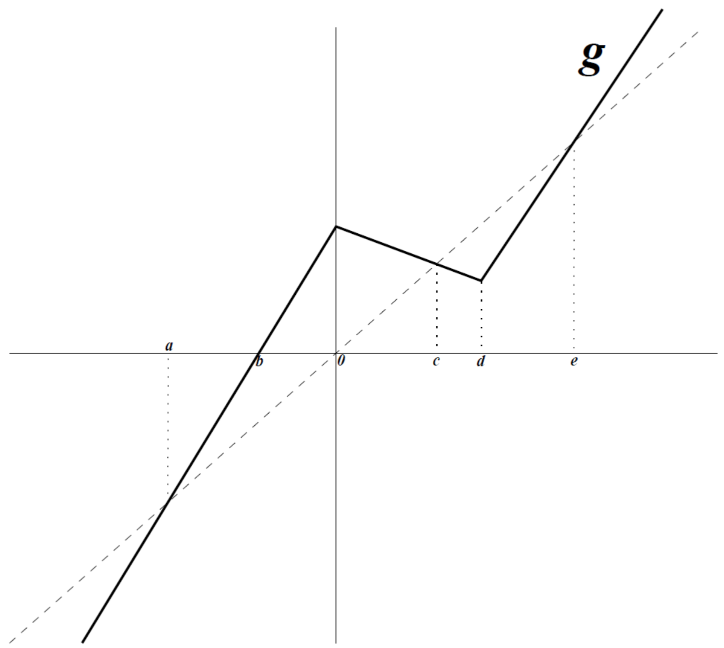
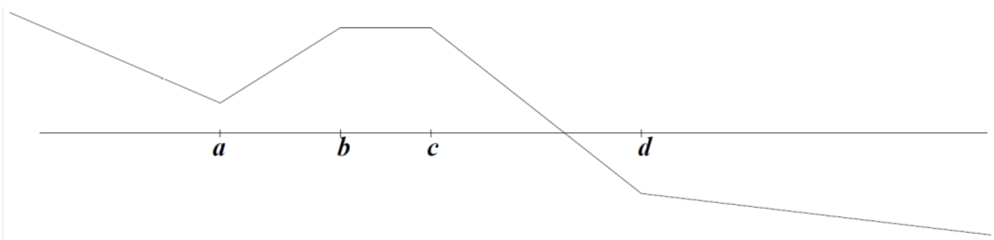
MÉTODO DE NEWTON

1. Seja g a função esboçada abaixo, com a denominação de alguns pontos relevantes. Diga o que acontece com os iterados do Método de Newton aplicado à função g, de acordo com as diferentes possibilidades de condição inicial x_0. (Atenção: x_0 não precisa ser um desses pontos marcados, é para considerar qualquer possibilidade de $x_0 \in \mathbb{R}$)



2. A figura abaixo mostra o gráfico de uma função poligonal, posicionada em relação à abscissa. Os pontos de mudança de inclinação foram marcados com as letras a, b, c, d. Se o Método de Newton for usado com essa função, determine em quais pontos ele pode ser aplicado e o que acontece com as iterações subsequentes, em função do ponto inicial x_0. Se precisar, nomeie outros pontos importantes, para facilitar a explicação.



3. Trataremos de encontrar soluções positivas da equação $0.5e^x = \cos x$, que é o mesmo que encontrar as raízes positivas de $f(x) = 0.5e^x - \cos x$.
   a. Mostre que f tem apenas uma raiz positiva.
   b. Escolha um valor de x_0, justificando, tal que a convergência do Método de Newton a partir de x_0 para a raiz positiva seja garantida.
   c. Construa a fórmula de iteração de Newton e itere a partir do x_0 escolhido, anotando cada iteração com todas as casas apresentadas pela calculadora, até que os valores estabilizem.

d. Obtenha uma resposta com 7 casas decimais depois da vírgula que tenha precisão de 5×10^{-8}. Certifique-se da resposta fazendo análise de sinais.

4.
   a. Ache a única raiz de $0.5x + e^x$ usando o Método de Newton, com a máxima precisão que sua calculadora permite. Explicite todas as suas contas.
   b. É verdadeiro ou falso que, para essa função, o Método de Newton converge para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$? Justifique sua resposta.
5. (Atividade de classe). Para as funções $x^2 - 8, e^x - 5x, x^3 - 1739, \sin x - 0.5x$, esboce o gráfico de f, usando informações sobre f' (para entender o crescimento, o decrescimento, os pontos críticos, os valores críticos) e sobre f'' (para entender a concavidade, os pontos de inflexão). Em seguida, entenda, do ponto de vista geométrico, onde $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ se posiciona para as várias possibilidades de x. Tente concluir sobre quais x_0 funcionam para cada raiz.
6. Seja $p(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 + x - 2$. O objetivo deste exercício é ter um bom esboço de seu gráfico, com raízes, pontos críticos e pontos de inflexão obtidos numericamente ou teoricamente, quando possível.
   a. Comece calculando todas as derivadas de p até quarta ordem.
   b. Como p'' é de ordem 2, calcule suas raízes (que são os pontos de inflexão de p e também os pontos críticos de p'). Estude também os sinais de p'', para saber sobre a concavidade de p nos diferentes trechos.
   c. Note que p' é um polinômio de grau 3, para o qual já se tem (pelo item anterior), os pontos críticos. Calcule os valores críticos de p', olhando, particularmente, para seus sinais. Use isso para descobrir quantas raízes tem p'. (*Dica: às vezes ajuda denominar $f = p'$, para não fazer confusão com p, cujo gráfico é o objetivo da questão*.)
   d. Monte a fórmula de iteração de Newton (para $f = p'$) para descobrir as raízes de p'. Aproveite e estude o sinal de p'. Agora você terá todas as informações importantes sobre a derivada de p.
   e. Encontre os valores críticos de p (isto é, o valor de p nos pontos críticos de p). Use essa informação para contar e localizar aproximadamente as raízes de p.
   f. Monte a fórmula de iteração de Newton para p e encontre as raízes de p.
   g. Faça um gráfico caprichado com todas as informações numéricas que obteve (mas não precisa ser em escala: o importante são as informações).