5	2
3.6	1.9
3.7	1.8
3.8	1.7
3.9	1.6
4	1.5
4.1	1.4
4.2	1.3
4.3	1.2
4.4	1.1
4.5	1
4.6	0.9064
4.7	0.8256
4.8	0.7576
4.9	0.7024
5	0.66
5.1	0.6304
5.2	0.6136



Spline Cúbica

$$f_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

- A cada 3 pontos temos uma equação com 4 incógnitas
- Extremamente eficiente para ajustar funções de engenharia
- Rotina muito rápida no excel

Crítérios

- O valor das funções deve resultar o mesmo nos pontos interiores **2n-2 equações**
- A primeira e a última função devem passar pelos pontos dados **2 equações**
- A primeira derivada nos pontos intermediários devem ser iguais **n-1 equações**
- As segundas derivadas nos pontos intermediários devem ser iguais **n-1 equações**
- A segunda derivada nos nós extremos devem ser nula. **2 equações**

Equações

- Admitindo

$$f_i''(x) = f_i''(x_{i-1}) \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f_i''(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

- Integrando 2 vezes

$$f_i(x) = \frac{f_i''(x_{i-1})}{6(x_i - x_{i-1})} (x_i - x)^3 + \frac{f_i''(x_i)}{6(x_i - x_{i-1})} (x - x_{i-1})^3 \\ + \left[\frac{f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})}{6} \right] (x_i - x) \\ + \left[\frac{f(x_i)}{x_i - x_{i-1}} - \frac{f''(x_i)(x_i - x_{i-1})}{6} \right] (x - x_{i-1})$$

- Considerando o segundo critério

$$f_i'(x_i) = f_{i+1}'(x_i)$$

$$(x_i - x_{i-1})f''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1})f''(x_i) \\ + (x_{i+1} - x_i)f''(x_{i+1}) \\ = \frac{6}{x_{i+1} - x_i} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] \\ + \frac{6}{x_i - x_{i-1}} [f(x_{i-1}) - f(x_i)]$$

Algoritmo de solução

- Para $i=1, n$

$$h_i = x_i - x_{i-1}$$

$$g_i = f''(x_i)$$

$$y_i = f(x_i)$$

$$(x_i - x_{i-1})f''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1})f''(x_i) \\ + (x_{i+1} - x_i)f''(x_{i+1}) \\ = \frac{6}{x_{i+1} - x_i} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] \\ + \frac{6}{x_i - x_{i-1}} [f(x_{i-1}) - f(x_i)]$$

$$h_i g_{i+1} + 2(x_{i+1} - x_{i-1}) g_i + h_{i+1} g_{i+1} = \\ \frac{6}{h_{i+1}} (y_{i+1} - y_i) + \frac{6}{h_i} (y_i - y_{i-1})$$

- Para cada quatro pontos $(0,1,2,3)\dots n=3$

$$\begin{aligned}
 h_1 g_0 + 2(x_2 - x_0)g_1 + h_2 g_2 &= \frac{6}{h_2}(y_2 - y_1) + \frac{6}{h_1}(y_0 - y_1) \\
 h_2 g_1 + 2(x_3 - x_1)g_2 + h_3 g_3 &= \frac{6}{h_3}(y_3 - y_2) + \frac{6}{h_2}(y_1 - y_2) \\
 h_3 g_2 + 2(x_4 - x_2)g_3 + h_4 g_4 &= \frac{6}{h_4}(y_4 - y_3) + \frac{6}{h_3}(y_2 - y_3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} h_1 & 2(x_2 - x_0) & h_2 & & \\ & h_2 & 2(x_3 - x_1) & h_3 & \\ & & h_3 & 2(x_4 - x_2) & h_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{h_2}(y_2 - y_1) + \frac{6}{h_1}(y_0 - y_1) \\ \frac{6}{h_3}(y_3 - y_2) + \frac{6}{h_2}(y_1 - y_2) \\ \frac{6}{h_4}(y_4 - y_3) + \frac{6}{h_3}(y_2 - y_3) \end{bmatrix}$$

- Para os pontos 1 e 2 $g_0 = 0$ e $g_3 = 0$

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 2(x_2 - x_0) & h_2 \\ & 2(x_3 - x_1) & h_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{h_2}(y_2 - y_1) + \frac{6}{h_1}(y_0 - y_1) \\ \frac{6}{h_3}(y_3 - y_2) + \frac{6}{h_2}(y_1 - y_2) \end{bmatrix}$$

- Resolvendo a matriz

$$f_1(x) = \frac{g_1}{6(x_1 - x_0)}(x_1 - x_0)^3 + \left[\frac{y_0}{x_1 - x_0} \right](x_1 - x) + \left[\frac{y_1}{x_1 - x_0} - \frac{g_1(x_1 - x_0)}{6} \right](x - x_0)$$

$$f_i(x) = \frac{g_i}{6(x_i - x_{i-1})}(x - x_{i-1})^3 + \frac{y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x_i - x) + \left(\frac{y_i}{x_i - x_{i-1}} - \frac{g_i(x_i - x_{i-1})}{6} \right)(x - x_{i-1})$$

Fórmulas de recorrência

- Mudança de variável

$$g_i = f'_i(x) \quad h_i = (x_i - x_{i-1}) \quad y_i = f(x_i)$$

$$x \leq x_i \quad f_i(x) = \frac{g_i}{6h_i} (x - x_{i-1})^3 + \frac{y_{i-1}}{h_i} (x_i - x) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{g_i h_i}{6} \right) (x - x_{i-1})$$

- Resolver a matriz para achar g

$$h_i g_{i-1} + 2(x_{i+1} - x_{i-1}) g_i + h_{i+1} g_{i+1} = \frac{6}{h_{i+1}} (y_{i+1} - y_i) + \frac{6}{h_i} (y_i - y_{i-1})$$

Resolvendo na planilha

	xk	yk	h			
0	3	2.5				
1	4.5	1	1.5			
2	7	2.5	2.5			
3	9	0.5	2			

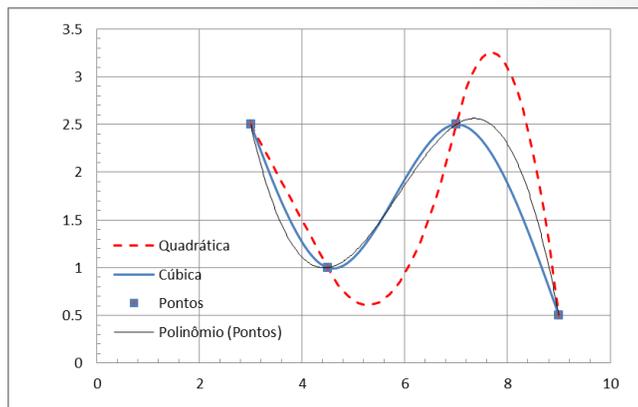
	1	2	3	4	G	B
0	1	0	0	0	-2.665E-16	0
1	1.5	8	2.5	0	1.67908745	9.6
2	0	2.5	9	2	-1.5330798	-9.6
3	0	0	0	1	0	0

Conferindo o resultado

```

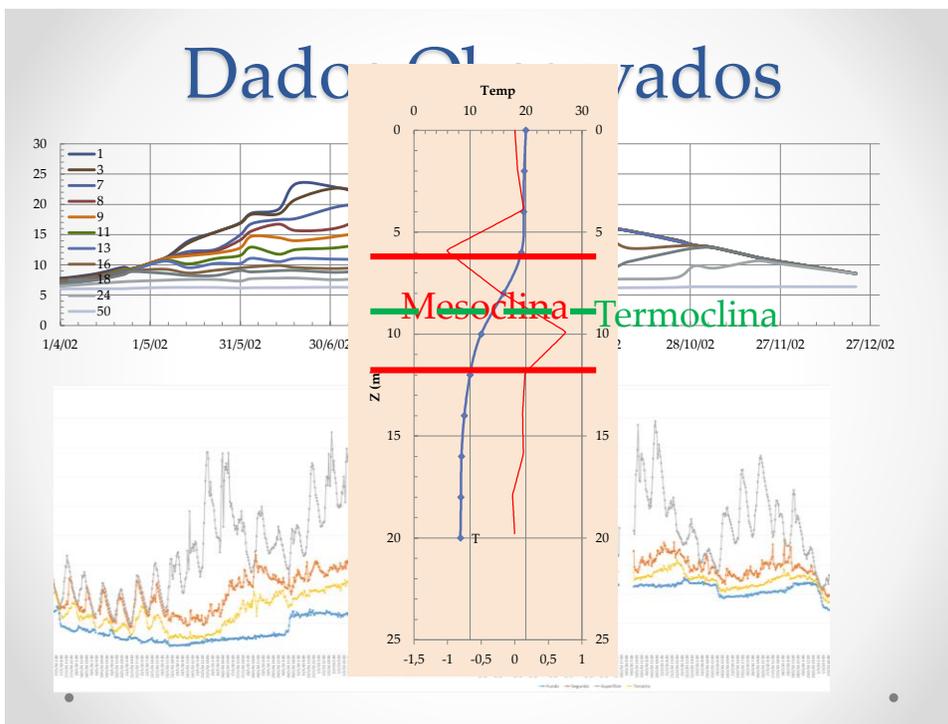
dx      0.1
3       2.5     2.5
3.1     2.358209 2.35821
3.2     2.217538 2.217538
3.3     2.079106 2.079106
3.4     1.944031 1.944031
3.5     1.813435 1.813435
3.6     1.688435 1.688435
3.7     1.570152 1.570152
3.8     1.459704 1.459704
3.9     1.358211 1.358211
4       1.266793 1.266793
4.1     1.186569 1.186569
4.2     1.118659 1.118659
4.3     1.06418  1.06418
4.4     1.024254 1.024254
4.5     1         1
4.55    0.994049 0.994049
4.6     0.992136 0.992136
4.65    0.994099 0.994099
4.7     0.999777 0.999777
4.8     1.02164  1.02164
4.9     1.056439 1.056439
5       1.10289  1.10289
5.1     1.159707 1.159707
5.2     1.225605 1.225605
5.3     1.299301 1.299301

```



Exercício

- A temperatura da água em um lago ou no oceano leva a um comportamento denominado 'estratificação' no qual as camadas mais 'frias' ficam mais pesadas, em função do comportamento da massa específica com a temperatura.
- Isto faz com que as camadas do fundo fiquem isoladas em relação à superfície e não recebem oxigênio da atmosfera. Esta é hoje a grande barreira para licenciamento ambiental dos reservatórios de barragens para usos múltiplos como geração de energia e abastecimento de água



O problema

- Considerando o perfil de temperatura fornecido de um lago de barragem que é determine a profundidade da termoclina

Z	T
0	20
1	19.7
2	19.6
3	19.2
4	15.6
5	12
6	10
7	9
8	8.5
9	8.4
10	8.3

Rotina VBA

```
Spline Calculadora - Rotinas
File Edit Format View Help
'Calcula a Spline entre os limites dados para um dado dx
Sub spline_sub()

    Dim i As Integer, j As Integer, n As Integer
    Dim xint As Single
    Dim x As Range, y As Range, output As Range, dx As Single
    ReDim Ax(1, 1) As Variant, Aax(1, 1) As Variant
    ReDim B(1) As Single, gx(1) As Single, h(1) As Single

    Set x = Application.InputBox(prompt:="Valor s de X", Type:=8)
    Set y = Application.InputBox(prompt:="Valor s de Y", Type:=8)
    Set output = Application.InputBox(prompt:="Célula inicial das colunas de saída", Type:=8)
    dx = Application.InputBox(prompt:="Passo de cálculo")

    n = x.Rows.Count

    'calcula os coeficientes da equação
    ReDim Ax(1 To n, 1 To n) As Variant
    ReDim Aax(1 To n, 1 To n) As Variant
    ReDim B(1 To n) As Single
    ReDim gx(1 To n) As Single
    ReDim h(1 To n) As Single

    For i = 1 To n
        For j = 1 To n
            Ax(i, j) = 0
        Next j
        B(i) = 0
        gx(i) = 0
    Next i

    h(1) = 0

End Sub
```