Física Experimental VI – 4300314

1º Semestre de 2017

Instituto de Física
Universidade de São Paulo

Professor: Antonio Domingues dos Santos

E-mail: adsantos@if.usp.br
Fone: 3091.6886

17 de maio

Transformada de Fourier

Para uma imagem **a** e sua transformada de Fourier **A**.

1) Domínio espacial => Domínio de frequências

Direta -

$$A = \mathrm{F}\{a\}$$

2) Domínio de frequências => Domínio espacial

Inversa -

$$a = \mathrm{F}^{-1}\{A\}$$

A transformada de Fourier é uma operação inversível:

$$a = \mathrm{F}^{-1}\{\mathrm{F}\{a\}\} \quad and \quad A = \mathrm{F}\{\mathrm{F}^{-1}\{A\}\}$$

As suas fórmulas específicas são:

Em 2D, espaço contínuo:

Direta -

$$A(u,v) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} a(x,y)e^{-j(ux+vy)}dxdy$$

Inversa -

$$a(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} A(u,v)e^{+j(ux+vy)}dudv$$

Em 2D, espaço discreto:

Direta -

$$A(\Omega,\Psi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a[m,n]e^{-j(\Omega m+\Psi n)}$$

Inversa -

$$a[m,n] = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A(\Omega,\Psi)e^{+j(\Omega m+\Psi n)}$$

Propriedades da Transformada de Fourier

A transformada de Fourier é uma função complexa. Pode ser expressa em termos de magnitudes e fases.

$$A(u,v) = |A(u,v)| e^{j\varphi(u,v)} \qquad A(\Omega,\Psi) = |A(\Omega,\Psi)| e^{j\varphi(\Omega,\Psi)}$$

* Um sinal 2D pode ser complexo e também ser descrito em têrmos de magnitudes e fases.

$$a(x,y) = |a(x,y)| e^{j\vartheta(x,y)} \qquad a[m,n] = |a[m,n]| e^{j\vartheta[m,n]}$$

* Se o sinal 2D é real, a transformada de Fourier possui simetrias.

$$A(u,v) = A^*(-u,-v) \qquad A(\Omega,\Psi) = A^*(-\Omega,-\Psi)$$

$$|A(u,v)| = |A(-u,-v)| \qquad \varphi(u,v) = -\varphi(-u,-v)$$

$$|A(\Omega,\Psi)| = |A(-\Omega,-\Psi)| \qquad \varphi(\Omega,\Psi) = -\varphi(-\Omega,-\Psi)$$

* Se o sinal 2D é real e par, a sua transformada é real e par.

$$A(u,v) = A(-u,-v) \qquad A(\Omega,\Psi) = A(-\Omega,-\Psi)$$

* A transformada e sua inversa são operações lineares.

$$\mathrm{F}\{w_1 a + w_2 b\} = \mathrm{F}\{w_1 a\} + \mathrm{F}\{w_2 b\} = w_1 A + w_2 B$$

$$\mathrm{F}^{-1}\{w_1 A + w_2 B\} = \mathrm{F}^{-1}\{w_1 A\} + \mathrm{F}^{-1}\{w_2 B\} = w_1 a + w_2 b$$

* A energia E é:

$$E = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left| a[m,n] \right|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left| A(\Omega,\Psi) \right|^2 d\Omega \, d\Psi$$

* Dados 3 sinais a, b e c e suas transformadas A, B e C:

$$c = a \otimes b \quad \overset{\mathrm{F}}{\leftrightarrow} \quad C = A \bullet B$$

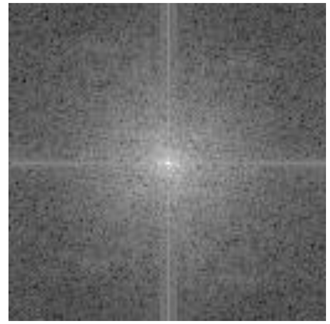
and

$$c = a \bullet b \quad \overset{\mathrm{F}}{\leftrightarrow} \quad C = \frac{1}{4\pi^2} A \otimes B$$

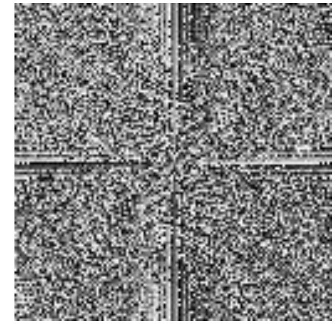
convolução no domínio espacial é equivalente a multiplicação no domínio de frequências e vice-versa.

Importância da fase e magnitude

Original

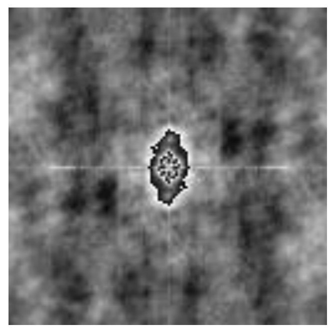


log(|Amplitude|)



fase

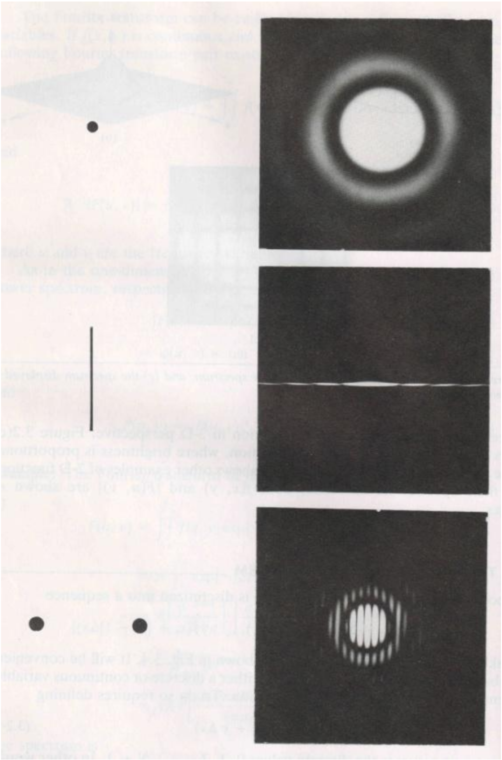
Inversas com:

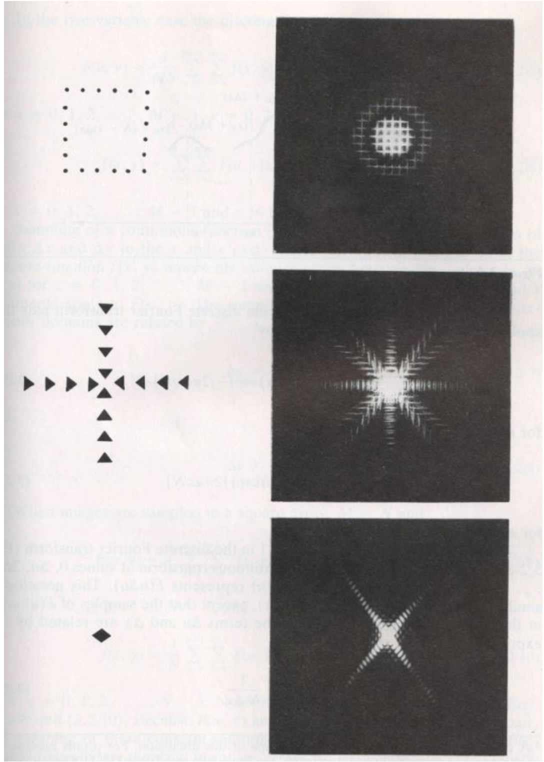


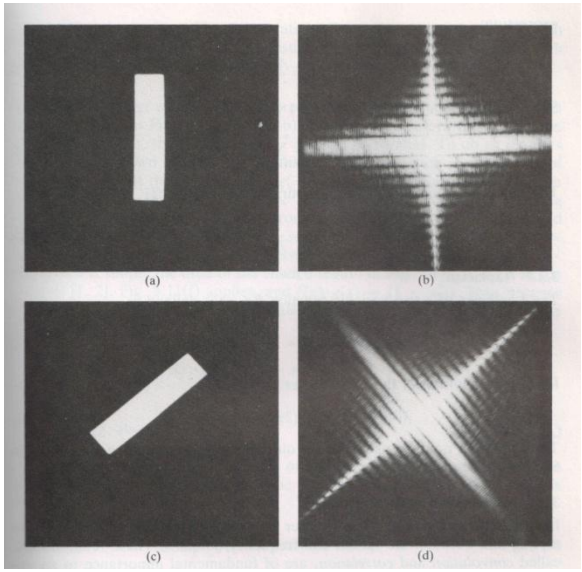
fase= 0

|Amplitude|= cte

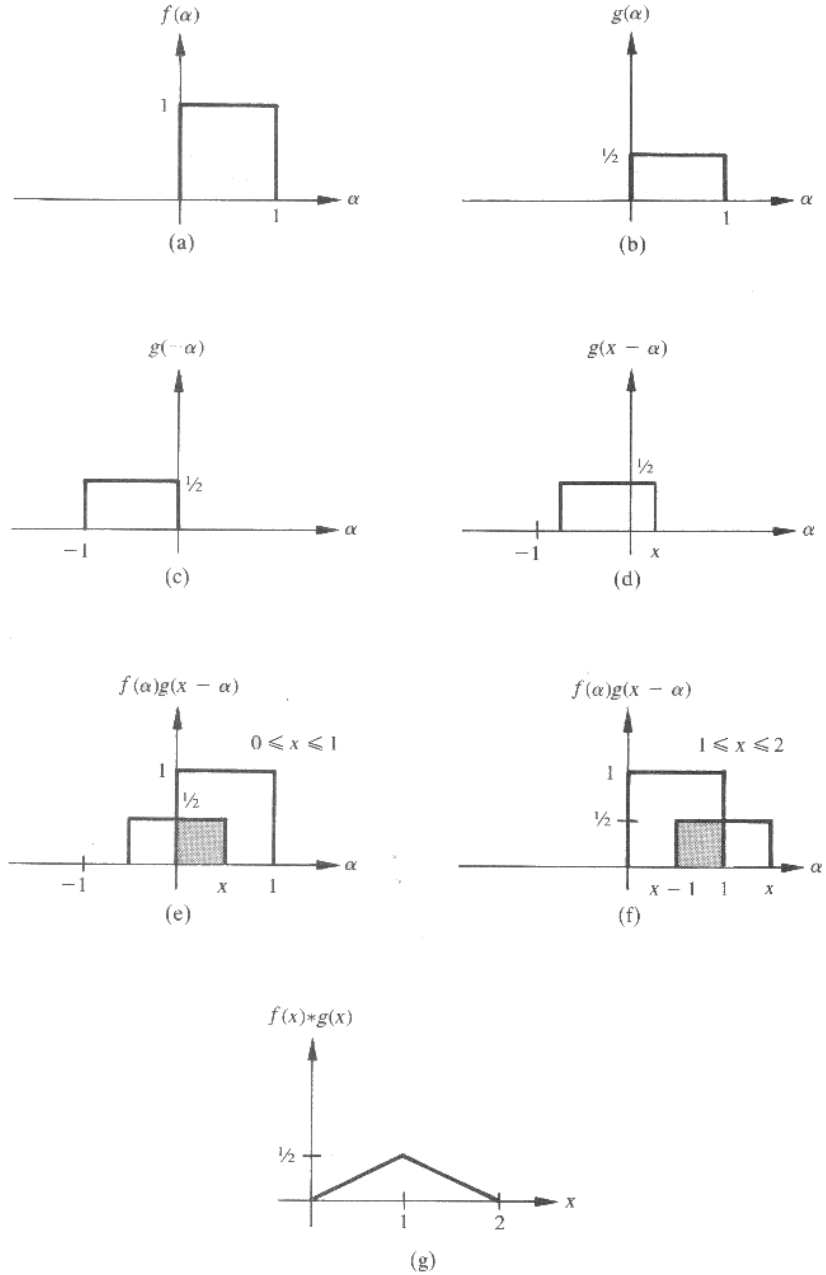
Apenas a magnitude ou a fase não é suficiente para recuperar a imagem.
A imagem obtida a partir da magnitude é irreconhecível ! ! !






(a)
(b)
(c)
(d)

Exemplo de Convolução



FFT Submenu

Os comandos neste submenu suportam a apresentação, edição e processamento no domínio de frequências. Eles são baseados em uma implementação da (contribuição de Arlo Reeves).

FFT

Calcula a transformada de Fourier e apresenta o seu espectro de potência. A imagem no domínio de frequências é guardada como 32-bit float FHT. Os comandos neste submenu, como *Inverse FFT*, operam sobre a 32-bit FHT e não sobre o espectro de potências(8-bit). Todos os outros comandos do ImageJ agem sobre o espectro de potências.

Inverse FFT

Calcula a transformada inversa de Fourier. É possível filtrar ou mascarar partes da imagem com a transformada e então através da transformada inversa, produzir uma imagem com as frequências de interesse ou então com a supressão das frequências marcadas. Use os comandos fill/clear para indicar as seleções. Áreas pretas (pixel value=0) causam a supressão das frequências e áreas brancas (pixel value=255) indicam áreas a serem mantidas. Use apenas branco ou preto para indicar a seleção.

Original image | Power spectrum with mask that filters low frequencies | Result of inverse transform | Power spectrum with mask that passes low frequencies | Result of inverse transform

Redisplay Power Spectrum

Recalcula o espectro de potências a partir da imagem 32-bit FHT. Este comando permite se recuperar de operações erradas sobre o espectro de potências (8-bit image).

Bandpass Filter..

Plugin criado por Joachim Walter.

Custom Filter..

Este comando permite o uso de uma imagem fornecida pelo usuário para a filtragem no domínio de frequências.

FD Math..

Este comando correlaciona, convolui ou desconvolui duas imagens. Ele as convertem para o domínio de frequências e realiza uma operação de multiplicação pelo conjugado, multiplicação ou divisão com elas. Em seguida, converte para o domínio espacial o resultado.